

Table des matières

Chapitre 1 Energie interne	3
1.1 Introduction	3
1.2 Analogie avec le ressort	4
1.1 Energie interne en fonction des efforts extérieurs.....	4
1.2 Energie interne en fonction des contraintes	5
1.3 Energie interne en fonction des sollicitations.....	5
Chapitre 2 Résolution d'un problème – RDM	11
2.1 Cinématique	11
2.2 Equations d'équilibre – poutre droite.....	14
2.3 Loi de comportement	14
2.4 Conditions aux Limites	14
2.5 Equations du problème - Modèle de TIMOSHENKO	15
2.6 Equations du problème - Modèle de BERNOUILLI.....	16
2.7 Exemple de base - Isostatique	17
2.8 Exemple de base - hyperstatique	19
Chapitre 3 Les théorèmes énergétiques en RDM.....	23
3.1 Définitions	23
3.2 Principe des Travaux Virtuels (PTV).....	26
3.3 Théorème de réciprocité (MAXWELL-BETTI)	28
3.4 Théorème de CASTIGLIANO	29
3.5 Equation de BdF (BERTRAND DE FONTVIOLANT)	31
Chapitre 4 Méthode des forces.....	33
4.1 Les intégrales de MOHR.....	33
4.2 Calcul des inconnues hyperstatiques.....	35
4.3 Calcul d'un déplacement en un point.....	42
Chapitre 5 Formule des 3 moments.....	45
5.1 Mise en place.....	45
5.2 Dénivellations sur appuis	48
5.3 Exemple.....	48
Chapitre 6 Méthode des déplacements.....	51
6.1 Mise en place.....	51
6.2 Matrice de rigidité élémentaire d'une poutre	51
6.3 Matrice de rigidité globale d'une structure	56
Chapitre 7 Méthode des rotations	59
7.1 Hypothèse simplificatrice.....	59
7.2 Etude cinématique	59
7.3 Rotations d'ensemble	61
7.4 Mise en place des équations d'équilibre	61
7.5 Résolution d'un problème	62
7.6 Substitution.....	65
7.7 Liaison interne particulière.....	69
Chapitre 8 Méthode des éléments finis.....	71
8.1 Théorème de l'énergie potentielle.....	71
8.2 Méthode des éléments finis MMC	71
8.3 Méthode des éléments finis RDM.....	76
8.4 Exemple RDM.....	82

8.5 Une solution exacte 85

Chapitre 1 Energie interne

1.1 Introduction

On considère une structure élastique, non chargée, reposant sur des liaisons parfaites.

On considère un matériau à loi de comportement élastique linéaire

Chargement quasi statique de la structure :

Les efforts extérieurs produisent un travail W_{ext}

La structure se déforme, l'énergie fournie par les efforts extérieurs est accumulée dans la structure sous forme d'énergie interne ou d'énergie de déformation.

Déchargement quasi statique de la structure :

Les efforts extérieurs produisent un travail $-W_{\text{ext}}$

La structure retrouve son état initial

L'énergie de déformation est restituée

L'énergie de déformation est une fonction d'état, on la choisit conventionnellement nulle pour une structure non chargée.

Approche thermodynamique (1^{er} principe) :

- ΔU : énergie interne
- ΔE_c : énergie cinétique
- ΔE_p : énergie potentielle
- Q : quantité de chaleur reçue
- W : travail réel des efforts extérieurs

$$\Delta U + \Delta E_c + \Delta E_p = W + Q$$

Soit :

$$U = W$$

1.2 Analogie avec le ressort

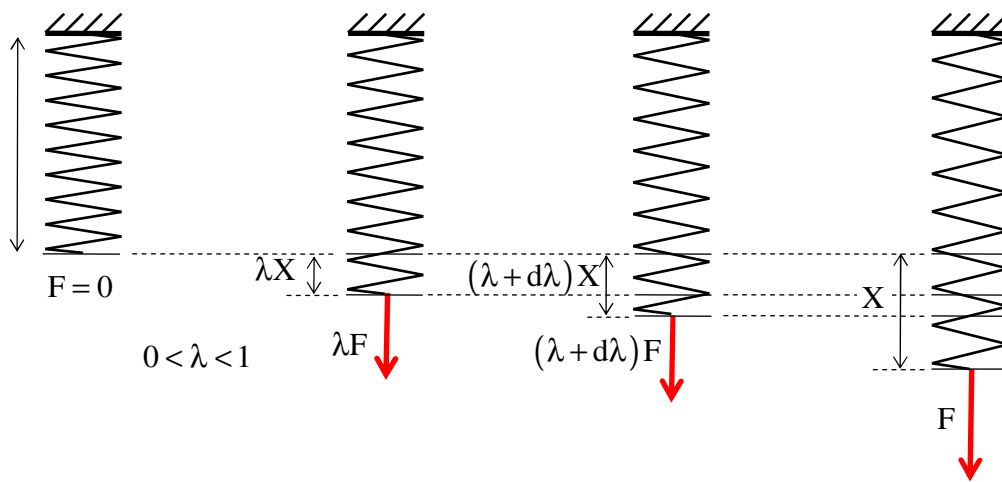


Fig. 1.1 – Ressort – transformation quasi statique

Comportement élastique linéaire :

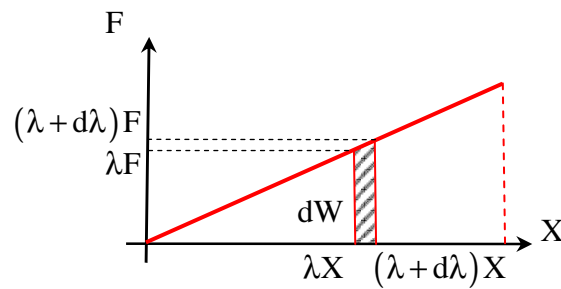


Fig. 1.2 – Travail – transformation quasi statique

$$dW_{\text{ext}} = \lambda F d\lambda X$$

$$U = W_{\text{ext}} = \int_0^1 \lambda F X d\lambda = \frac{1}{2} F X$$

Le coefficient $\frac{1}{2}$ traduit la mise en charge progressive (chargement quasi statique)

1.1 Energie interne en fonction des efforts extérieurs

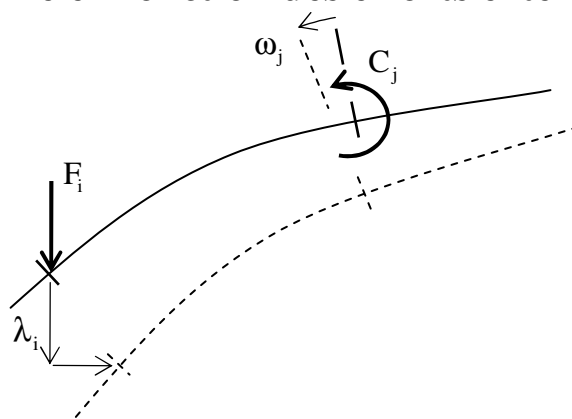


Fig. 1.3 – Effort extérieurs – Déplacements

Soit λ_i le déplacement sur la droite d'action de F_i du point d'application.

