ENTPE décembre 2014

Résistance des matériaux – Test ***sujet***

Documents autorisés : Polycopiés et notes de cours

Partie I : Choix de résolution (3 pts)

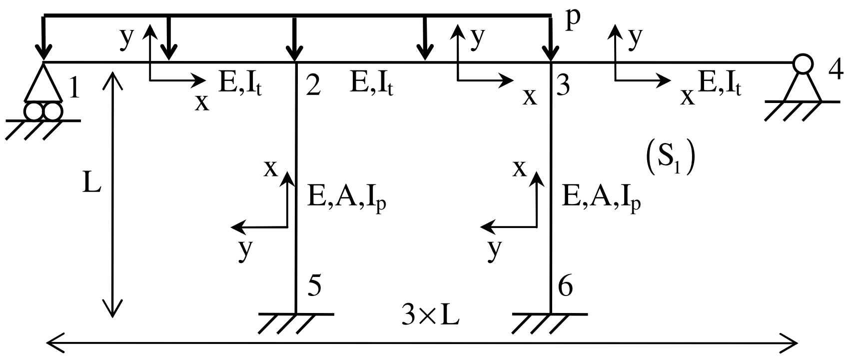
Pour chacun des 3 problèmes suivants, indiquez si possible :

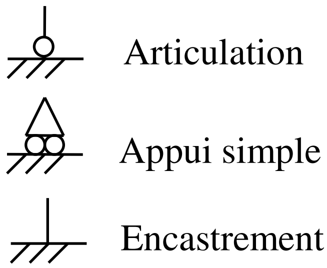
Pour la méthode des forces :

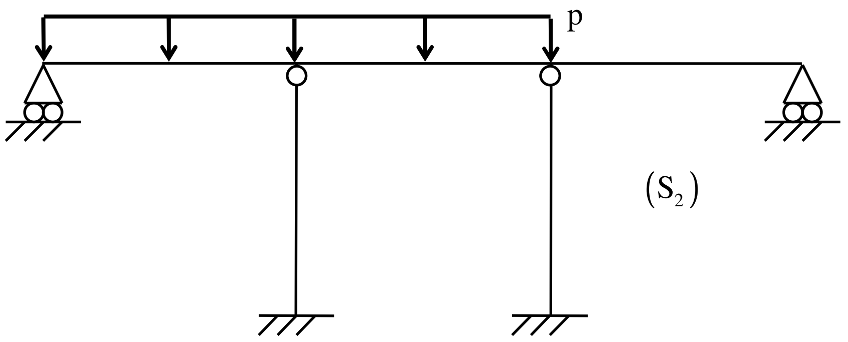
- Les inconnues hyperstatiques
- Une structure isostatique associée
- La définition des équations à mettre en place

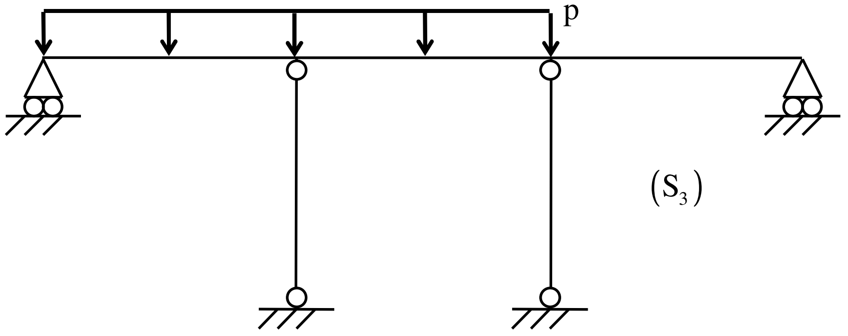
Pour la méthode des rotations :

- Les inconnues cinématiques
- Les équations en fonctions des M_{ij} associées à chaque inconnue



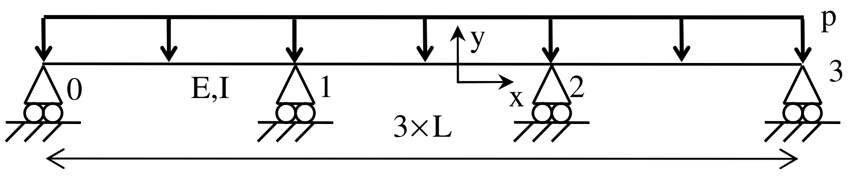




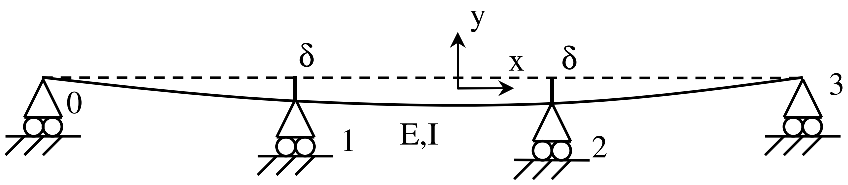


Partie II : Méthode des forces (formule des 3 moments) (7 pts)

