ENTPE novembre 2017

Résistance des matériaux – Test sujet

Documents autorisés : Polycopiés, notes de cours et calculatrice

Partie I : Choix de résolution (3 pts)

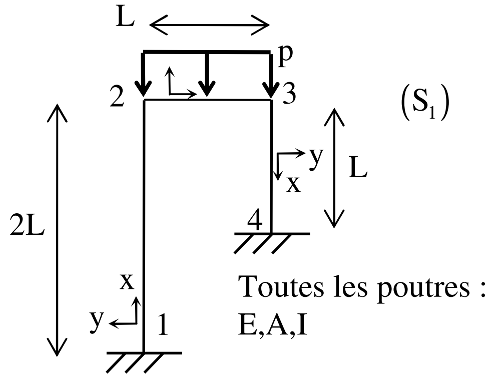
Pour chacun des 3 problèmes suivants, indiquez si possible :

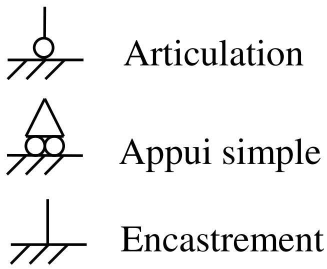
Pour la méthode des forces :

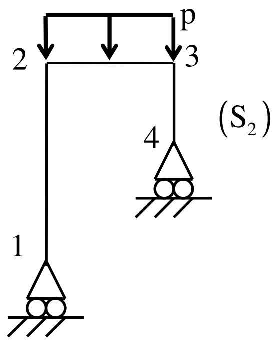
- Les inconnues hyperstatiques
- Une structure isostatique associée
- La définition des équations à mettre en place

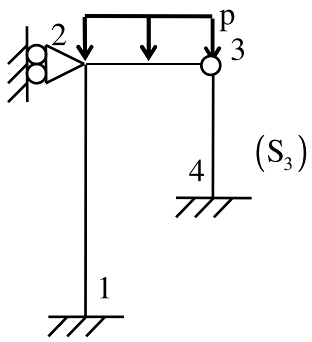
Pour la méthode des rotations :

- Les inconnues cinématiques (on prendra en compte les substitutions issues de $M_{ij} = 0$ ou $M_{ji} = 0$)
- Les équations en fonctions des M_{ij} associées à chaque inconnue









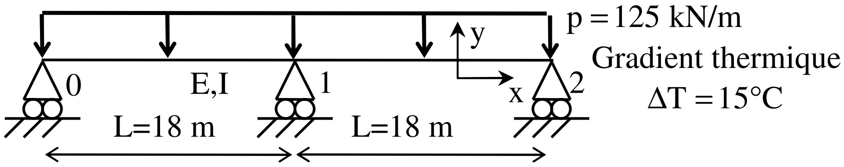
Partie II : Méthode des forces (formule des 3 moments) (6 pts)

Formule des 3 moments

Poutre continue sur 3 appuis de 2 travées identiques L=18 m, soumise à une force répartie et à un gradient de température $\Delta T = 15°C$ (fibres supérieure +7,5°C et inférieure -7,5°C)

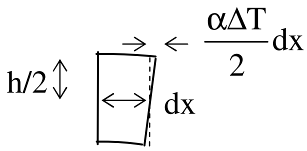
Coefficient de dilatation thermique : $\alpha = 10^{-5} / °C$ $(\varepsilon = \alpha \Delta T)$

Section rectangulaire largeur 10 m $\times$hauteur 0,5 m $E = 35000$ MPa



Gradient thermique :

En étudiant un tronçon de poutre de longueur dx, montrer qu'une poutre droite libre de se déformer a un rayon de courbure :



$R = \frac{h}{\alpha\Delta T}$ (Rappel : $\frac{1}{R} = \frac{d\omega}{dx} = \chi$ Courbure)

En déduire pour une travée isostatique de longueur L_i, les rotations sur appuis : ω_i' et ω_i''

