ENTPE décembre 2015

Résistance des matériaux – Test sujet

Documents autorisés : Polycopiés et notes de cours

Partie I : Choix de résolution (3 pts)

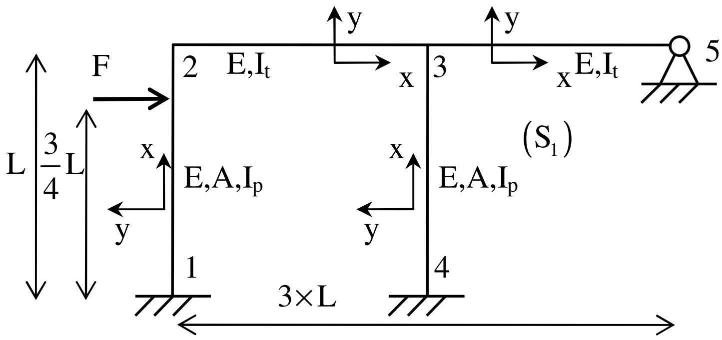
Pour chacun des 3 problèmes suivants, indiquez si possible :

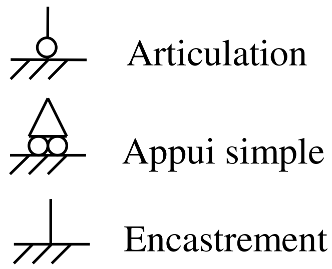
Pour la méthode des forces :

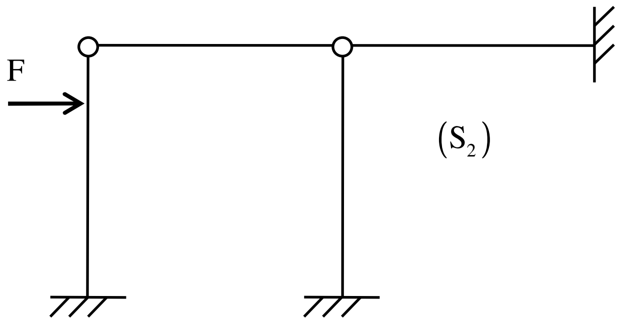
- Les inconnues hyperstatiques
- Une structure isostatique associée
- La définition des équations à mettre en place

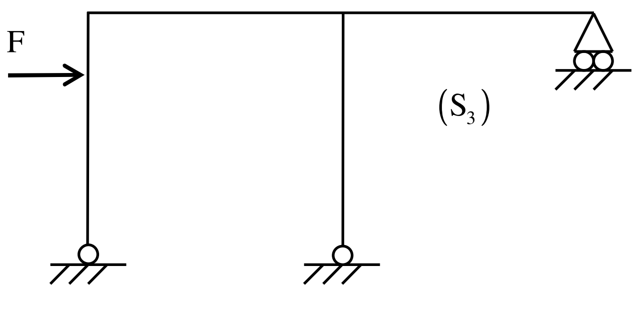
Pour la méthode des rotations :

- Les inconnues cinématiques
- Les équations en fonctions des M_{ij} associées à chaque inconnue



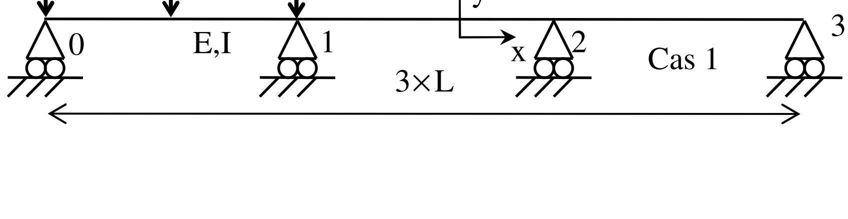


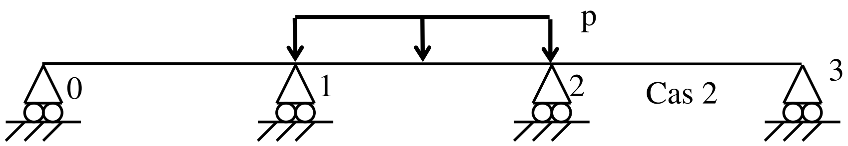


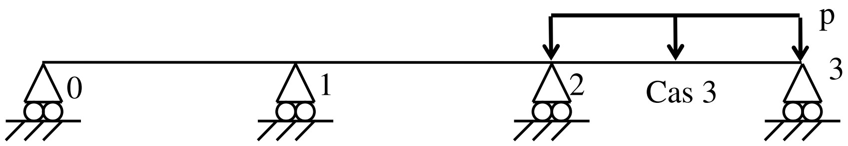


Partie II : Méthode des forces (formule des 3 moments) (7 pts)