Déterminer les sollicitations du problème suivant : (cas p) **Doc. Réponse**



Déterminer les sollicitations dues à une dénivellation des appuis 1 et 2 : (cas δ) **Doc. Réponse**



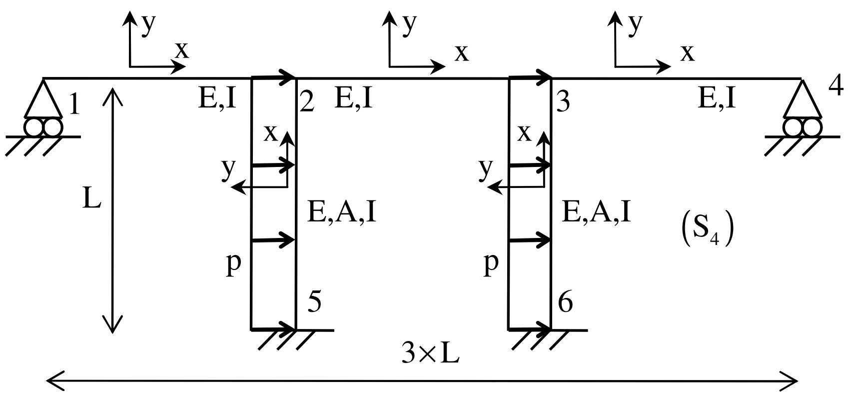
En déduire les réactions d'appui sous la combinaison (cas p) + (cas δ)

Déterminer la valeur minimum δ_{min} pour laquelle les moments fléchissants sont toujours positifs sous la combinaison (cas p) + (cas δ)

Tracer les sollicitations correspondantes : (cas p) + (cas δ_{min})**Doc. Réponse**
Les réactions d'appuis sont-elles toujours vers le haut ?

Partie III : Méthode des rotations (7 pts)

Déterminer les sollicitations dans le problème suivant : **Doc Réponse**
Remarque : on pourra au préalable prouver et utiliser $\Omega_2 = \Omega_3$



Partie IV : Méthode des éléments finis (3 pts)

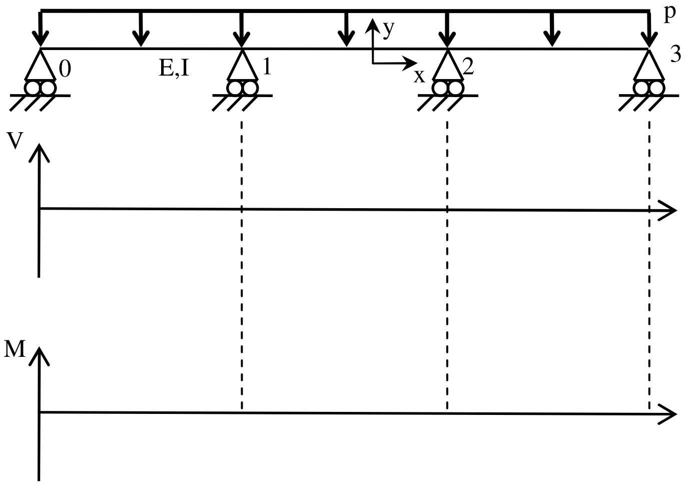
Répondre entièrement sur le **Doc Réponse**

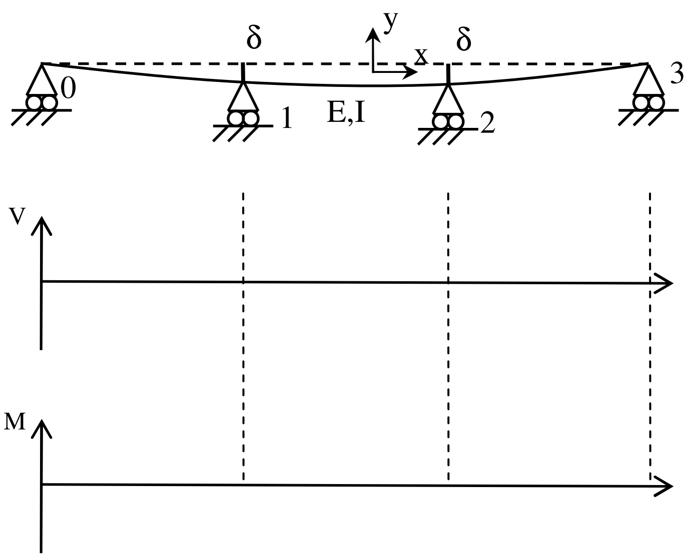
Quelle est la taille de la matrice de rigidité élémentaire d'un élément poutre pour des problèmes en 3D