Charge répartie et gradient thermique :

Déterminer le moment de continuité M_1 (on peut utiliser le principe de superposition)

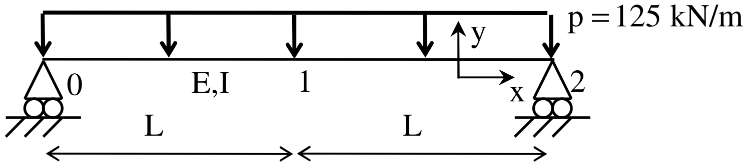
Tracer les sollicitations (à défaut prendre $M_1 = -3422$ kN.m)

En déduire la réaction sous l'appui 1

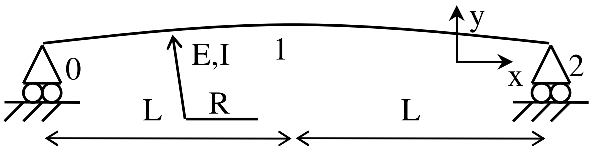
Méthode des forces

Déterminez le déplacement de section 1 sous les cas de charge suivants :

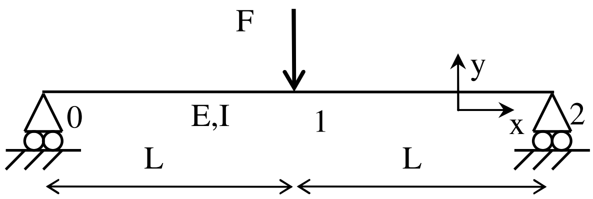
Force répartie :



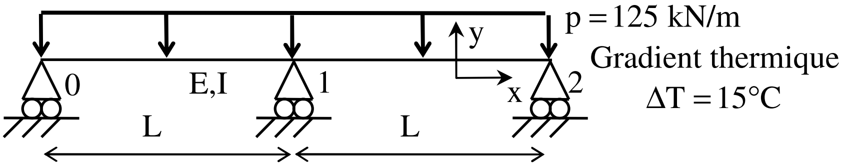
Gradient thermique $\alpha = 10^{-5} / °C$ $\Delta T = 15°C$:



Force ponctuelle :

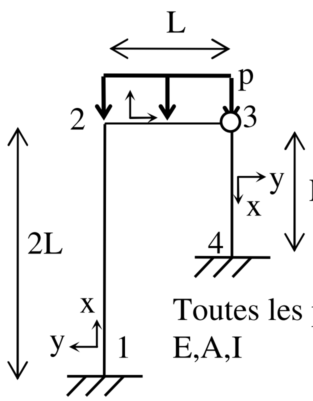


Retrouvez l'action de liaison sous l'appui 1 du problème :



Partie III : Méthode des rotations (8 pts)

Déterminer les sollicitations dans le problème suivant :



Doc Réponse

Remarques :

Le nœud 3 possède 2 rotations :

Ω_3' en considérant la barre 2-3

Ω_3'' en considérant la barre 3-4

Ces inconnues pouvant être substituées $(M_{32} = M_{34} = 0)$

Toutes les poutres : E,A,I

On montrera:

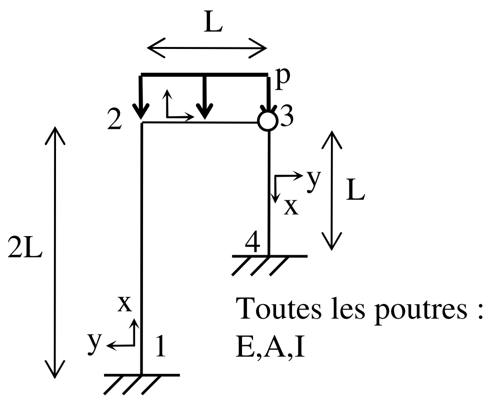
$M_{12} = -0,0139pL^2$ $M_{21} = -M_{23} = -0,0417pL^2$