Déterminer les sollicitations des problèmes suivants :





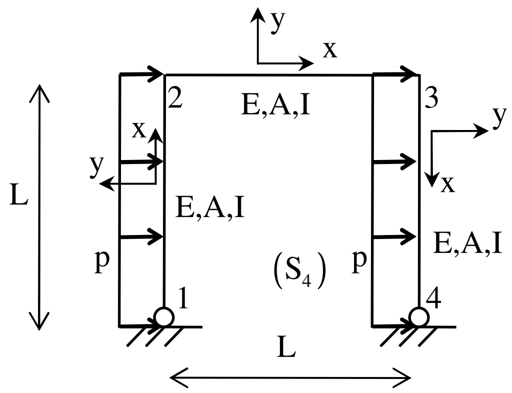


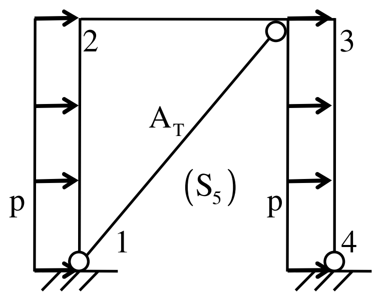
Tracer les sollicitations sur le **Doc. Réponse**
A-t-on des sections où le moment fléchissant est de même signe selon les 3 cas de charge ?

Partie III : Méthode des rotations (7 pts)

Déterminer les sollicitations dans le problème suivant : **Doc Réponse**
Remarque : on pourra au préalable prouver et utiliser $\Omega_2 = \Omega_3$

On montrera que : $M_{21} = M_{34} = \dfrac{pL^2}{2}$ et $M_{23} = M_{32} = -\dfrac{pL^2}{2}$





Que devient la matrice de rigidité global en ajoutant un tirant de section A_T entre 1 et 3 :

Partie IV : Méthode des éléments finis (3 pts)

Etude de la structure (S_4) de la partie III
Répondre entièrement sur le **Doc Réponse**

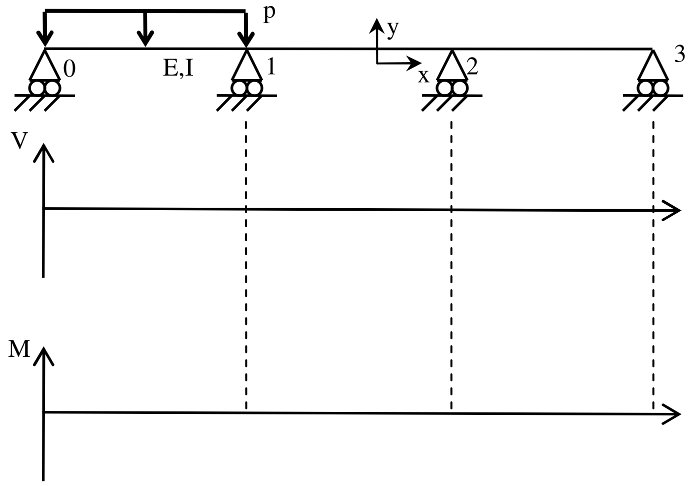
Pourquoi la matrice de rigidité globale comprend beaucoup de zéros ?

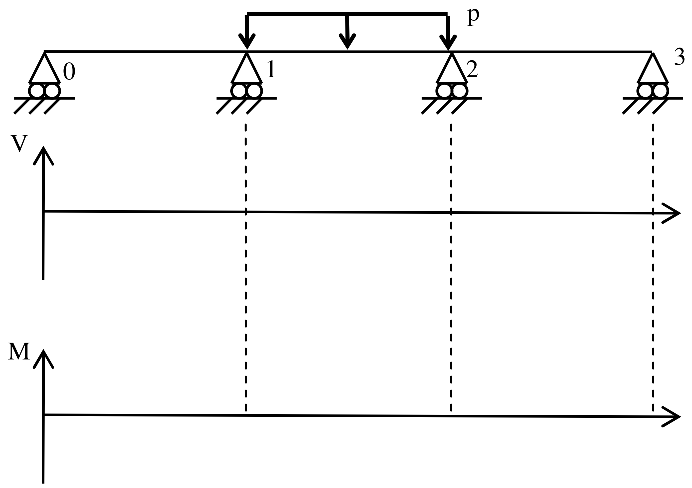
La structure précédente est résolue par un logiciel de calcul des structures basé sur la méthode des éléments finis :
Quelle est la taille de la matrice de rigidité globale pour le système (S_4)
Quelle est la taille de la sous matrice inversible par le système