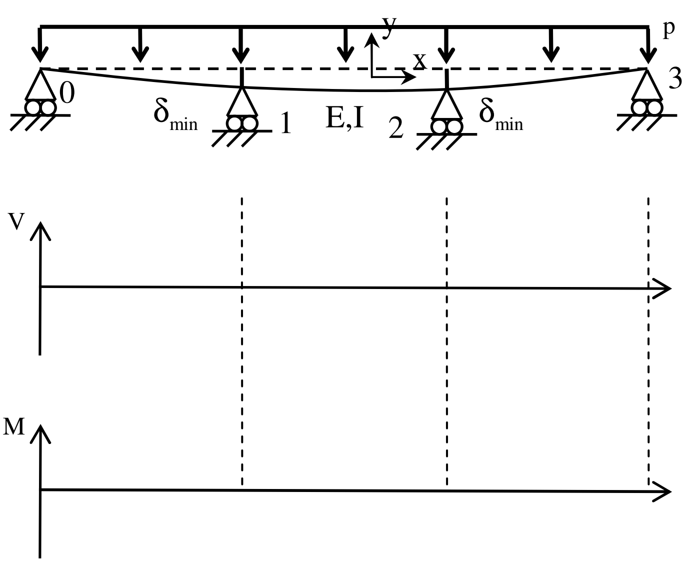
La structure précédente est résolue par un logiciel de calcul des structures basé sur la méthode des éléments finis :
Quelle est la taille de la matrice de rigidité globale pour le système (S_4)
Quelle est la taille de la sous matrice inversible par le système
Comment change la matrice de rigidité globale si la force répartie est remplacée par une force concentrée globalement équivalente horizontale 2pL appliquée au milieu de la poutre 2-3
Indiquez dans les deux cas le second membre mis en place après l'assemblage

Document réponse :

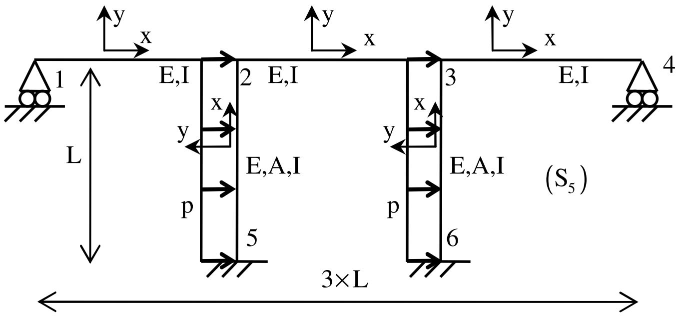
Partie II : Méthode des forces (formule des 3 moments)

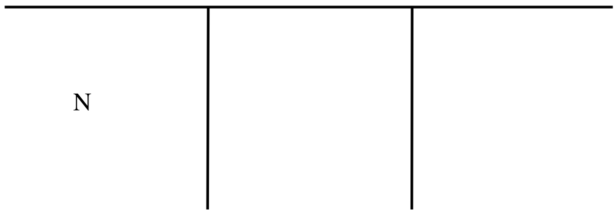


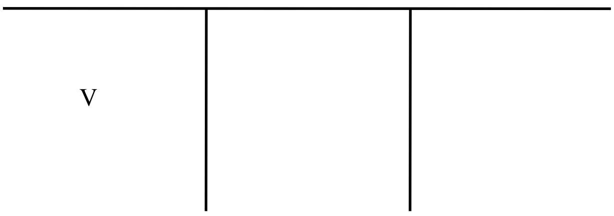


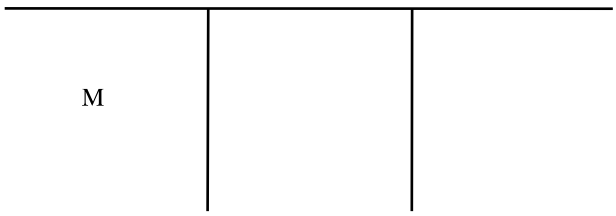


Partie III : Méthode des rotations









Partie IV : Méthode des éléments finis

Taille de la matrice de rigidité élémentaire d'un élément poutre pour des problèmes en 3D

Taille de la matrice de rigidité globale pour le système (S_4)

Taille de la matrice inversée par le système

Comment change la matrice de rigidité globale si la force répartie est remplacée par une force concentrée globalement équivalente