$M_{43} = 0,0278pL^2$

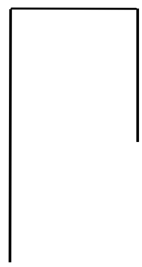
A défaut d'être résolu, le problème sera bien posé

Document Réponse : Nom :

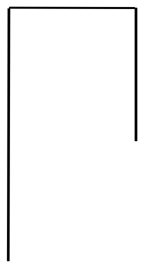
Partie III : Méthode des rotations



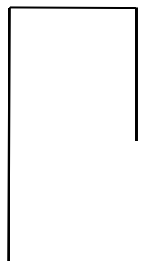
N



V



M



Partie IV : Méthode des éléments finis (3 pts)

<u>Répondre entièrement sur ce **Doc Réponse**</u>

On ne peut pas négliger les déformations d’effort tranchant en éléments finis poutres

La matrice de rigidité globale change-t-elle si on change le cas de charge ?

La matrice de rigidité élémentaire n’est jamais inversible ?

La structure de la partie III est résolue par un logiciel de calcul des structures basé sur la méthode des éléments finis :

Quelle est la taille de la matrice de rigidité globale pour le système

Il y a des termes nuls dans le second membre ?

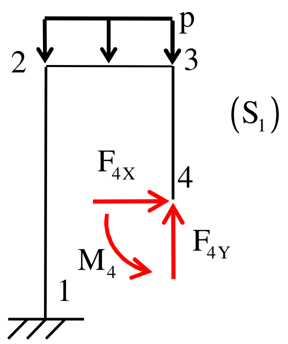
La solution est exacte aux nœuds ?

ENTPE décembre 2014

Résistance des matériaux – Test ***Corrigé***

Partie I : Choix de résolution

Pour la méthode des forces :



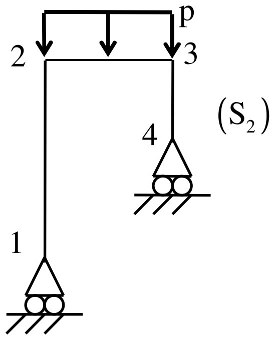
Méthode des forces :

3 inconnues hyperstatiques :

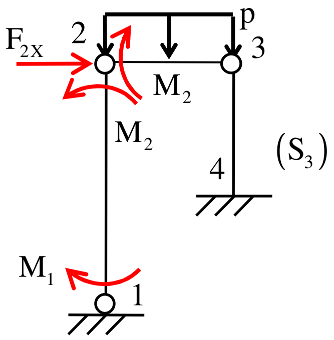
$$F_{4X}, F_{4Y}, M_4$$

Equations de type cinématique :

$$\begin{cases} U_4 = 0 \\ V_4 = 0 \\ \Omega_4 = 0 \end{cases}$$



Mécanisme



Méthode des forces :

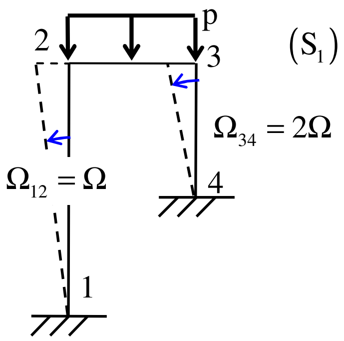
3 inconnues hyperstatiques :

$$F_{2X}, M_1, M_2$$

Equations de type cinématique :

$$\begin{cases} U_2 = 0 \\ \Omega_1 = 0 \\ \Delta\Omega_2 = 0 \end{cases}$$

Pour la méthode des rotations :



3 inconnues cinématiques

$\Omega_2, \Omega_3, U_2 = U_3$ ou

$\Omega_2, \Omega_3, \Omega$

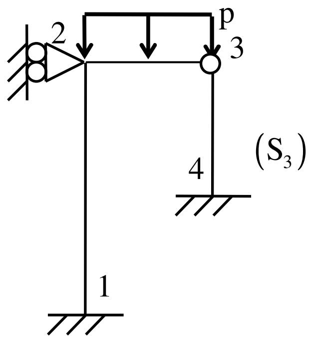
$\Omega_{12} = \Omega$ et $\Omega_{34} = 2\Omega$