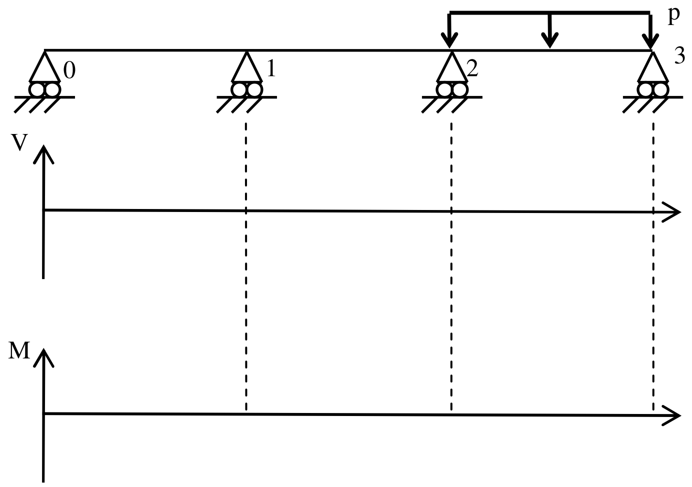
Quand est-ce que la solution EF est la solution réelle du problème ?
Est-ce le cas ici ?

Document réponse :

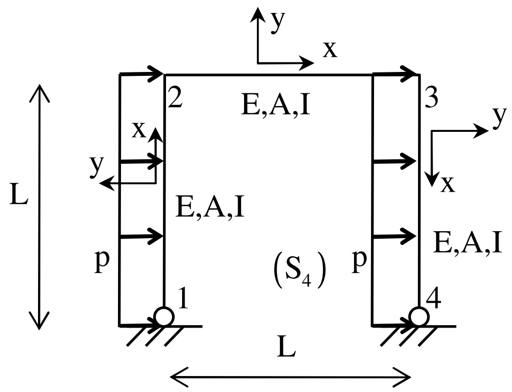
Partie II : Méthode des forces (formule des 3 moments)



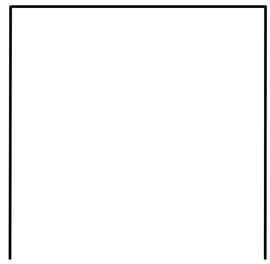




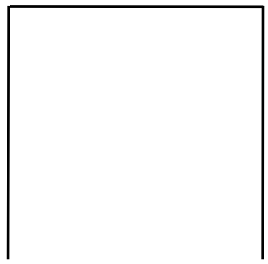
Partie III : Méthode des rotations



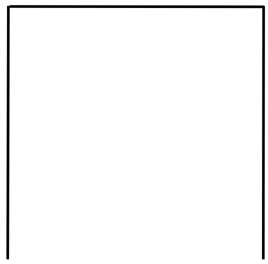
N



V



M



Partie IV : Méthode des éléments finis

Pourquoi la matrice de rigidité globale comprend beaucoup de zéros ?

Quelle est la taille de la matrice de rigidité globale pour le système (S_4)

Quelle est la taille de la sous matrice inversible par le système

Quand est-ce que la solution EF est la solution réelle du problème ?

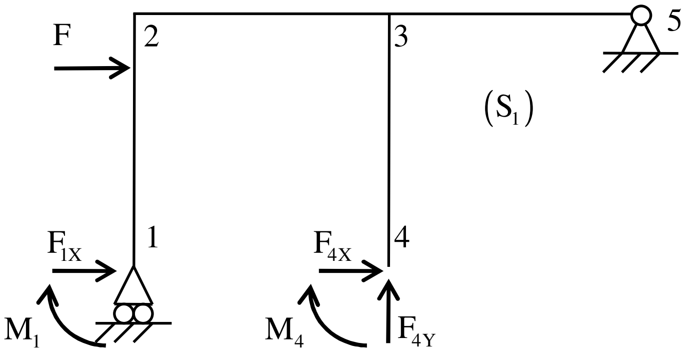
Est-ce le cas ici ?