Indiquez dans les deux cas le second membre mis en place après l'assemblage

Cas : force répartie

$$\begin{bmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \end{bmatrix}$$

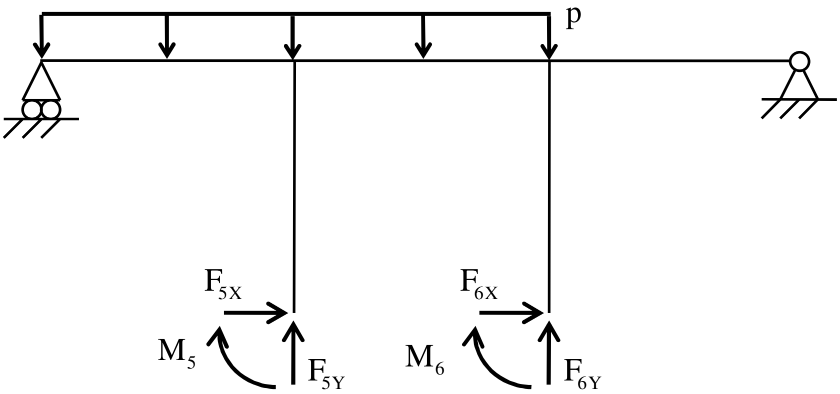
Cas : force ponctuelle

$$\begin{bmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \end{bmatrix}$$

Partie I : Choix de résolution (3 pts)

Pour la méthode des forces :

Structure (S_1)



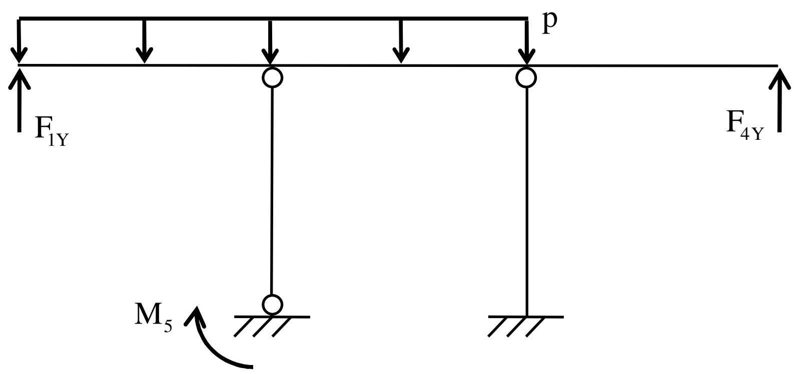
Méthode des forces : 6 inconnues hyperstatiques :

$$F_{5X}, F_{5Y}, M_5$$
$$F_{6X}, F_{6Y}, M_6$$

Equations de type cinématique :

$$\begin{cases} U_5 = 0 \\ V_5 = 0 \\ \Omega_5 = 0 \end{cases} \begin{cases} U_6 = 0 \\ V_6 = 0 \\ \Omega_6 = 0 \end{cases}$$

Structure (S_2)



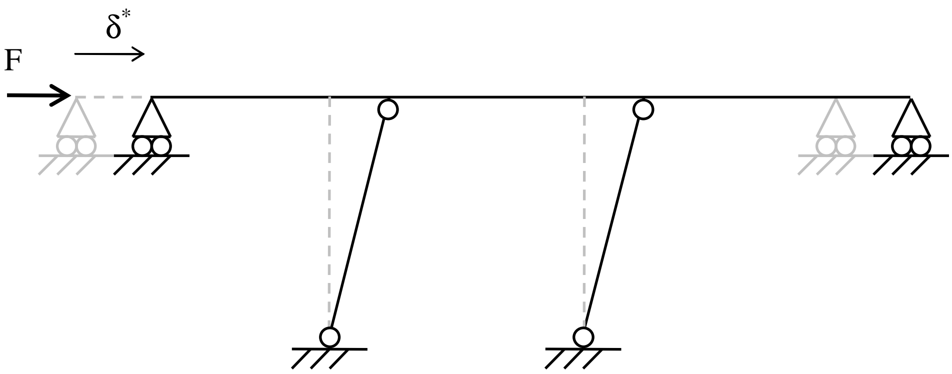
Méthode des forces : 3 inconnues hyperstatiques :

$$F_{1Y}, F_{4Y}, M_5$$

Equations de type cinématique :

$$\begin{cases} V_1 = 0 \\ V_4 = 0 \\ \Omega_5 = 0 \end{cases}$$

Structure (S_3)



PTV :

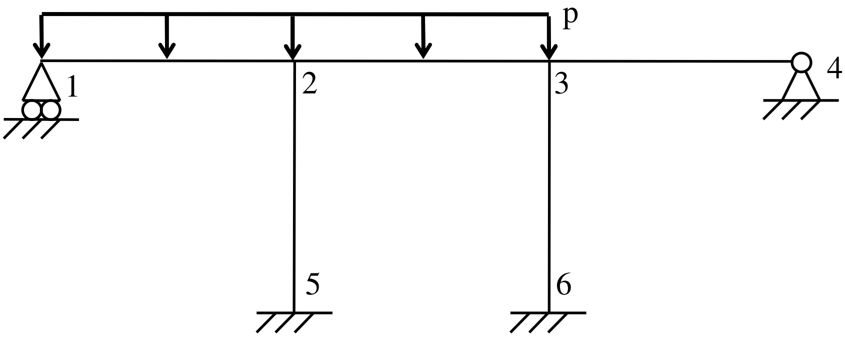
$F.\delta^* = 0$

Equation statique impossible :