Soit ω_j la rotation au point d'application de C_j

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i F_i + \frac{1}{2} \sum_j \omega_j C_j$$

1.2 Energie interne en fonction des contraintes

Raisonnement sur un état de traction simple :

Soit un élément de volume $dx \, dy \, dz$ soumis à une contrainte normale σ_{11} sur sa face $dy \, dz$:
effort $\sigma_{11} dy dz$

Cet effort travaille sous l'effet de la seule déformation ϵ_{11} selon un déplacement $\epsilon_{11} dx$

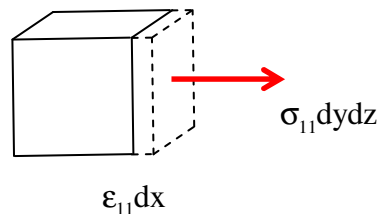


Fig. 1.4 – Energie interne – contrainte normale

Par unité de volume :

$$dU = \frac{1}{2} \sigma_{11} \epsilon_{11} dx dy dz$$

En généralisant :

$$dU = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dx dy dz = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} dV$$

En intégrant :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} dV$$

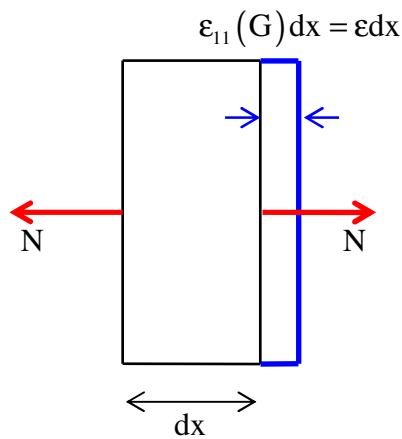
1.3 Energie interne en fonction des sollicitations

On considère un tronçon de poutre de longueur dx entre deux sections droites.

On écrit son équilibre et on détermine l'énergie interne dU en fonction des forces extérieures ou en fonction des contraintes.

On décompose le problème selon chaque sollicitation élémentaire.

1.3.1 Effort normal



$$dU = \frac{1}{2} N \varepsilon dx$$

LC linéaire

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}$$

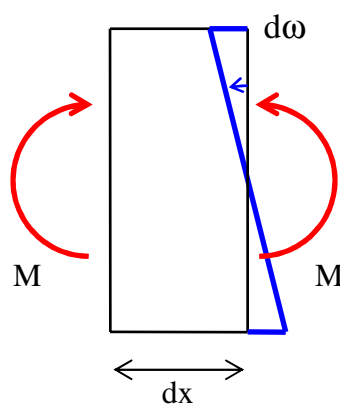
$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{Struct.}} \frac{N^2}{EA} dx$$

Remarque :

$$\sigma_{11} = \frac{N}{A} \quad \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} = \frac{N}{EA}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{11} \varepsilon_{11} dS dx = \frac{1}{2} \int_V \frac{N^2}{EA^2} dS dx = \frac{1}{2} \int_{\text{Struct.}} \frac{N^2}{EA} dx$$

1.3.1 Moment fléchissant



$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{1}{R} = \chi \text{ courbure}$$

$$dU = \frac{1}{2} M \cdot \frac{d\omega}{dx} dx = \frac{1}{2} M \cdot \chi dx$$

LC linéaire

$$d\omega = -\frac{\varepsilon_{11} dx}{y} = \frac{M}{EI} y \frac{dx}{y} = \frac{M}{EI} dx \quad \chi = \frac{M}{EI}$$

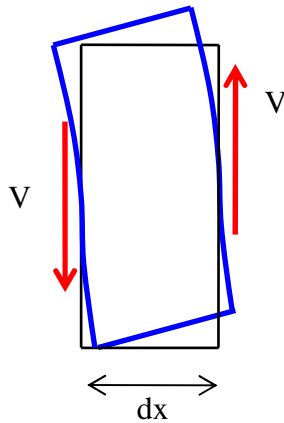
$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{Struct.}} \frac{M^2}{EI} dx$$

Remarque :

$$\sigma_{11} = -\frac{M}{I} y \quad \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} = -\frac{M}{EI} y$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{11} \varepsilon_{11} dS dx = \frac{1}{2} \int_V \frac{M^2}{EI^2} y^2 dS dx = \frac{1}{2} \int_{\text{Struct.}} \frac{M^2}{EI} dx$$

1.3.2 Effort tranchant



On ne connaît pas le déplacement relatif de deux sections voisines de dx

On pose par analogie :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{Struct.}} \frac{V^2}{GA_y} dx \quad A_y \text{ section déduite}$$

On calcule l'énergie interne à l'aide des contraintes et on identifie pour donner une expression ou une valeur de A_y

Cas de sections massives :

On suppose qu'un effort tranchant V n'induit que des contraintes tangentielles τ_y constantes dans la largeur de la section.