ENTPE décembre 2014

Résistance des matériaux – Test ***Corrigé***

Partie I : Choix de résolution (3 pts)

Pour la méthode des forces :



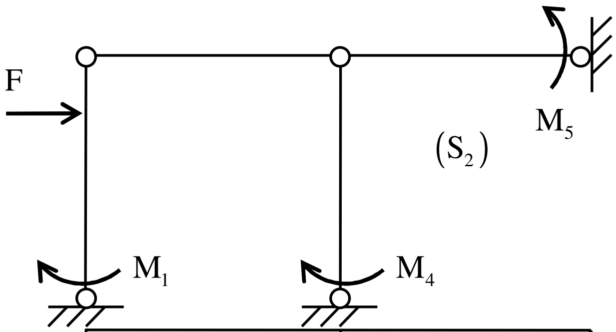
Méthode des forces :
5 inconnues hyperstatiques :

F_{1X}, M_1

F_{4X}, F_{4Y}, M_4

Equations de type cinématique :

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ \Omega_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} U_4 = 0 \\ V_4 = 0 \\ \Omega_4 = 0 \end{cases}$$

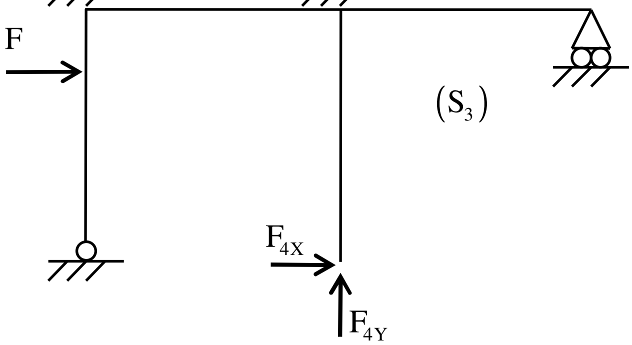


Méthode des forces :
3 inconnues hyperstatiques :

M_1, M_4, M_5

Equations de type cinématique :

$$\begin{cases} \Omega_1 = 0 \\ \Omega_4 = 0 \\ \Omega_5 = 0 \end{cases}$$



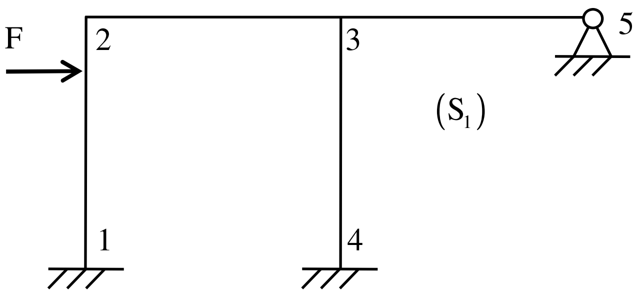
Méthode des forces :
2 inconnues hyperstatiques :

F_{4X}, F_{4Y}

Equations de type cinématique :

$$\begin{cases} U_4 = 0 \\ V_4 = 0 \end{cases}$$

Pour la méthode des rotations :



3 inconnues cinématiques

$\Omega_2, \Omega_3, \Omega_5$

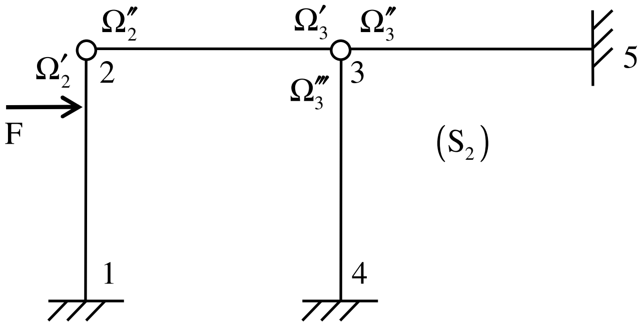
2 après substitution

Ω_2, Ω_3

Equation de type statique :

$$-\frac{W_{ext}^*(\delta\Omega_2^*)}{\delta\Omega_2^*} = 0 \quad \boxed{M_{21} + M_{23} = 0}$$

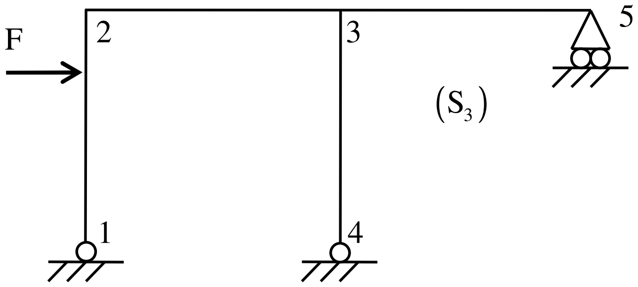
$$-\frac{W_{ext}^*(\delta\Omega_3^*)}{\delta\Omega_3^*} = 0 \quad \boxed{M_{32} + M_{34} + M_{35} = 0}$$