Mécanisme

Pour la méthode des rotations :

Structure (S_1)



4 inconnues cinématiques

$\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_4$

2 après substitution

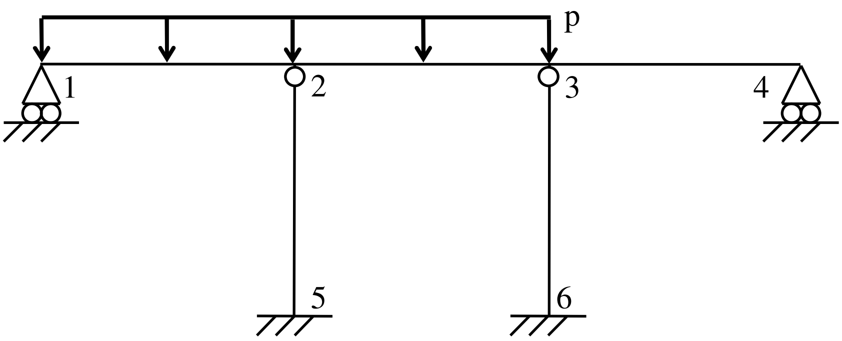
Ω_2,Ω_3

Equation de type statique :

$$-\frac{W^*_{ext}\left(\delta\Omega^*_2\right)}{\delta\Omega^*_2}=0 \qquad \boxed{M_{21}+M_{23}+M_{25}=0}$$

$$-\frac{W^*_{ext}\left(\delta\Omega^*_3\right)}{\delta\Omega^*_3}=0 \qquad \boxed{M_{32}+M_{34}+M_{36}=0}$$

Structure (S_2)



7 inconnues cinématiques

$\Omega_1,\Omega_2^-,\Omega_2^+,\Omega_3^-,\Omega_3^+,\Omega_4,\Omega$

Ω rotation d'ensemble de la poutre 52 ou 63

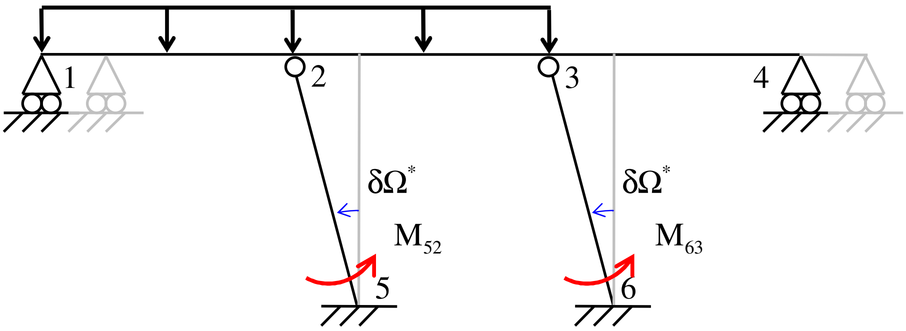
3 après substitution

$\Omega_2^+,\Omega_3^+,\Omega$

Equation de type statique :

$$-\frac{W^*_{ext}\left(\delta\Omega^{+*}_2\right)}{\delta\Omega^{+*}_2}=0 \qquad \boxed{M_{21}+M_{23}=0}$$

$$-\frac{W^*_{ext}\left(\delta\Omega^{+*}_3\right)}{\delta\Omega^{+*}_3}=0 \qquad \boxed{M_{32}+M_{34}=0}$$

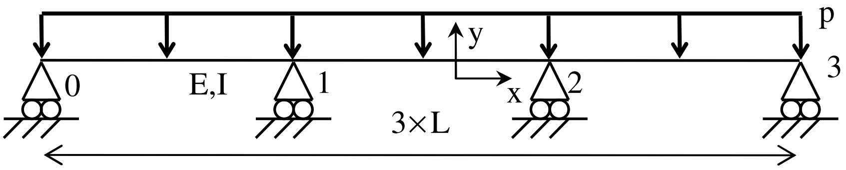


$$-\frac{W^*_{ext}\left(\delta\Omega^*\right)}{\delta\Omega^*}=0$$

$$\boxed{-\left(M_{52}+M_{63}\right)=0}$$

Partie II : Méthode des forces (7 pts)