Equation de type statique :

$\boxed{M_{21} + M_{23} = 0}$ $\boxed{M_{32} + M_{34} = 0}$

$$-\frac{W^*_{ext}\left(\delta\Omega^*\right)}{\delta\Omega^*} = 0$$

$$\boxed{-\left(M_{12} + M_{21}\right) - 2\left(M_{34} + M_{43}\right) = 0}$$



Nœud 3 :

Barre 2-3 : Ω_3' Barre 3-4 : Ω_3''

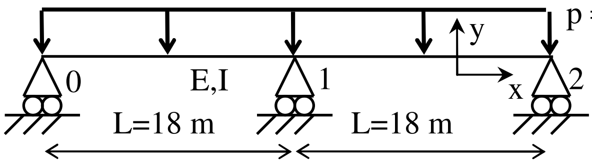
Nœud 2 : Ω_2

Après substitution : Ω_2

$$\boxed{M_{21} + M_{23} = 0}$$

Partie II : Méthode des forces

Formule des 3 moments

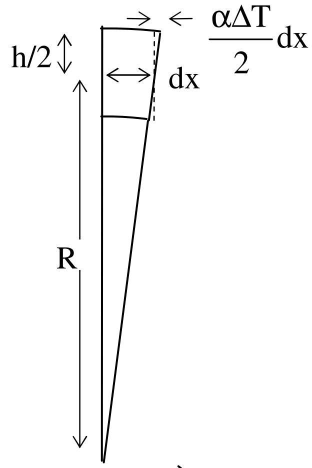


$p = 125$ kN/m

Gradient thermique

$\Delta T = 15°C$

Gradient thermique :



Etude d'un tronçon de poutre de longueur dx

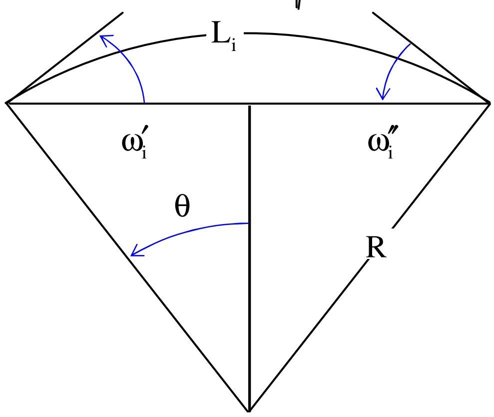
$$\frac{dx}{R} = \frac{\frac{\alpha \Delta T}{2} dx}{\frac{h}{2}}$$

$$\boxed{R = \frac{h}{\alpha \Delta T}}$$

travée isostatique de longueur L_i

$$\omega_i' = -\omega_i'' = \theta = \frac{L_i}{2R} \quad \text{avec} \quad R = \frac{h}{\alpha \Delta T}$$