5 inconnues cinématiques

$\Omega_2', \Omega_2'', \Omega_3', \Omega_3'', \Omega_3''',$

0 après substitution



6 inconnues cinématiques

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5, \Omega$

Ω rotation d'ensemble 1-2 et 3-4

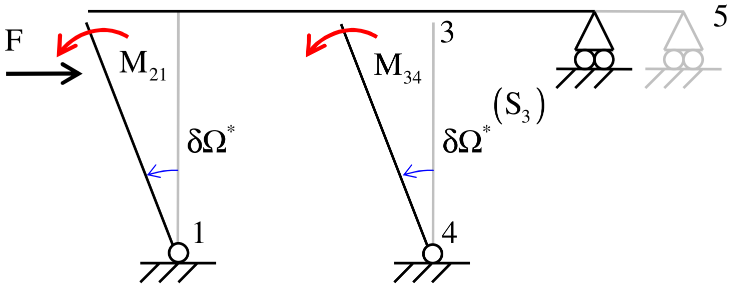
3 après substitution

$\Omega_2, \Omega_3, \Omega$

Equation de type statique :

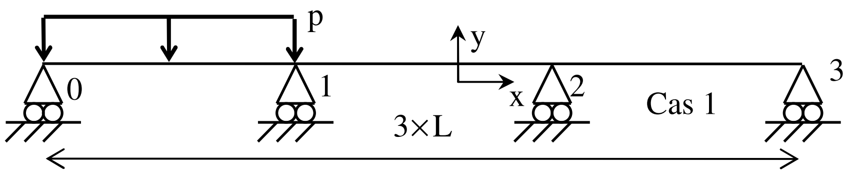
$$-\frac{W^*_{ext}\left(\delta\Omega^*_2\right)}{\delta\Omega^*_2} = 0 \quad \boxed{M_{21} + M_{23} = 0}$$

$$-\frac{W^*_{ext}\left(\delta\Omega^*_3\right)}{\delta\Omega^*_3} = 0 \quad \boxed{M_{32} + M_{34} + M_{35} = 0}$$

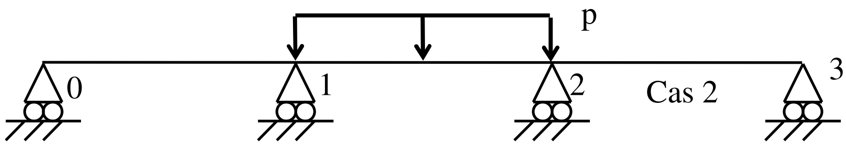


$$-\frac{W^*_{ext}\left(\delta\Omega^*\right)}{\delta\Omega^*} = 0 \quad \boxed{-\left(M_{21} + M_{34}\right) + \frac{3}{4}FL = 0}$$

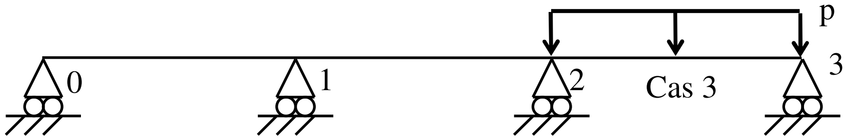
Partie II : Méthode des forces (7 pts)



$$\begin{cases} 4LM_1 + LM_2 = 6EI\left(-\dfrac{pL^3}{24EI}\right) \\ LM_1 + 4LM_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} M_1 = -\dfrac{pL^2}{15} \\ M_2 = \dfrac{pL^2}{60} \end{cases}$$



$$5LM_1 = 6EI\left(-\frac{pL^3}{24EI}\right) \qquad M_1 = M_2 = -\frac{pL^2}{20}$$



Symétrie du Cas 1 : $\begin{cases} M_1 = \dfrac{pL^2}{60} \\ M_2 = -\dfrac{pL^2}{15} \end{cases}$

Etude du signe de M sur la travée 2 Cas 2 :