Pour un volume élémentaire, l'énergie en fonction des contraintes est :

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} dV = \frac{1}{2} \tau_y \gamma_y dx dy dz$$

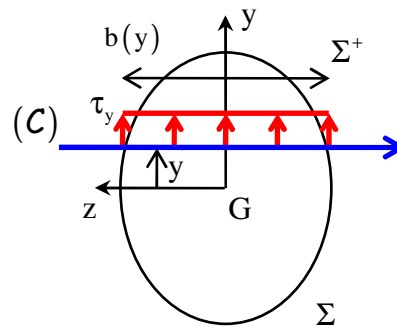
D'où l'expression de dU :

$$dU = \frac{1}{2} \left(\int_{\Sigma} \tau_y \gamma_y dy dz \right) dx = \frac{1}{2} \left(\int_{\Sigma} \tau_y \gamma_y b(y) dy \right) dx$$

Avec $\tau_y = G\gamma_y$ il vient :

$$dU = \frac{1}{2} \left(\int_{\Sigma} \frac{\tau_y^2}{G} b(y) dy \right) dx$$

$$\text{De plus } \tau_y = \frac{V_y}{I_z} \frac{S_z(\Sigma^+)}{b(y)} = \frac{V_y}{I_z} \frac{S_z(y)}{b(y)}$$



Ainsi :

$$dU = \frac{1}{2} \frac{V_y^2}{GI_z^2} \left(\int_{\Sigma} \frac{S_z^2(y)}{b(y)} dy \right) dx$$

Nous définissons la section réduite A_y par :

$$A_y = \frac{I_z^2}{\int_{\Sigma} \frac{S_z^2(y)}{b(y)} dy}$$

Ainsi :

$$dU = \frac{1}{2} \frac{V_y^2}{GA_y} dx$$

Remarques :

Pour une section rectangulaire $A_y = \frac{5}{6} A$

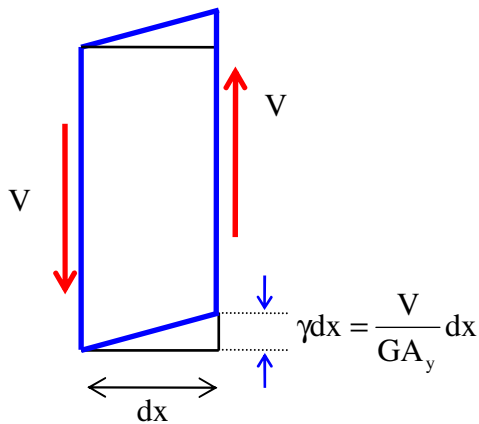
Pour une section circulaire $A_y = \frac{9}{10} A$

En présence d'un effort tranchant V_z il faudrait introduire une section réduite :

$$A_z = \frac{I_y^2}{\int_{\Sigma} \frac{S_y^2(z)}{h(z)} dy}$$

Sans cette hypothèse, on peut trouver la répartition des contraintes tangentes avec une étude MMC et en déduire une valeur pour A_y

Le problème de l'énergie interne due à l'effort tranchant est énergétiquement équivalent au problème suivant :



$$\gamma = \frac{V}{GA_y}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{Struct.}} V \cdot \gamma dx$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{Struct.}} \frac{V^2}{GA_y} dx$$

1.3.1 Expressions de l'énergie interne

Dans les problèmes plans :

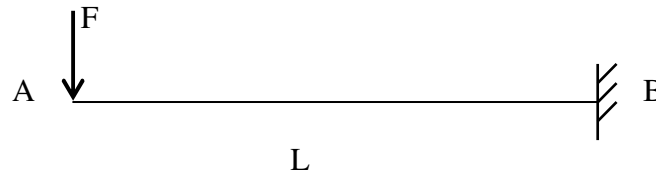
$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{Struct.}} N\varepsilon + V\gamma + M\chi dx$$

Pour un matériau élastique :

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} \quad \gamma = \frac{V}{GA_y} \quad \chi = \frac{M}{EI}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{Struct.}} \frac{N^2}{EA} + \frac{V^2}{GA_y} + \frac{M^2}{EI} dx$$

Exemple :



$$N(x) = 0 \qquad V(x) = F \qquad M(x) = -Fx$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{F^2}{GA_y} + \frac{(Fx)^2}{EI} dx = \frac{1}{2} \frac{F^2 L}{GA_y} + \frac{1}{6} \frac{F^2 L^3}{EI}$$

Application numérique :

Soit un profilé métallique IPE180 de portée $L = 2$ m sous une charge de $F = 10$ kN

$E = 210\,000$ MPa, $I_z = 1317$ cm⁴ $G = 81\,000$ MPa et $A_y = 869,2$ mm²

$$U = 1,4 + 48,2 = 49,6 \text{ J}$$

La part de l'énergie de déformation due à l'effort tranchant est ici de 2,8 %

Remarque : on peut ici déterminer la flèche maximale δ sous la force F en exprimant l'énergie de déformation en fonction des efforts extérieurs :

$$U = \frac{1}{2} F \delta \qquad \frac{1}{2} 10 \cdot 10^3 \delta = 49,6 \qquad \delta = 10 \text{ mm}$$

Pour les poutres courantes : le terme dû au moment est prépondérant

Dans le cas de treillis :

Barre i : N_i , L_i , A_i

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{Struct.}} \frac{N^2}{EA} dx = \frac{1}{2} \sum_{\text{barres}} \int_{L_i} \frac{N_i^2}{EA_i} dx$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\text{barres}} \frac{N_i^2 L_i}{EA_i}$$

Dans les problèmes 3D :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{Struct.}} \frac{N^2}{EA} + \frac{V_y^2}{GA_y} + \frac{V_z^2}{GA_z} + \frac{T^2}{GJ} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{EI_z} dx$$

Cette expression complète n'est valable que si les axes y et z sont les axes principaux d'inertie.

Chapitre 2 Résolution d'un problème – RDM

Le principe de la Théorie des poutres est de résumer les grandeurs physiques statiques et cinématiques des points d'une section droite au centre de gravité de celle-ci.
Ce chapitre se limite volontairement aux problèmes plans

2.1 Cinématique

2.1.1 Modèle MMC

L'étude de la répartition des contraintes et déformations dans une section droite peut être résolu avec les outils de la MMC ; ce problème porte le nom de problème de SAINT VENANT.