$$\boxed{\omega_i' = -\omega_i'' = \alpha \Delta T \frac{L_i}{2h}}$$

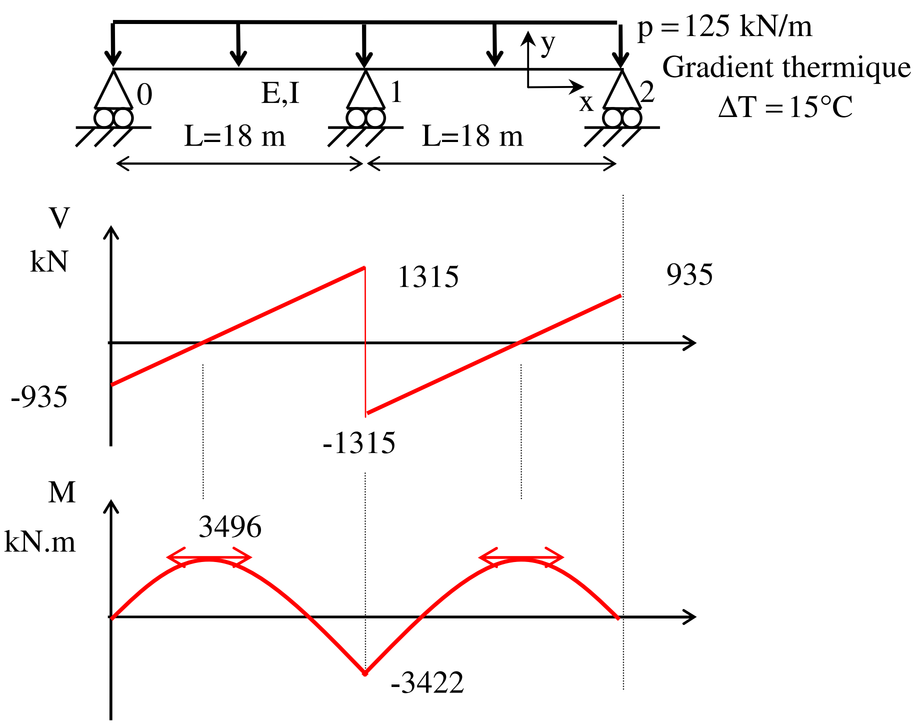


Charge répartie et gradient thermique :

$$4LM_1 = 6EI\left(\alpha \Delta T \frac{L_i}{h} - \frac{pL^3}{12EI}\right)$$

$$M_1 = \frac{3}{2} EI \frac{\alpha \Delta T}{h} - \frac{pL^2}{8}$$

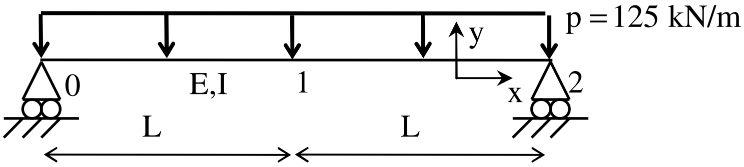
$$M_1 = 1641 - 5063 = -3422 \text{ kN.m}$$



Réaction sous l'appui 1 : 2630 kN

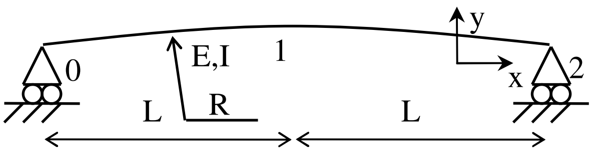
Méthode des forces

Déplacement de section 1 sous les cas de charge suivants :
Force répartie :

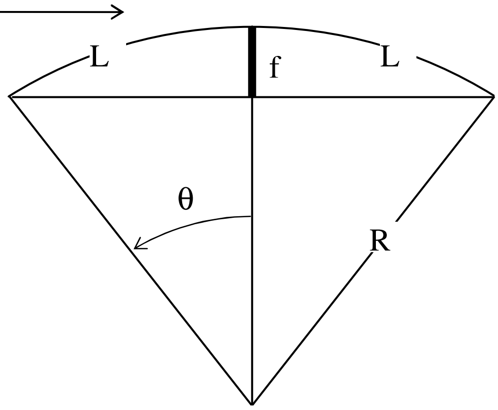


$f_p = \dfrac{5p(2L)^4}{384EI}$ $\qquad$ $f_p = 0,750\ \text{m}$

Gradient thermique $\alpha = 10^{-5}/°C$ $\qquad \Delta T = 15°C$:



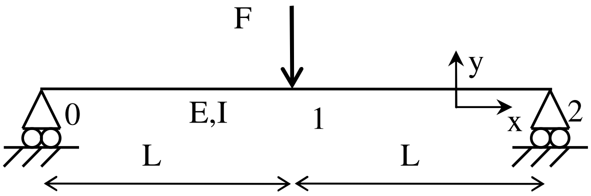
$R = \dfrac{h}{\alpha \Delta T}$ $\qquad$ $R = 3333,3\ \text{m}$



