DEMI-PROMO B
SECOND TEST
DE CALCUL SCIENTIFIQUE
4 MAI 2005 durée 2h

EXERCICE 1 (barème : 2+3)

On considère le problème de Cauchy :

$$y'(t) = f(y(t), t) \quad \text{avec} \quad y(0) = y_0$$

où f est une fonction continue vérifiant une condition de Lipschitz sur la variable y.

Pour résoudre numériquement ce problème, on introduit un pas constant h et on utilise le schéma suivant :

$$\begin{cases} k_1 = f(t_i, y_i) \\ k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(t_i + h, y_i - hk_1 + 2hk_2) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \end{cases}$$

où y_i est l'approximation de $y(t_i)$.

1) Montrer que ce schéma numérique est convergent.

2) Montrer que ce schéma est au moins d'ordre deux.

EXERCICE 2 (barème : 3 +1 +1+1+1+1)

On considère l'équation $F(x, y) = 0$, où F est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\begin{cases} F_1(x, y) = x^3 - 3xy^2 - \pi \\ F_2(x, y) = 3yx^2 - y^3 \end{cases}$$

1) On applique dans $\mathbb{R}^2$ la méthode de Newton pour résoudre numériquement cette équation. Exprimer l'itération correspondante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = g(x_k, y_k) \end{cases}$$

On simplifiera au maximum l'expression des fractions rationnelles f et g.

Dans la suite de cet exercice, les calculs numériques seront effectués avec 6 chiffres significatifs.

2) En partant des conditions initiales $x_0 = 3.0$ et $y_0 = 1.0$, calculer (x_k, y_k) pour $k = 1 \ldots 5$.

3) En partant des conditions initiales $x_0 = -2.0$ et $y_0 = 2.0$, calculer (x_k, y_k) pour $k = 1 \ldots 5$.
4) En partant des conditions initiales $x_0 = -2.0$ et $y_0 = -3.0$, calculer (x_k, y_k) pour $k = 1 \ldots 5$.
5) Déterminer analytiquement toutes les solutions de l'équation $F(x, y) = 0$. Conclusion?
6) On utilise les conditions initiales $x_0 = 3.0$ et $y_0 = -3.0$. Vers laquelle de ces solutions semble converger la suite obtenue? Combien d'itérations faut-il effectuer pour obtenir cette solution 10^{-5} près? .

EXERCICE 3 (barème : 2+1+2+2)

Pour x et y dans $\mathbb{R}^n$ on note $(x|y)$ leur produit scalaire canonique. Soit A une matrice carrée d'ordre n, réelle, symétrique et définie positive. Dans le but de résoudre le système linéaire $Ax = b$ où b est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on minimise la quantité positive $E(x) = (A(x - \bar{x})|x - \bar{x})$ où $\bar{x}$ est la solution du système linéaire, à l'aide de la suite :

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \end{cases}$$

où d_k est un vecteur non nul et α_k le scalaire défini par :

$$\alpha_k = -\frac{(r_k|d_k)}{(Ad_k|d_k)}$$

Avec $r_k = Ax_k - b$ le résidu.

1) Montrer que

$$E(x_{k+1}) = E(x_k) - \frac{(r_k|d_k)^2}{(Ad_k|d_k)}$$

2) On écrit cette expression sous la forme $E(x_{k+1}) = E(x_k)(1 - \gamma_k)$. Exprimer γ_k en fonction de r_k, d_k, A et A^{-1}.

3) λ_1 étant la plus grande valeur propre de A et λ_n la plus petite, montrer que l'on a la relation :

$$\gamma_k \geq \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\left(\frac{r_k}{||r_k||}\Big|\frac{d_k}{||d_k||}\right)^2$$

4) On suppose qu'il existe μ tel que pour tout k

$$\left(\frac{r_k}{||r_k||}\Big|\frac{d_k}{||d_k||}\right)^2 \geq \mu > 0$$

montrer que la suite des x_k converge vers $\bar{x}$ quel que soit x_0.