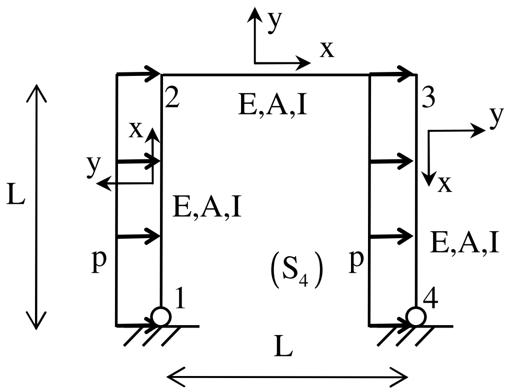
$$M(x) = -\frac{pL^2}{20} + \frac{pL}{2}x - \frac{px^2}{2}$$

$$M(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{L} = 0{,}1127 \text{ ou } 0{,}8873$$

<table>
<tr><td>x/L</td><td>0,1127</td><td>0,2</td><td></td><td>0,8</td><td>0,8873</td></tr>
<tr><td>Cas 1</td><td colspan="4">-</td><td>+</td></tr>
<tr><td>Cas 2</td><td>-</td><td colspan="3">+</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Cas 3</td><td colspan="2">+</td><td colspan="3">-</td></tr>
</table>

La réponse est non

Partie III : Méthode des rotations (7 pts)



Méthode des rotations : 5 inconnues cinématiques

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega$

Ω rotation d'ensemble de la poutre 12 ou 34

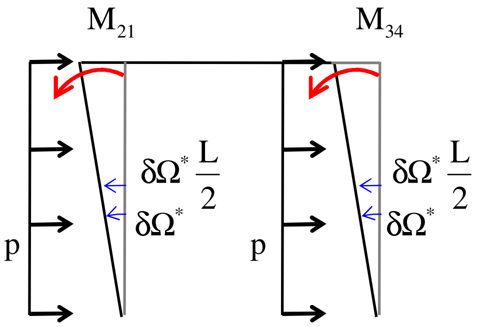
3 après substitution

$\Omega_2, \Omega_3, \Omega$

2 après symétrie

$\Omega_2 = \Omega_3, \Omega$

$$-\frac{W^*_{ext}\left(\delta\Omega^*_2, \delta\Omega^*_3 = \delta\Omega^*_2\right)}{\delta\Omega^*_2} = 0 \qquad \boxed{M_{21} + M_{23} + M_{32} + M_{34} = 0}$$



$$-\frac{W^*_{ext}(\delta\Omega^*)}{\delta\Omega^*}=0 \qquad \boxed{-(M_{21}+M_{34})+2pL\frac{L}{2}=0}$$

Moments aux extrémités :

$$M_{21}(M_{12}=0)=3\frac{EI}{L}\Omega_2-3\frac{EI}{L}\Omega-\frac{pL^2}{8}$$

$$M_{23}=6\frac{EI}{L}\Omega_2 \qquad M_{32}=6\frac{EI}{L}\Omega_2$$

$$M_{34}(M_{43}=0)=3\frac{EI}{L}\Omega_2-3\frac{EI}{L}\Omega-\frac{pL^2}{8}$$

$$\begin{cases}18\frac{EI}{L}\Omega_2-6\frac{EI}{L}\Omega-\frac{pL^2}{4}=0\\ -6\frac{EI}{L}\Omega_2+6\frac{EI}{L}\Omega+\frac{5pL^2}{4}=0\end{cases}$$

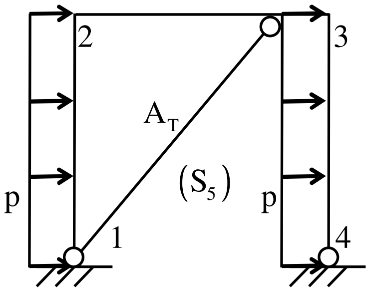
Système linéaire :

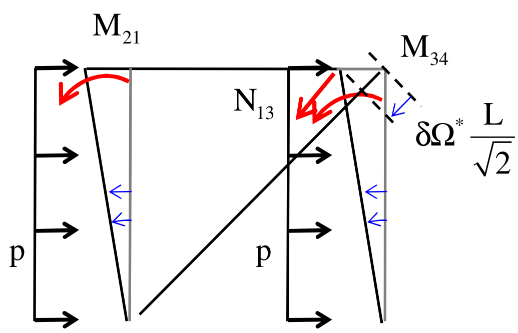
$$6\frac{EI}{L}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Omega_2\\ \Omega\end{bmatrix}=\frac{pL^2}{4}\begin{bmatrix}1\\ -5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\Omega_2\\ \Omega\end{bmatrix}=\frac{pL^3}{48EI}\begin{bmatrix}-4\\ -14\end{bmatrix}=\frac{pL^3}{24EI}\begin{bmatrix}-2\\ -7\end{bmatrix}$$