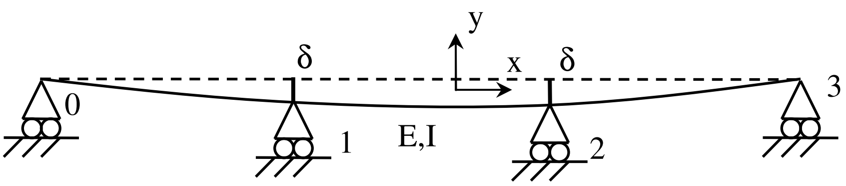
Cas p



$$4LM_1+LM_2=6EI\left(-\frac{pL^3}{24EI}-\frac{pL^3}{24EI}\right) \qquad \text{avec } M_1=M_2$$

$$M_1=M_2=-\frac{pL^2}{10}$$

Cas δ



$$4LM_1+LM_2=6EI\left(0+\frac{\delta}{L}\right) \qquad \text{avec } M_1=M_2$$

$$M_1=M_2=\frac{6EI}{5L^2}\delta$$

Réactions d'appui sous la combinaison (cas p) + (cas δ) :

Nœuds 0 et 3 : $\frac{4}{10}pL+\frac{6EI}{5L^3}\delta$ Nœuds 1 et 2 : $\frac{11}{10}pL-\frac{6EI}{5L^3}\delta$

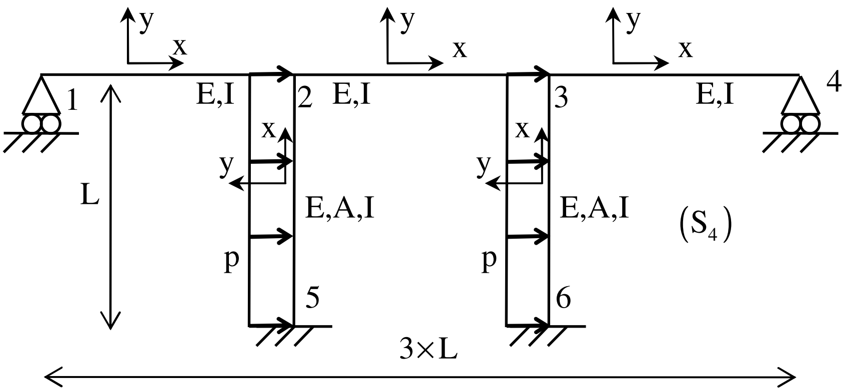
Moments fléchissants toujours positifs équivaut à $\frac{6EI}{5L^2}\delta-\frac{pL^2}{10}\geq 0$

$$\delta_{min}=\frac{pL^4}{12EI}$$

Sollicitations correspondantes : (cas p) + (cas δ_{min})**Doc. Réponse**

Les actions de liaison sont toutes verticales ascendantes

Partie III : Méthode des rotations (7 pts)



5 inconnues cinématiques

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega$

Ω rotation d'ensemble de la poutre 52 ou 63

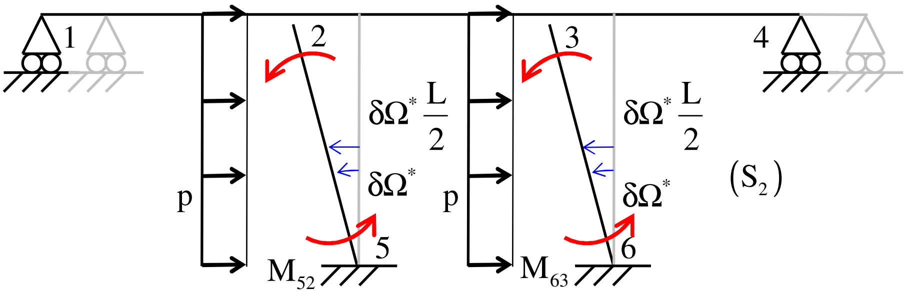
3 après substitution

$\Omega_2, \Omega_3, \Omega$

2 après symétrie

$\Omega_2 = \Omega_3, \Omega$

$$-\frac{W^*_{ext}\left(\delta\Omega^*_2, \delta\Omega^*_3 = \delta\Omega^*_2\right)}{\delta\Omega^*_2} = 0 \qquad \boxed{M_{21} + M_{23} + M_{25} + M_{32} + M_{34} + M_{36} = 0}$$



$$-\frac{W^*_{ext}\left(\delta\Omega^*\right)}{\delta\Omega^*} = 0 \qquad \boxed{-\left(M_{25} + M_{52} + M_{36} + M_{63}\right) + 2pL\frac{L}{2} = 0}$$

Moments aux extrémités :

$$M_{21}(M_{12} = 0) = 3\frac{EI}{L}\Omega_2$$

$$M_{23} = 6\frac{EI}{L}\Omega_2 \qquad M_{32} = 6\frac{EI}{L}\Omega_2$$

$$M_{34}(M_{43} = 0) = 3\frac{EI}{L}\Omega_2$$

$$M_{52} = 2\frac{EI}{L}\Omega_2 - 6\frac{EI}{L}\Omega + \frac{pL^2}{12} \qquad M_{25} = 4\frac{EI}{L}\Omega_2 - 6\frac{EI}{L}\Omega - \frac{pL^2}{12}$$

$$M_{63} = 2\frac{EI}{L}\Omega_2 - 6\frac{EI}{L}\Omega + \frac{pL^2}{12} \qquad M_{36} = 4\frac{EI}{L}\Omega_2 - 6\frac{EI}{L}\Omega - \frac{pL^2}{12}$$