BACCHUS
1A G8

$\frac{10,5}{20}$

Test de calcul scientifique

04/05/20[illegible]

Exercice 1 2,5/5

Pour montrer que le schéma est convergent il suffit de montrer :

- sa stabilité

Ici on a $\phi(t,y,h) = \frac{1}{6}\left(k_1 + 4k_2 + k_3\right)$

Soit $t \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$ $y, z \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$

$|\phi(t,y,h) - \phi(t,z,h)|$

$= \frac{1}{6}\left| f(t,y) + 4 f\left(t+\frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t,y)\right) + f(t+h, y - hk_1 + 2hk_2) - f(t,z) - 4 f\left(t+\frac{h}{2}, z + \frac{h}{2} f(t,z)\right) - f(t+h, z - hk_1 + 2hk_2)\right|$

$\leqslant \frac{1}{6}|f(t,y) - f(t,z)|$
$+ \frac{4}{6}\left|f\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(t,y)\right) - f\left(t+\frac{h}{2}, z+\frac{h}{2}f(t,z)\right)\right|$
$+ \frac{1}{6}\left|f(t+h, y - hk_1 + 2hk_2) - f(t+h, z - hk_1 + 2hk_2)\right|$

Soit A la constante de Lipschitz de f par rapport à y.
d'où :

$\leqslant \frac{1}{6} A |y-z|$
$+ \frac{4}{6} A \left|y + \frac{h}{2} f(t,y) - \left(z + \frac{h}{2} f(t,z)\right)\right|$
$+ \frac{1}{6} A \left|y - hk_1 + 2hk_2 - (z - hk_1 + 2hk_2)\right|$

2

$\leqslant \frac{1}{6} A |y-z| + \frac{4}{6} A |y-z| + \frac{4}{6} A \frac{h}{2} |y-z|$
$+ \frac{1}{6} A |y-z| + \frac{1}{6} A h \left|(k_1 + 2k_2)(t,y) - (k_1 + 2k_2)(t,z)\right|$

$\leqslant A |y-z| + \frac{2}{6} A h |y-z|$
$+ \frac{Ah}{6}\left| f(t,y) + 2 f\left(t+\frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t,y)\right) - f(t,z) - 2 f\left(t+\frac{h}{2}, z + \frac{h}{2} f(t,z)\right)\right|$

$\leqslant A (y-z) + \frac{Ah}{3} |y-z|$
$+ \frac{Ah}{6} A |y-z| + \frac{Ah}{3} A \left|y + \frac{h}{2} f(t,y) - z - \frac{h}{2} f(t,z)\right|$

$\leqslant A\left(1+\frac{h}{3}\right)|y-z| + \frac{A^2h}{6}|y-z| + \frac{A^2h}{3}|y-z| + \frac{A^3h^2}{6}|y-z|$

on si l'on résoud l'équation sur un fermé de ℝ
le pas h est majoré par $M > 0$
où M plus grand que la mesure du fermé.

alors $$\left|\phi(t,y,h) - \phi(t,z,h)\right| < \left(A\left(1+\frac{M}{3}\right) + \frac{A^2M}{2} + \frac{A^3M}{6}\right)|y-z|$$

d'où la stabilité du schéma
car : la constante est indépendante de h.

et – sa consistance

$$\phi(t,y,0) = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)(t,y,0)$$
$$= \frac{1}{6}\left(f(t,y) + 4f(t,y) + f(t,y)\right)$$
$$= f(t,y)$$

Le schéma converge donc

2/ Faisons des développement de Taylor

$$y(t+h) - y(t) = h y' + \frac{h^2}{2} y'' + o(h^2)$$
$$= h f(y,t) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial f}{\partial t}(y,t) + \frac{h^2}{2} y' \frac{\partial f}{\partial y} + o(h^2)$$
$$= h f + \frac{h^2}{2}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial f}{\partial y} f + o(h^2)$$

$$k_1(t,y) = f(t,y)$$
$$k_2(t,y) = f\left(t+\frac{h}{2},\ y + \frac{h}{2} f(t,y)\right)$$
$$= f(t,y) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y} f + o(h)^2$$
$$k_3(t,y) = f(t,y) + h\frac{\partial f}{\partial t} + (-h f + 2hk_2)\frac{\partial f}{\partial y} + o(h)^2$$

$$\left|y(t+h) - y(t) - \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)\right|$$
$$= \left|\cancel{hf} + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \cancel{hf} - \frac{4h^2}{6}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{f}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{h^2}{6}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + (f + k_2)\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right.$$
$$= \left|\frac{h^2}{2}\cancel{\frac{\partial f}{\partial t}} - \frac{h^2}{3}\cancel{\frac{\partial f}{\partial t}} - \frac{h^2}{6}\cancel{\frac{\partial f}{\partial t}} + \frac{h^2}{2} f\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{h^2}{3} f\frac{\partial f}{\partial y}\right.$$
$$\left. - \frac{h^2}{6}\left(-f + 2f + o(1)\right) + o(h^2)\right|$$
$$= o(h^2)$$