$L = R\theta$
$\theta = 0,0054\ \text{rd}$

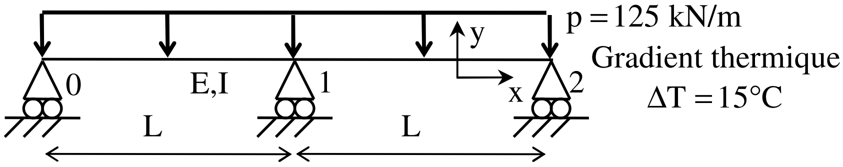
$f_T = R(1 - \cos\theta)$ $\qquad$ $f_T = 0,049\ \text{m}$

Force ponctuelle :



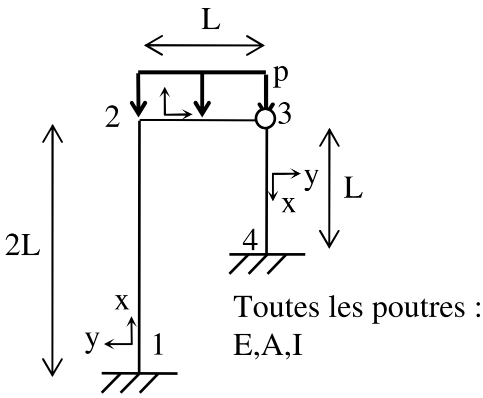
$$f_F = \frac{F(2L)^3}{48EI} \qquad\qquad f_F = 2{,}67.10^{-7}F$$

Action de liaison sous l'appui 1 du problème :



$$f_F = f_p - f_T \qquad\qquad F = 2630 \text{ kN}$$

Partie III : Méthode des rotations



barre 1-2 $\Omega_1 = 0, \Omega_2$ barre 2-3 Ω_2, Ω_3' barre 3-4 $\Omega_3'', \Omega_4 = 0$

Rotations d'ensemble : $\Omega_{12} = \Omega$ $\Omega_{23} = 0$ $\Omega_{34} = 2\Omega$

$$M_{12} = \frac{EI}{L}\Omega_2 - \frac{3EI}{L}\Omega \qquad\qquad M_{21} = \frac{2EI}{L}\Omega_2 - \frac{3EI}{L}\Omega$$

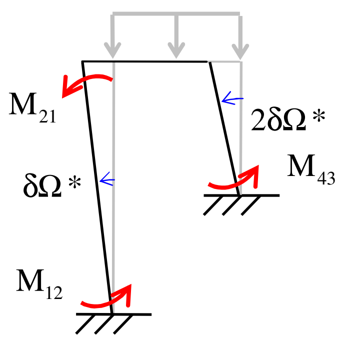
$$M_{23} = \frac{3EI}{L}\Omega_2 + \frac{pL^2}{8} \qquad\qquad M_{32} = 0$$

$$M_{34} = 0 \qquad\qquad M_{43} = -\frac{6EI}{L}\Omega$$

Equation relative à Ω_2 :

$$\boxed{M_{21} + M_{23} = 0}$$

Equation relative à Ω :



$$M_{12}\delta\Omega^* + M_{43}2\delta\Omega^* = 0$$

$$\boxed{-\left(M_{12}+M_{21}\right)-2M_{43}=0}$$

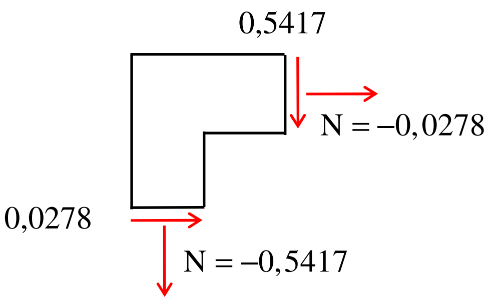
Système linéaire :