Les déformations longitudinales sont celles mises en place par le cours de RDM
Les distorsions n'ont des solutions analytiques que pour de rares sections :

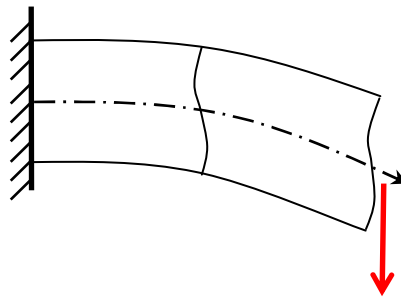


Fig. 2.1 – Cinématique - MMC

2.1.1 Modèle RDM avec prise en compte global de la distorsion

La cinématique d'une section droite « résumée » à son centre de gravité nécessite la définition de 3 grandeurs cinématique : $u(x)$, $v(x)$ et $\omega(x)$

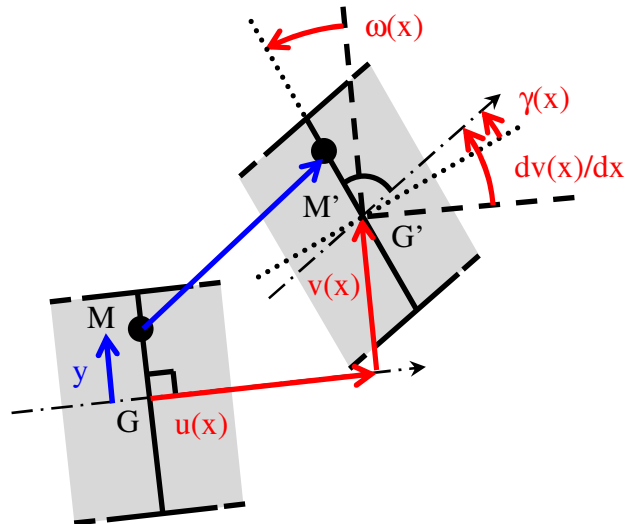


Fig. 2.2 – Repérage cinématique – Modèle de TIMOSCHENKO

Au premier ordre, le déplacement vectoriel du point M vaut dans le repère local :

$$\vec{u}(M) = \overrightarrow{MM'} \begin{cases} u(x) - \omega(x)y \\ v(x) \end{cases}$$

Déterminons les déformations :

$$\varepsilon = \varepsilon_{11}(G) = \left. \frac{\partial(u(x) - \omega(x)y)}{\partial x} \right|_{y=0}$$

Soit :

$$\varepsilon = \frac{du(x)}{dx}$$

Exprimons la distorsion γ à l'aide de la définition de ε_{xy}

$$\gamma = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial v(x)}{\partial x} + \frac{\partial(u(x) - \omega(x)y)}{\partial y}$$

Soit :

$$\gamma(x) = \frac{dv(x)}{dx} - \omega(x)$$

Cette distorsion est indépendante de y , le gauchissement est global dans la section.

Par suite une section droite reste plane après déplacements.

Une section peut donc être repérée par sa rotation, et le déplacement de son centre de gravité :

$u(x)$, $v(x)$ et $\omega(x)$

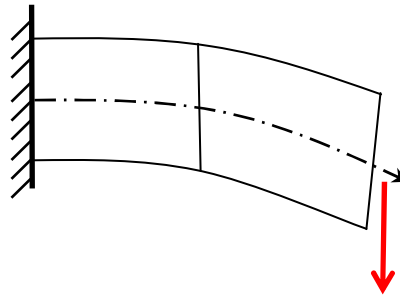


Fig. 2.3 – Cinématique – modèle de TIMOSHENKO

Cette approche cinématique porte le nom de :
Poutre ou modèle de TIMOSHENKO

2.1.2 Modèle RDM négligeant la distorsion

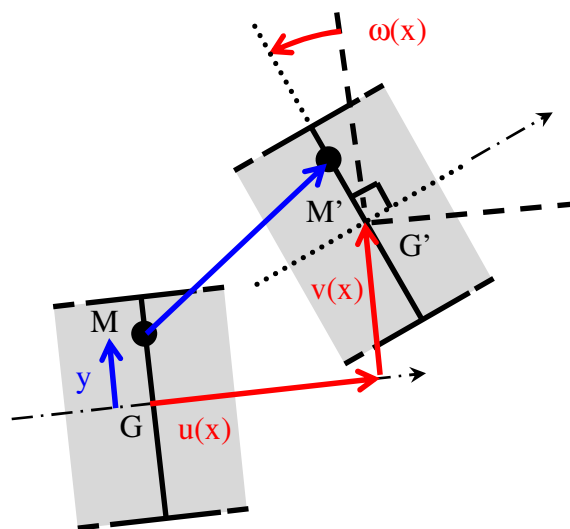


Fig. 2.4 – Cinématique – modèle de BERNOULLI

Si on néglige le gauchissement :

$$\gamma(x) = \frac{dv(x)}{dx} - \omega(x) = 0 \quad \text{soit : } \frac{dv(x)}{dx} = \omega(x)$$

Les sections droites restent perpendiculaires à la fibre moyenne.

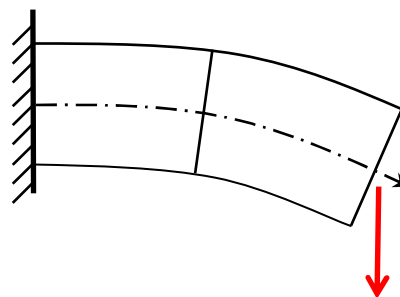


Fig. 2.5 – Cinématique – modèle de BERNOULLI

Cette approche cinématique porte le nom de :
Poutre ou modèle de BERNOULLI

2.2 Equations d'équilibre – poutre droite

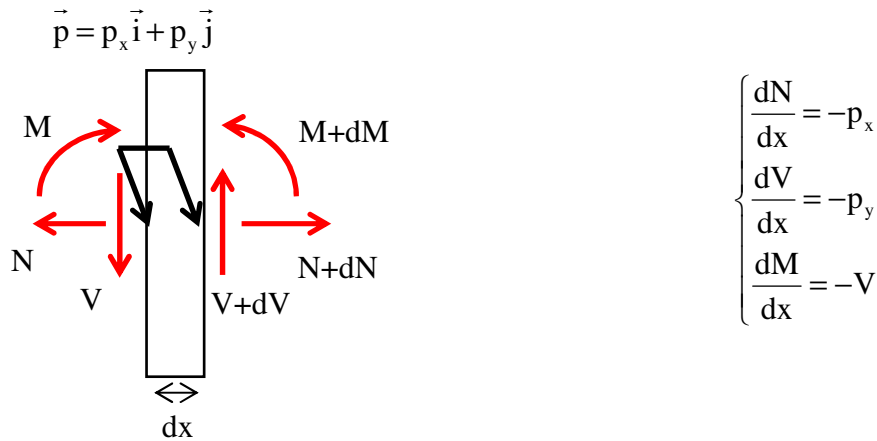


Fig. 2.6 – Equilibre – Tronçon poutre droite

Remarque : Les sollicitations définies comme les « forces de gauche » vérifient automatiquement ces équations.