Non

$\frac{1}{h}\left(y(t+h) - y(t)\right) - \phi = o(h^2)$

$\left(y(t+h) - y(t)\right) - h\phi = o(h^3)$

La méthode est d'ordre 2 au moins

Exercice 2 : 2/8

$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ +6xy & 3y^2 \end{pmatrix}$$

$3x^2 - 3y^2$ faux

$$\left[F'(x,y)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x^2-y^2}{3(x^4+2x^2y^2+y^4)} & \frac{2xy}{3(x^4+2x^2y^2+y^4)} \\ \frac{-2xy}{3(x^4+2x^2y^2+y^4)} & \frac{x^2-y^2}{3(x^4+2x^2y^2+y^4)} \end{pmatrix}$$

1 avec l'erreur $3y^2$!

$$X^{k+1} = X^k - \left(F'(X^k)\right)^{-1} F(X^k)$$

calculs ?

1/
$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, y_k) = \dfrac{x^5 + 2x^3y^2 - \pi x^2 + xy^4 + \pi y^2}{3(x^4+2x^2y^2+y^4)} \\ y_{k+1} = g(x_k, y_k) = \dfrac{(x^4 + 2x^2y^2 + 2\pi x + y^4)\, y}{3(x^4+2x^2y^2+y^4)} \end{cases}$$

2/
$x_1 = 3,916224$ $\quad y_1 = 0,396165$

$x_2 = 5,155413$ $\quad y_2 = 0,145591$

$x_3 = 6,834578$ $\quad y_3 = 0,050752$

$x_4 = 9,030356$ $\quad y_4 = 0,172503$

$x_5 = 12,107802$ $\quad y_5 = 0,005798$

$\cdot(k)$ Non

6/7

Exercice 3

$$E(x) = \left(A(x - \bar{x}) \mid (x - \bar{x}) \right)$$

1/ $$E(x_{k+1}) = \left(A(x_{k+1} - \bar{x}) \mid (x_{k+1} - \bar{x}) \right)$$

$$= \left(A(x_{k+1} - x_k + x_k - \bar{x}) \mid (x_{k+1} - x_k + x_k - \bar{x}) \right)$$

$$= E(x_k) + \left(A(x_{k+1} - x_k) \mid (x_{k+1} - x_k) \right) + \left(A(x_k - \bar{x}) \mid (x_{k+1} - x_k) \right) + \left(A(x_{k+1} - x_k) \mid (x_k - \bar{x}) \right)$$

A est symétrique ↳

$$= E(x_k) + \left(A(x_{k+1} - x_k) \mid (x_{k+1} - x_k) \right) + 2\left(A(x_{k+1} - x_k) \mid (x_k - \bar{x}) \right)$$

$$= E(x_k) + \left(A\, \alpha_k d_k \mid \alpha_k d_k \right) + 2\left(A\, \alpha_k d_k \mid (x_k - \bar{x}) \right)$$

$$= E(x_k) + \alpha_k^2 (A d_k \mid d_k) + 2\alpha_k (d_k \mid r_k + \cancel{b} - \cancel{b})$$

$\alpha_k = -\dfrac{(r_k \mid d_k)}{(A d_k \mid d_k)}$ ↳

$$= E(x_k) + \frac{(r_k \mid d_k)^2}{(A d_k \mid d_k)} - 2\frac{(r_k \mid d_k)^2}{(A d_k \mid d_k)}$$

$$\underline{E(x_{k+1}) = E(x_k) - \frac{(r_k \mid d_k)^2}{(A d_k \mid d_k)}}$$

2

2/ $$E(x_{k+1}) = E(x_k)(1 - \gamma_k)$$

$$\Rightarrow \cancel{E(x_k)} - \gamma_k E(x_k) = \cancel{E(x_k)} - \frac{(r_k \mid d_k)^2}{(A d_k \mid d_k)}$$

$$\rightarrow \gamma_k = \frac{1}{E(x_k)} \frac{(r_k \mid d_k)^2}{(A d_k \mid d_k)}$$