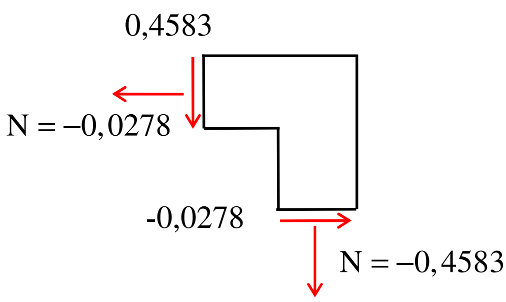
$$\begin{cases} 5\Omega_2 - 3\Omega + \dfrac{pL^3}{8EI} = 0 \\ -3\Omega_2 + 18\Omega = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega_2 = -\dfrac{pL^3}{36EI} \\ \Omega = -\dfrac{pL^3}{216EI} \end{cases}$$

$M_{12} = -\dfrac{pL^2}{72}$ $\qquad$ $M_{21} = -\dfrac{pL^2}{24}$

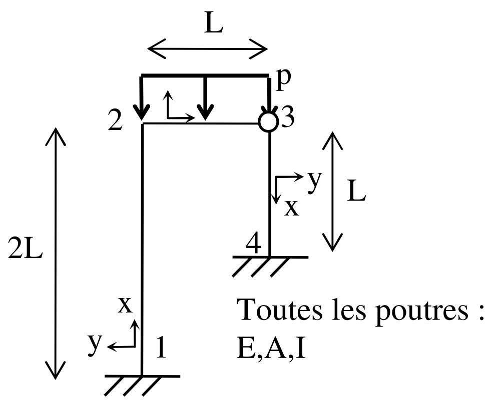
$M_{23} = \dfrac{pL^2}{24}$ $\qquad$ $M_{43} = \dfrac{pL^2}{36}$

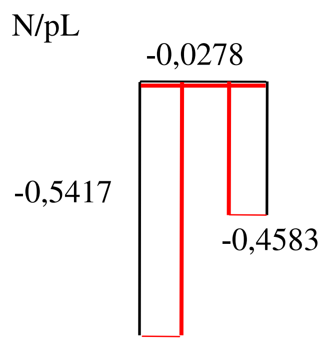


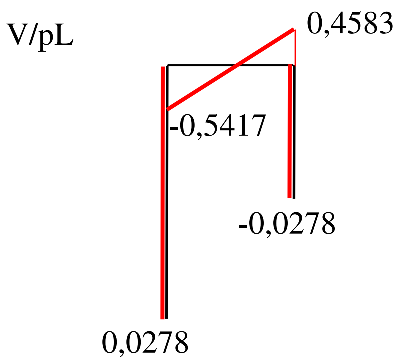


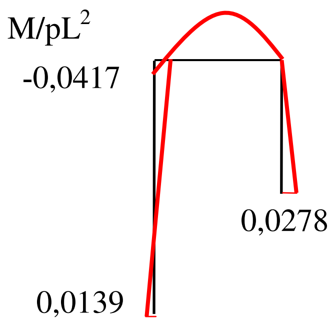
Document Réponse :

Partie III : Méthode des rotations









Partie IV : Méthode des éléments finis

<u>Répondre entièrement sur ce **Doc Réponse**</u>
On ne peut pas négliger les déformations d'effort tranchant en éléments finis poutres
Faux : modèle de Bernoulli ou Timoshenko

La matrice de rigidité globale change-t-elle si on change le cas de charge ?
Faux

La matrice de rigidité élémentaire n'est jamais inversible ?
Vrai car à un mouvement de solide rigide non nul on a des efforts nuls

La structure de la partie III est résolue par un logiciel de calcul des structures basé sur la méthode des éléments finis :
Quelle est la taille de la matrice de rigidité globale pour le système
Matrice 12x12 (3 par noeuds en 2D)

Il y a des termes nuls dans le second membre ?
Oui, il y a des barres non chargés avec des nœuds non chargés

La solution est exacte aux nœuds ?
Vrai c'est spécifique aux éléments finis poutres