$$M_{21}=M_{34}=\frac{pL^2}{2} \text{ et } M_{23}=M_{32}=-\frac{pL^2}{2}$$

Avec un tirant entre 1 et 3 :





$$-\frac{W^*_{ext}(\delta\Omega^*)}{\delta\Omega^*}=0 \qquad \boxed{-(M_{21}+M_{34})-N_{13}\frac{L}{\sqrt{2}}+2pL\frac{L}{2}=0}$$

Avec : $N_{13}=-\frac{EA_T}{L}(u_3-u_1)$ $\qquad u_1=0 \qquad u_3=\Omega\frac{L}{\sqrt{2}}$

$$N_{13}=-\frac{EA_T}{\sqrt{2}}\Omega$$

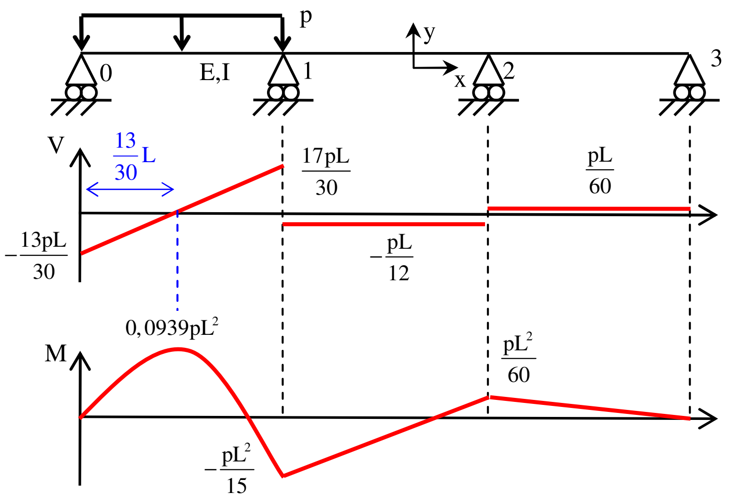
$$\begin{cases} 18\dfrac{EI}{L}\Omega_2 - 6\dfrac{EI}{L}\Omega - \dfrac{pL^2}{4} = 0 \\ -6\dfrac{EI}{L}\Omega_2 + \left(6\dfrac{EI}{L} + \dfrac{EA_T L}{2}\right)\Omega + \dfrac{5pL^2}{4} = 0 \end{cases}$$

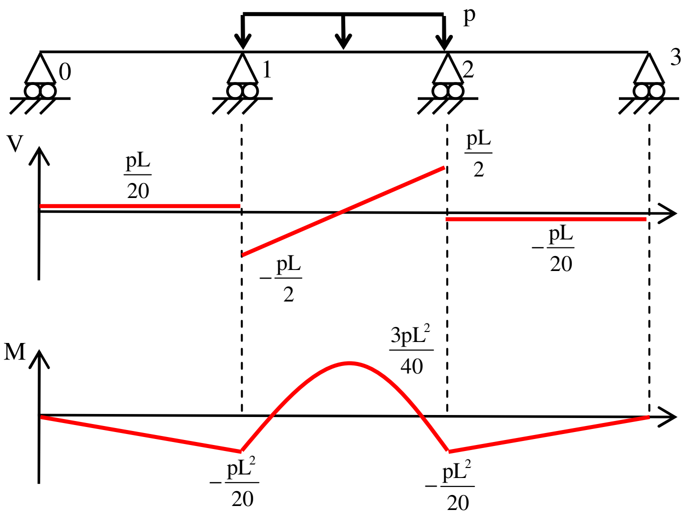
Système linéaire :