2.3 Loi de comportement

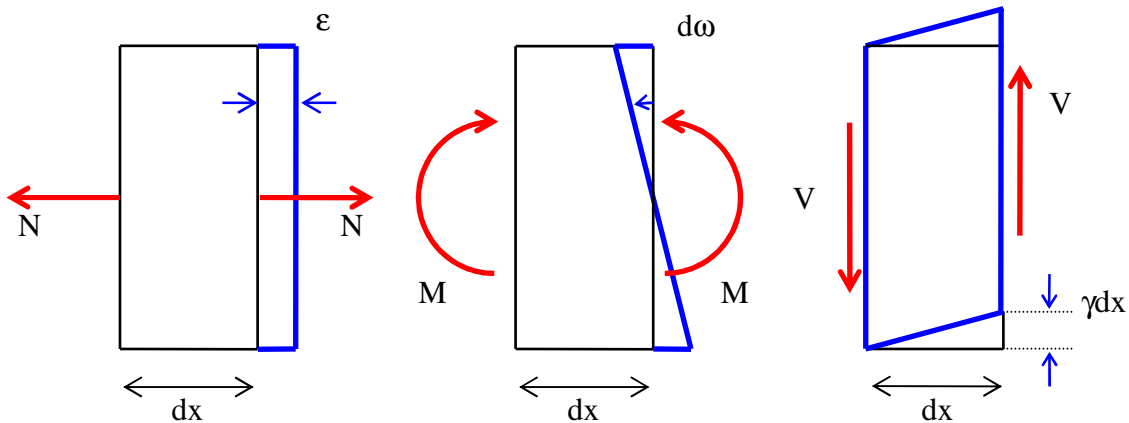


Fig. 2.7 – Déformations – Sollicitations élémentaires

Pour un matériau élastique linéaire :

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{N}{EA} \\ \gamma &= \frac{V}{GA_y} \\ \chi &= \frac{d\omega}{dx} = \frac{M}{EI_z} \end{aligned}$$

2.4 Conditions aux Limites

La nature cinématique d'une liaison donne des conditions sur u, v, ω

Ce sont des Conditions aux Limites cinématiques :

$$u, v, \omega = u^d, v^d, \omega^d$$

Les équations d'équilibre d'un nœud donnent des conditions sur les sollicitations.
Ce sont des Conditions aux Limites statiques.

$$N, V, M = N^d, V^d, M^d$$

Exemple :

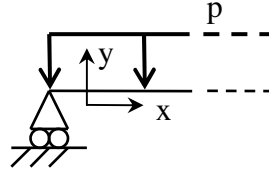


Fig. 2.8 – Appui simple d'extrémité

Cinématique de la liaison :

C.L. cinématiques

$$v(0) = 0$$

Equilibre du nœud :

C.L. statiques

$$N(0) = 0 \text{ et } M(0) = 0$$

2.5 Equations du problème - Modèle de TIMOSHENKO

$$(1) \cdot \begin{cases} \frac{dN}{dx} = -p_x \\ \frac{dV}{dx} = -p_y \\ \frac{dM}{dx} = -V \end{cases} \quad \text{Equation d'équilibre}$$

$$(2) \cdot \begin{cases} \varepsilon = \frac{N}{EA} \\ \gamma = \frac{V}{GA_y} \\ \chi = \frac{M}{EI_z} \end{cases} \quad \text{Loi de comportement}$$

$$(3) \cdot \begin{cases} \varepsilon = u' \\ \gamma = v' - \omega \\ \chi = \omega' \end{cases} \quad \text{Relations entre les déformations et la cinématique RDM}$$

$$(4) \quad u, v, \omega = u^d, v^d, \omega^d \quad \text{CL cinématique}$$

$$(5) \quad N, V, M = N^d, V^d, M^d \quad \text{CL statique}$$

La définition des sollicitations permet de vérifier les équations (1)

A l'aide des équations (2) et (3), on peut exprimer u, v, ω en fonction des sollicitations :

$$\left\{ \begin{array}{l} u' = \frac{N}{EA} \\ v'' = \frac{M}{EI_z} + \frac{d}{dx} \left(\frac{V}{GA_y} \right) \\ \omega' = \frac{M}{EI_z} \end{array} \right.$$

La résolution de ces équations se fait en partant des sollicitations (connues dans le cas d'une poutre isostatique, paramétrées dans le cas d'une poutre hyperstatique)

Les expressions intégrées des équations précédentes portent le nom de formules de BRESSE.

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x) = u_0 + \int_0^x \frac{N(t)}{EA} dt \\ v(x) = v_0 + \omega_0 x + \int_0^x (x-t) \frac{M(t)}{EI} dt + \int_0^x \frac{V(t)}{GA_y} dt \\ \omega(x) = \omega_0 + \int_0^x \frac{M(t)}{EI} dt \end{array} \right.$$

2.6 Equations du problème - Modèle de BERNOULLI

$$(1) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{dN}{dx} = -p_x \\ \frac{dV}{dx} = -p_y \\ \frac{dM}{dx} = -V \end{array} \right. \quad \text{Equation d'équilibre}$$

$$(2) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{N}{EA} \\ \chi = \frac{M}{EI_z} \end{array} \right. \quad \text{Loi de comportement}$$

$$(3) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = u' \\ v' = \omega \\ \chi = \omega' \end{array} \right. \quad \text{Relations entre les déformations et la cinématique RDM}$$

$$(4) \quad u, v, \omega = u^d, v^d, \omega^d \quad \text{CL cinématique}$$

$$(5) \quad N, V, M = N^d, V^d, M^d \quad \text{CL statique}$$

La définition des sollicitations permet de vérifier les équations (1)