Système linéaire :

$$\frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 26 & -12 \\ -12 & 24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Omega_2 \\ \Omega \end{bmatrix} = \frac{pL^2}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_2 \\ \Omega \end{bmatrix} = \frac{pL^3}{60EI}\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = -\frac{pL^2}{20}$$

$$M_{23} = -\frac{pL^2}{10} \qquad M_{32} = -\frac{pL^2}{10}$$

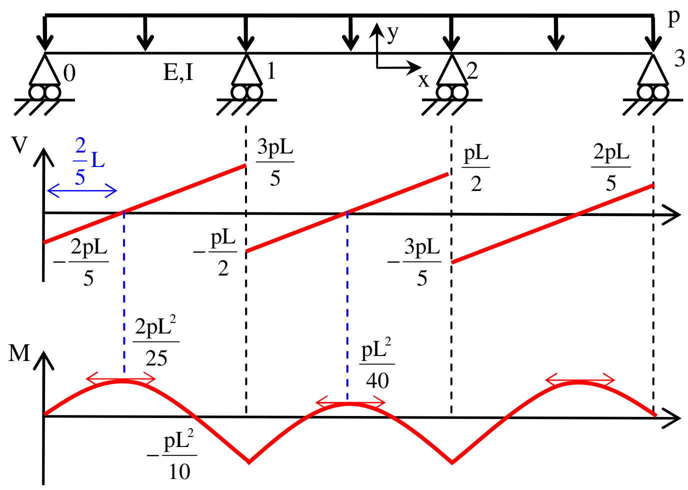
$$M_{34} = -\frac{pL^2}{20}$$

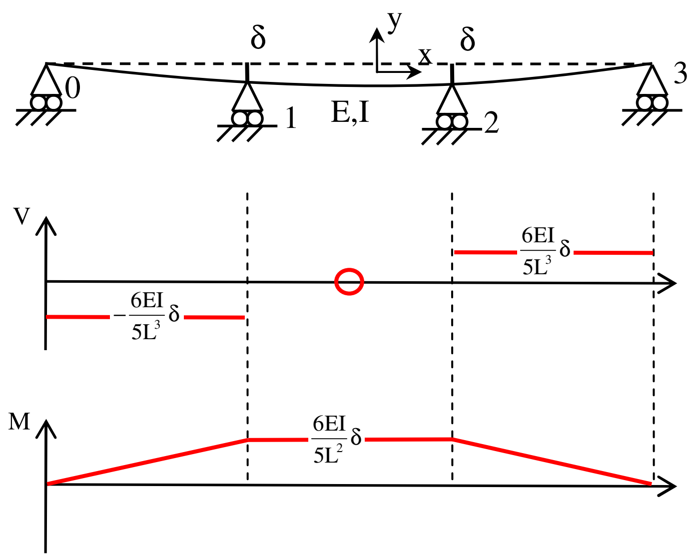
$$M_{52} = \frac{7pL^2}{20} \qquad M_{25} = \frac{3pL^2}{20}$$

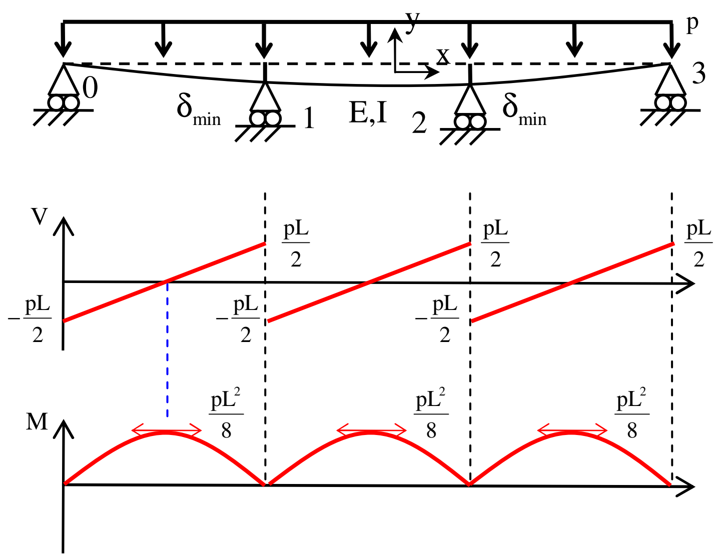
$$M_{63} = \frac{7pL^2}{20} \qquad M_{36} = \frac{3pL^2}{20}$$

Document réponse :