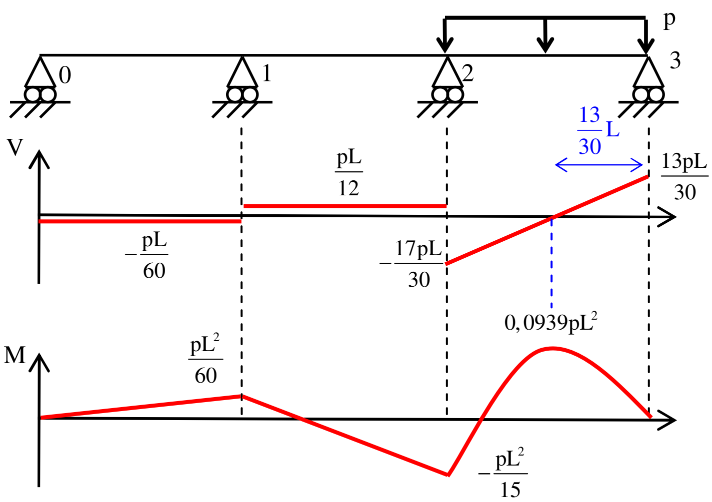
$$\begin{bmatrix} 18\dfrac{EI}{L} & -6\dfrac{EI}{L} \\ -6\dfrac{EI}{L} & 6\dfrac{EI}{L} + \dfrac{EA_T L}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_2 \\ \Omega \end{bmatrix} = \frac{pL^2}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Document réponse :

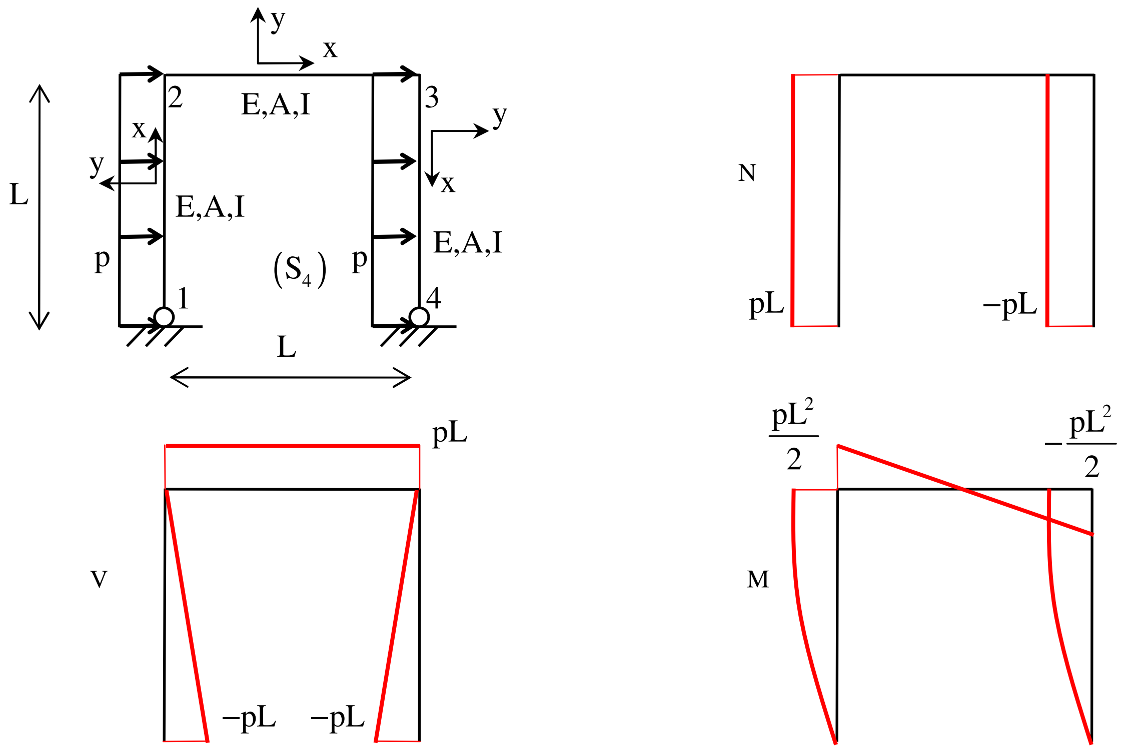
Partie II : Méthode des forces (formule des 3 moments)







Partie III : Méthode des rotations



Partie IV : Méthode des éléments finis

Pourquoi la matrice de rigidité globale comprend beaucoup de zéros ?

Les fonctions de base sont majoritairement disjointes.

La structure précédente est résolue par un logiciel de calcul des structures basé sur la méthode des éléments finis :

Quelle est la taille de la matrice de rigidité globale pour le système (S_4)

12 X 12

Quelle est la taille de la sous matrice inversible par le système

8 X 8

Quand est-ce que la solution EF est la solution réelle du problème ?

Quand la solution exacte est dans l'espace restreint de dimension fini et que le calcul numérique du travail des forces extérieures est exact.

Est-ce le cas ici ?

Non, mais la solution est quand même exacte aux nœuds.