A l'aide des équations (2) et (3), on peut exprimer u, v, ω en fonction des sollicitations :

$$\begin{cases} u' = \frac{N}{EA} \\ v'' = \frac{M}{EI_z} \\ \omega = v' \end{cases}$$

La résolution de ces équations se fait en partant des sollicitations (connues dans le cas d'une poutre isostatique, paramétrées dans le cas d'une poutre hyperstatique)

Les expressions intégrées des équations précédentes portent le nom de formules de BRESSE.

$$\begin{cases} u(x) = u_0 + \int_0^x \frac{N(t)}{EA} dt \\ v(x) = v_0 + \omega_0 x + \int_0^x (x-t) \frac{M(t)}{EI} dt \\ \omega(x) = \omega_0 + \int_0^x \frac{M(t)}{EI} dt \end{cases}$$

2.7 Exemple de base - Isostatique

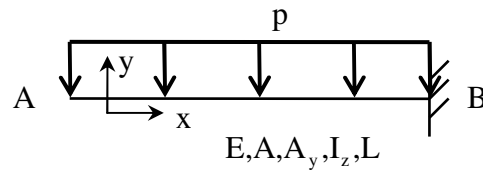


Fig. 2.9 – Poutre isostatique

Profilé métallique IPE180 de portée $L = 6$ m sous une charge répartie de $p = 2$ kN/m
 $E = 210\,000$ MPa, $I_z = 1317$ cm⁴ $G = 81\,000$ MPa et $A_y = 869,2$ mm²

Les sollicitations peuvent être déterminées, par suite l'équation différentielle est intégrée à l'aide des conditions aux limites : $v(L) = \omega(L) = 0$

$$\begin{cases} V(x) = px \\ M(x) = -p \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

2.7.1 Déformations d'effort tranchant non négligées

$$v'' = \frac{M}{EI_z} + \frac{d}{dx} \left(\frac{V}{GA_y} \right) = -p \frac{x^2}{2EI_z} + \frac{d}{dx} \left(\frac{px}{GA_y} \right) = -p \frac{x^2}{2EI_z} + \frac{p}{GA_y}$$

$$v = -p \frac{x^4}{24EI_z} + \frac{px^2}{2GA_y} + ax + b$$

$$\omega(L) = 0 \Rightarrow v'(L) = \gamma(L) = \frac{V(L)}{GA_y} = \frac{pL}{GA_y}$$

Attention : la fibre moyenne ne reste pas perpendiculaire à l'encastrement.

$$\begin{cases} v(L) = 0 \\ v'(L) = \frac{pL}{GA_y} \end{cases} \begin{cases} -\frac{pL^4}{24EI_z} + \frac{pL^2}{2GA_y} + aL + b = 0 \\ -\frac{pL^3}{6EI_z} + \frac{pL}{GA_y} + a = \frac{pL}{GA_y} \end{cases} \begin{cases} b = -\frac{pL^4}{8EI_z} - \frac{pL^2}{2GA_y} \\ a = \frac{pL^3}{6EI_z} \end{cases}$$

$$v(x) = -\frac{P}{24EI_z}(x-L)^2(x^2 + 2Lx + 3L^2) - \frac{P}{2GA_y}(L^2 - x^2)$$

Le maximum étant obtenu en $x = 0$

$$v(0) = -\frac{pL^4}{8EI_z} - \frac{pL^2}{2GA_y}$$

Application Numérique :

$$v(0) = -0,1171 - 0,0005 = -0,1176 \text{ m}$$

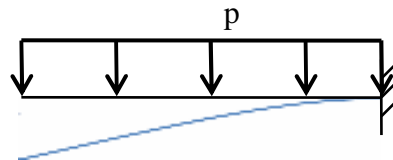


Fig. 2.10 – Déformée - Poutre isostatique

Remarques :

- L'influence des déformations d'effort tranchant est ici négligeable.
- On détermine la flèche en tout point, alors que la flèche maximale suffit.

2.7.2 Déformations d'effort tranchant négligées

$$v'' = \frac{M}{EI_z} = -p \frac{x^2}{2EI_z}$$

$$v = -p \frac{x^4}{24EI_z} + ax + b$$

$$\omega(L) = 0 \Rightarrow v'(L) = 0$$

Attention : la fibre moyenne est perpendiculaire à l'encastrement.

$$\begin{cases} v(L) = 0 \\ v'(L) = 0 \end{cases} \begin{cases} -\frac{pL^4}{24EI_z} + aL + b = 0 \\ -\frac{pL^3}{6EI_z} + a = 0 \end{cases} \begin{cases} b = -\frac{pL^4}{8EI_z} \\ a = \frac{pL^3}{6EI_z} \end{cases}$$

$$v(x) = -\frac{P}{24EI_z}(x-L)^2(x^2 + 2Lx + 3L^2)$$

Le maximum étant obtenu en $x = 0$

$$v(0) = -\frac{pL^4}{8EI_z}$$

On retrouve la partie principale de l'application numérique précédente.

Application Numérique :

$$v(0) = -0,1171 \text{ m}$$

Le modèle des poutres de BERNOULLI est plus simple à résoudre et suffisamment précis.

2.7.3 Sollicitations

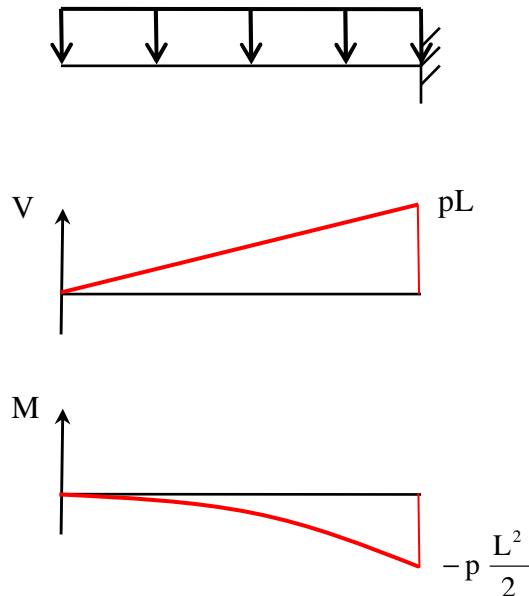


Fig. 2.11 – Sollicitations - Poutre isostatique

Les sollicitations et par suite les actions de liaison ne dépendent pas de l'hypothèse sur l'influence de l'effort tranchant.

