1 Formulaire des chapitres précédents

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\mathrm{grad}}}^X(\vec{x}) \qquad \mathrm{d}\vec{x} = \underline{\underline{F}}\ \mathrm{d}\vec{X} \qquad J = \det(\underline{\underline{F}}) \underset{\text{p. d.}}{=} 1 + \mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

$$\Theta_V = J - 1 \underset{\text{p. d.}}{=} \mathrm{div}(\vec{u}) = \mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \qquad \mathrm{d}v = J\ \mathrm{d}\mathcal{V}$$

$$\vec{\gamma} = \partial_t\vec{v} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\vec{v}^2) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}^x(\vec{v}) \wedge \vec{v} \qquad \underline{\underline{G}} = \underline{\underline{\mathrm{grad}}}^x(\vec{v}) = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{W}}$$

$$\dot{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{G}}\,\underline{\underline{F}} \qquad \dot{J} = J\mathrm{div}^x(\vec{v}) \qquad \dot{\rho} + \rho\mathrm{div}^x(\vec{v}) = 0 \iff \partial_t\rho + \mathrm{div}^x(\rho\vec{v}) = 0$$

$$\rho(0) = J(t)\rho(t) \qquad \underline{\underline{C}} = {}^t\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}} \qquad \underline{\underline{L}} = \tfrac{1}{2}\left(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{\delta}}\right)$$

$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{\mathrm{grad}}}^X(\vec{u}) \underset{\text{p. d.}}{=} \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\omega}} \qquad \varepsilon_{NN} = \left(\vec{N}\cdot\underline{\underline{C}}\cdot\vec{N}\right)^{1/2} - 1 \underset{\text{p. d.}}{=} \vec{n}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\vec{n}$$

$$\varepsilon_{ii} = \sqrt{C_{ii}} - 1 \qquad \gamma_{NT} = \tfrac{\pi}{2} - \theta_{nt} \underset{\text{p. d.}}{=} 2\vec{N}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\vec{T}$$

$$\sin(\gamma_{NT}) = \frac{2\vec{N}\cdot\underline{\underline{L}}\cdot\vec{N}}{\left(\vec{N}\cdot\underline{\underline{C}}\cdot\vec{N}\times\vec{T}\cdot\underline{\underline{C}}\cdot\vec{T}\right)^{1/2}} \qquad \sin(\gamma_{ij}) = \frac{2L_{ij}}{\sqrt{C_{ii}C_{jj}}} \qquad \underline{\underline{e}} = \underline{\underline{\varepsilon}} - \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{\delta}}$$

2 Contraintes

* $\vec{\sigma}(M,\vec{n}) = \underline{\underline{\sigma}}(M)\cdot\vec{n}$ *i.e.* $\vec{\sigma}(\vec{n}) = \underline{\underline{\sigma}}\cdot\vec{n}$

* $\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{\delta}}$
  $\underline{\underline{s}}$: déviateur des contraintes ; $\underline{\underline{\sigma}}$: partie sphérique, tenseur des contraintes de Cauchy

* **Équations indéfinies du mouvement** : $\rho\gamma_i = \rho b_i + \partial_j\sigma_{ij}$
  i.e. $\boxed{\rho\vec{\gamma} = \rho\vec{b} + \overrightarrow{\mathrm{div}}(\underline{\underline{\sigma}})}$

3 Rhéologie

* $E = \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \qquad \nu = -\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} = -\dfrac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}$

$\implies$ **Loi de Hooke** : $\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}} = \dfrac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \dfrac{\nu}{E}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{\delta}}} \iff \boxed{\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{\delta}}}$

* $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)} \qquad \lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
  $E = \dfrac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}\mu \qquad \nu = \dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$

* Module de cisaillement : $G = \tau_{ij}/\gamma_{ij}$
  Module de compression volumique : $K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)} = \dfrac{\sigma_m}{\Theta_V}$

* Thermo-ÉLI : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{méca}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{th}}$ où $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{th}} = \beta\Delta T\underline{\underline{\delta}}$

* ***Critères de limite élastique*** : $I_1 := \sigma_m \quad J_2 := \mathrm{tr}(\underline{\underline{s}}^2) \quad J_3 := \mathrm{tr}(\underline{\underline{s}}^3)$

  1. **Tresca** : pour les métaux
     $\max\{|\sigma_1 - \sigma_2|,\ |\sigma_2 - \sigma_3|,\ |\sigma_1 - \sigma_3|\} = 2\tau_0$;
  2. **Von Mises** : pour les métaux
     élastique si $\sqrt{J_2} \leq C_m = \text{cste}$ ou encore si $\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2} \leq 3C_m$;
  3. **Mohr-Coulomb** : pour les milieux granulaires
     $\|\vec{\tau}_N\| \leq \tau_{\max} := C - \sigma_{nn}\tan(\varphi)$