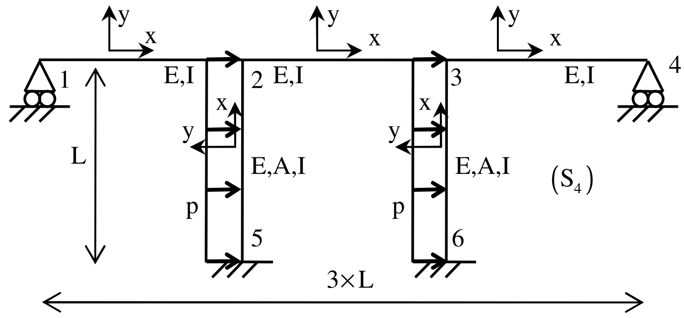
Partie II : Méthode des forces (formule des 3 moments)

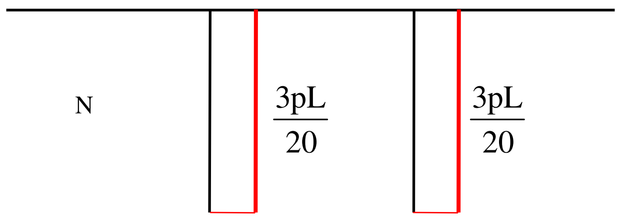


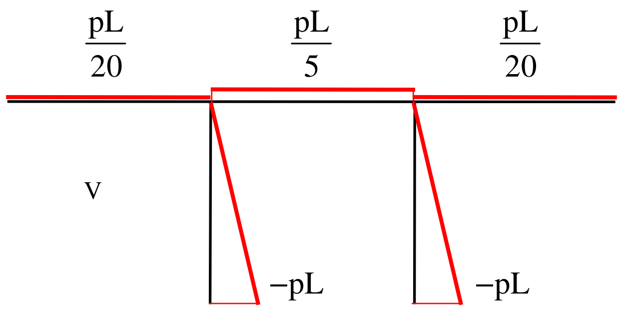


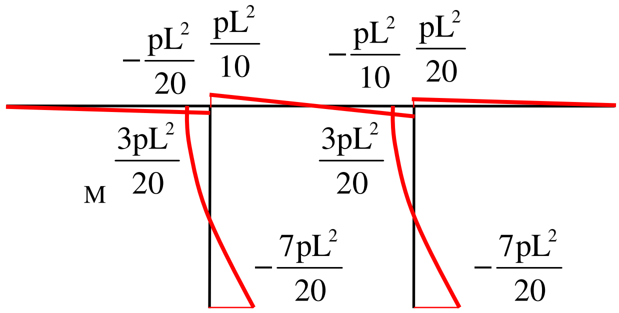


Partie III : Méthode des rotations









Partie IV : Méthode des éléments finis

Taille de la matrice de rigidité élémentaire d'un élément poutre pour des problèmes en 3D

12 x 12

Taille de la matrice de rigidité globale pour le système (S_4)

18 x 18

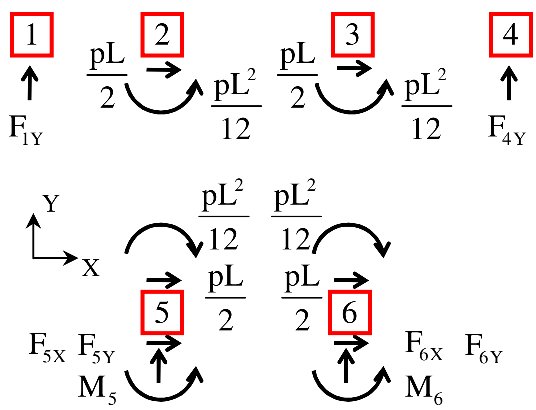
Taille de la matrice inversée par le système

10 x 10

Comment change la matrice de rigidité globale si la force répartie est remplacée par une force concentrée globalement équivalente

Pas de changement

Indiquez dans les deux cas le second membre mis en place après l'assemblage



Cas : force répartie

$$\begin{bmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots F_{1Y} \cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots \frac{pL}{2} \cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots \frac{pL^2}{12} \cdots \\ \cdots \frac{pL}{2} \cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots \frac{pL^2}{12} \cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots F_{4Y} \cdots \\ \cdots\cdots \\ F_{5X} + \frac{pL}{2} \\ \cdots F_{5Y} \cdots \\ M_5 - \frac{pL^2}{12} \\ F_{6X} + \frac{pL}{2} \\ \cdots F_{6Y} \cdots \\ M_6 - \frac{pL^2}{12} \end{bmatrix}$$

Cas : force ponctuelle

$$\begin{bmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots F_{1Y} \cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots pL \cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots pL \cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots F_{4Y} \cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots F_{5X} \cdots \\ \cdots F_{5Y} \cdots \\ \cdots M_5 \cdots \\ \cdots F_{6X} \cdots \\ \cdots F_{6Y} \cdots \\ \cdots M_6 \cdots \end{bmatrix}$$