2.8 Exemple de base - hyperstatique

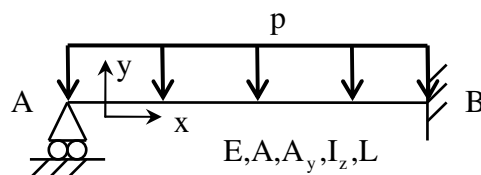


Fig. 2.12 – Poutre hyperstatique

Profilé métallique IPE180 de portée $L = 6 \text{ m}$ sous une charge répartie de $p = 2 \text{ kN/m}$
 $E = 210\,000 \text{ MPa}$, $I_z = 1317 \text{ cm}^4$ $G = 81\,000 \text{ MPa}$ et $A_y = 869,2 \text{ mm}^2$

Les sollicitations peuvent être déterminées en fonction d'une inconnue hyperstatique : action de liaison X en A par exemple, par suite l'équation différentielle est intégrée.

L'inconnue hyperstatique et les constantes d'intégration sont déterminées à l'aide des conditions aux limites : $v(0) = 0$ $v(L) = \omega(L) = 0$

$$\begin{cases} V(x) = px - X \\ M(x) = -p\frac{x^2}{2} + X.x \end{cases}$$

2.8.1 Déformations d'effort tranchant non négligées :

$$v'' = \frac{M}{EI_z} + \frac{d}{dx} \left(\frac{V}{GA_y} \right) = -p\frac{x^2}{2EI_z} + X\frac{x}{EI_z} + \frac{d}{dx} \left(\frac{px - X}{GA_y} \right) = -p\frac{x^2}{2EI_z} + X\frac{x}{EI_z} + \frac{p}{GA_y}$$

$$v = -p\frac{x^4}{24EI_z} + X\frac{x^3}{6EI_z} + \frac{px^2}{2GA_y} + ax + b$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\omega(L) = 0 \Rightarrow v'(L) = \gamma(L) = \frac{V(L)}{GA_y} = \frac{pL - X}{GA_y}$$

$$\begin{cases} v(L) = 0 \\ v'(L) = \frac{pL - X}{GA_y} \end{cases} \begin{cases} -\frac{pL^4}{24EI_z} + \frac{XL^3}{6EI_z} + \frac{pL^2}{2GA_y} + aL = 0 \\ -\frac{pL^3}{6EI_z} + \frac{XL^2}{2EI_z} + \frac{pL}{GA_y} + a = \frac{pL - X}{GA_y} \end{cases} \begin{cases} a + X\frac{L^2}{6EI_z} = \frac{pL^3}{24EI_z} - \frac{pL}{2GA_y} \\ a + X\left(\frac{L^2}{2EI_z} + \frac{1}{GA_y}\right) = \frac{pL^3}{6EI_z} \end{cases}$$

$$\text{On pose } \alpha = \frac{EI_z}{L^2GA_y}$$

$$X = \frac{3}{8}pL\frac{1+4\alpha}{1+3\alpha} \quad a = -\frac{pL^3}{48EI_z} \left(\frac{1+30\alpha+72\alpha^2}{1+3\alpha} \right)$$

$$v(x) = -p\frac{x^4}{24EI_z} + \frac{3}{8}pL\frac{1+4\alpha}{1+3\alpha}\frac{x^3}{6EI_z} + \frac{px^2}{2GA_y} - \frac{pL^3}{48EI_z} \left(\frac{1+30\alpha+72\alpha^2}{1+3\alpha} \right) x \quad \text{avec } \alpha = \frac{EI_z}{L^2GA_y}$$

Soit :

$$v(x) = -\frac{p}{48EI_z} x(L-x)^2(2x+L) - \alpha \frac{pL}{16EI_z} \frac{x(L-x)(x+3(3+8\alpha)L)}{1+3\alpha}$$

Application Numérique :

$$\alpha = \frac{EI_z}{L^2GA_y} = 0,001091$$

Le maximum étant obtenu en $x = 2,539 \text{ m}$ $v_{\max} = -0,00522 \text{ m}$

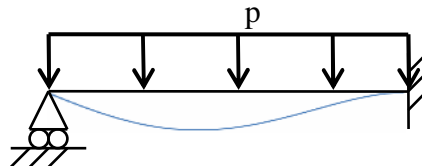


Fig. 2.13 – Déformée - Poutre hyperstatique

2.8.2 Déformations d'effort tranchant négligées :

$$v'' = \frac{M}{EI_z} = -p \frac{x^2}{2EI_z} + X \frac{x}{EI_z}$$

$$v = -p \frac{x^4}{24EI_z} + X \frac{x^3}{6EI_z} + ax + b$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\omega(L) = 0 \Rightarrow v'(L) = 0$$

$$\begin{cases} v(L) = 0 \\ v'(L) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{pL^4}{24EI_z} + X \frac{L^3}{6EI_z} + aL = 0 \\ -\frac{pL^3}{6EI_z} + \frac{XL^2}{2EI_z} + a = 0 \end{cases}$$

$$X = \frac{3}{8}pL \quad a = -\frac{pL^3}{48EI_z}$$

$$v(x) = -p \frac{x^4}{24EI_z} + \frac{3}{8}pL \frac{x^3}{6EI_z} - \frac{pL^3}{48EI_z} x$$

Soit :

$$v(x) = -\frac{p}{48EI_z} x(L-x)^2(2x+L)$$

Application Numérique :