* ***Fluides*** :
  — *parfaits* : $\underline{\underline{\sigma}} = -P\underline{\underline{\delta}}$
  — *visqueux* en mouvement : $\underline{\underline{\sigma}} = -P\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\sigma}}^V$
    • *visqueux newtoniens* : $\underline{\underline{\sigma}}^V = 2\eta\underline{\underline{D}} + \xi\mathrm{tr}(\underline{\underline{D}})\underline{\underline{\delta}}$

4 Théorèmes généraux

(Théorème d'Euler)

$$\partial_t(\rho\vec{v}) = \overrightarrow{\operatorname{div}}\left(\underline{\underline{\sigma}} - \rho\vec{v}\otimes\vec{v}\right) + \rho\vec{b}$$

$$\Longleftrightarrow \int_{\mathscr{S}} \underline{\underline{\sigma}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} + \int_{\mathscr{V}} \rho\vec{b}\,\mathrm{d}V = \int_{\mathscr{S}} \rho\vec{v}\times\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} + \int_{\mathscr{V}} \partial_t(\rho\vec{v})\,\mathrm{d}V$$

(Théorème de l'énergie cinétique)

$$\int_{\mathscr{S}} (\underline{\underline{\sigma}}\cdot\vec{v})\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} + \int_{\mathscr{V}} \rho\vec{b}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathscr{V}} \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2\,\mathrm{d}V + \int_{\mathscr{V}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}\,\mathrm{d}V$$

(Théorème des travaux virtuels)

Si :

— $\vec{\gamma} = \vec{0}$ (équilibre stable) ou $\vec{\gamma} \simeq \vec{0}$ (évolution quasi-statique vers un équilibre stable);

— $\vec{\tilde{u}}_{|\mathscr{S}_1} = \vec{0}$ ou $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}\cdot\vec{n} = \underline{\underline{\sigma}}\cdot\vec{n}$ sur $\mathscr{S}_1$

Alors :

$$\int_{\mathscr{V}} \rho\vec{b}\cdot\vec{\tilde{u}}\,\mathrm{d}V + \int_{\mathscr{S}_2} \vec{f}_c\cdot\vec{\tilde{u}}\,\mathrm{d}S + \int_{\mathscr{S}_1} (\underline{\underline{\sigma}}\cdot\vec{\tilde{u}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \int_{\mathscr{V}} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} : \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}\,\mathrm{d}V$$

* ***Cas des fluides*** :

— au repos : $\overrightarrow{\operatorname{grad}}(P) = \rho\vec{b}$

— parfaits : $\overrightarrow{\operatorname{grad}}(P) = \rho(\vec{b} - \vec{\gamma})$
théorème de Bernoulli : si l'écoulement est *permanent* et que $\vec{b}$ *dérive d'un potentiel* U, $\int \frac{\mathrm{d}P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + U = \text{cste}$ sur la ldc
si l'écoulement est en plus *irrotationnel*, l'équation est valable *en tout point du milieu*

— visqueux newtoniens : équation de Navier-Stokes
$$-\overrightarrow{\operatorname{grad}}(P) + (\xi+\eta)\overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}(\vec{v})) + \eta\vec{\Delta}(\vec{v}) + \rho\vec{b} = \rho\vec{\gamma}$$

* ***Cas des solides ÉLI*** :

— équations de Lamé-Navier :
$$(\lambda+\mu)\overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}(\vec{u})) + \mu\vec{\Delta}(\vec{u}) + \rho\vec{b} = \rho\vec{\gamma}$$
ou encore $(\lambda+2\mu)\overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}(\vec{u})) - \mu\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{u})\right) + \rho\vec{b} = \rho\vec{\gamma}$

si le solide est incompressible,
$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_m\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{s}} = \sigma_m\underline{\underline{\delta}} + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\mu\vec{\Delta}(\vec{u}) + \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\sigma_m) + \rho\vec{b} = \rho\vec{\gamma}$

* **Énergie de déformation élastique** : sous les hypothèses du TTV, $\mathscr{E}^{\mathrm{d}} := \int_{\mathscr{V}} \frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}\,\mathrm{d}V = W^{\mathrm{ext}}$

* **Théorème de l'énergie potentielle** : sous les hypothèses du TTV, parmi l'ensemble des champs de déplacements admissibles $\vec{w}$ tels que $\vec{w} = \vec{u}_0$ sur $\mathscr{S}_1$, le champ de déplacement réel $\vec{u}$ du solide ÉLI à l'état d'équilibre final est celui qui minimise la forme quadratique
$\mathscr{T}(\vec{w}) = \int_{\mathscr{V}} \frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}}(\vec{w}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{w})\,\mathrm{d}V - \int_{\mathscr{V}} \rho\vec{b}\cdot\vec{w}\,\mathrm{d}V - \int_{\mathscr{S}_2} \vec{f}_c\cdot\vec{w}\,\mathrm{d}S - \int_{\mathscr{S}_1} (\underline{\underline{\sigma}}\cdot\vec{w})\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$