Le maximum étant obtenu en $x = 2,529 \text{ m}$ $v_{\max} = -0,00508 \text{ m}$

2.8.3 Sollicitations

$$\begin{cases} V(x) = px - X \\ M(x) = -p \frac{x^2}{2} + X.x \end{cases}$$

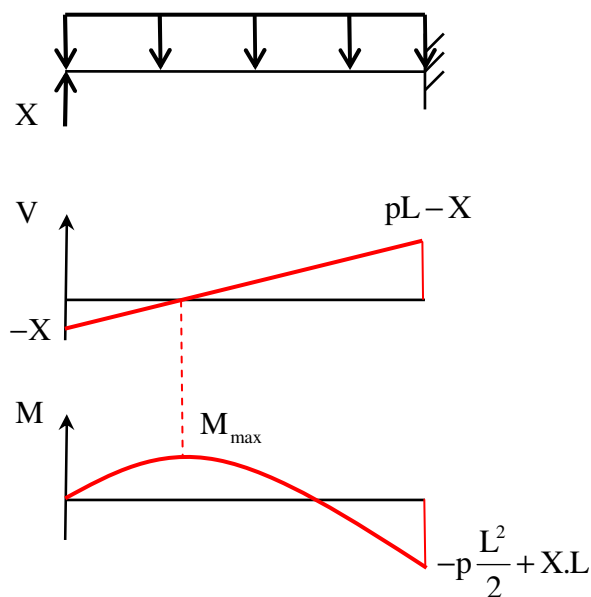


Fig. 2.14 – Sollicitations - Poutre hyperstatique

Effort tranchant non négligé :

$$X = \frac{3}{8} pL \frac{1+4\alpha}{1+3\alpha} = 4,505 \text{ kN}$$

$$M_{\max} = 5,0735 \text{ kN.m en } x = 2,252 \text{ m}$$

Effort tranchant négligé :

$$X = \frac{3}{8} pL = 4,500 \text{ kN}$$

$$M_{\max} = 5,0625 \text{ kN.m en } x = 2,250 \text{ m}$$

Les sollicitations et par suite les actions de liaison dépendent de l'hypothèse sur l'influence de l'effort tranchant.

Le modèle des poutres de BERNOULLI est plus simple à résoudre et suffisamment précis.

Chapitre 3 Les théorèmes énergétiques en RDM

3.1 Définitions

Un problème de RDM est régi par des équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN}{dx} = -p_x \\ \frac{dV}{dx} = -p_y \\ \frac{dM}{dx} = -V \end{array} \right. \quad \text{Equation d'équilibre}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u' = \frac{N}{EA} \\ v'' = \frac{M}{EI_z} \\ \omega = v' \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} u' = \frac{N}{EA} \\ v'' = \frac{M}{EI_z} + \frac{d}{dx} \left(\frac{V}{GA_y} \right) \\ \omega' = \frac{M}{EI_z} \end{array} \right. \quad \text{Relation déplacements - sollicitations}$$

$$u, v, \omega = u^d, v^d, \omega^d \quad \text{CL cinématique}$$

$$N, V, M = N^d, V^d, M^d \quad \text{CL statique}$$

3.1.1 Champ de déplacements virtuel :

Champ de déplacement virtuel : champ cinématique quelconque tel que la déformation existe

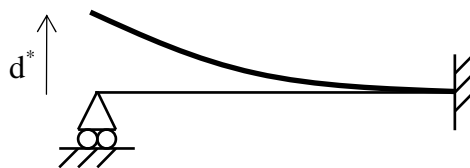


Fig. 3.1 – Déplacements virtuels - Quelconque

$$u^* = 0 \quad v^* = d^* \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \quad \omega^* = -2 \frac{d^*}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$\varepsilon^* = \frac{du^*}{dx} = 0 \quad \chi^* = \frac{d\omega^*}{dx} = 2 \frac{d^*}{L^2} \quad \gamma^* = \frac{dv^*}{dx} - \omega^* = 0$$

Remarque : le calcul des déformations impose que le champ de déplacements virtuels soit petit, ici d^* est petit par rapport aux dimensions de la structure.

Champ de déplacement cinématiquement admissible (CCA) : champ de déplacement virtuel qui respecte les conditions aux limites cinématiques.

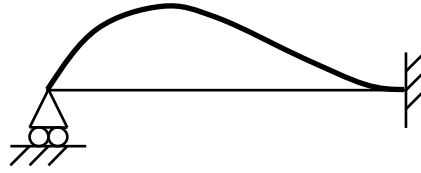


Fig. 3.2 – Déplacements virtuels – Cinématiquement Admissible

$$\begin{aligned}
 u^* &= 0 & v^* &= d^* \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 & \omega^* &= \frac{d^*}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(1 - 3\frac{x}{L}\right) \\
 v^*(0) &= 0 & u^*(L) &= 0 & v^*(L) &= 0 & \omega^*(L) &= 0 \\
 \varepsilon^* &= \frac{du^*}{dx} = 0 & \chi^* &= \frac{d\omega^*}{dx} = 2 \frac{d^*}{L^2} \left(-2 + 3\frac{x}{L}\right) & \gamma^* &= \frac{dv^*}{dx} - \omega^* = 0
 \end{aligned}$$

Champ de déplacement rigidifiant : déformation nulle en tout point

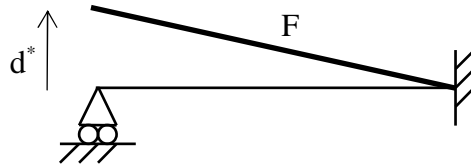


Fig. 3.3 – Déplacements virtuels – Rigidifiant

$$\begin{aligned}
 u^* &= 0 & v^* &= d^* \left(1 - \frac{x}{L}\right) & \omega^* &= -\frac{d^*}{L}
 \end{aligned}$$

Champ de déformation virtuel associé :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^* &= \frac{du^*}{dx} = 0 & \chi^* &= \frac{d\omega^*}{dx} = 0 & \gamma^* &= \frac{dv^*}{dx} - \omega^* = 0
 \end{aligned}$$

3.1.2 Sollicitations statiquement admissibles:

Des sollicitations, N, V et M sont statiquement admissibles (CSA) si elles vérifient les équations d'équilibre et les conditions aux limites statiques

Structure isostatique :

Les sollicitations se déterminent à l'aide des équations d'équilibre

Les sollicitations réelles sont statiquement admissibles, ce sont les seules.

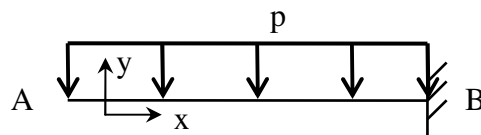


Fig. 3.4 – Structure isostatique – sollicitations Statiquement Admissibles

$$N(x) = 0 \quad V(x) = px \quad M(x) = -p \frac{x^2}{2}$$

CL statique

$$N(0) = 0 \qquad V(0) = 0 \qquad M(0) = 0$$

Structure hyperstatique :

La construction de sollicitations à l'aide des forces de droites (ou l'opposé des forces de gauche) permet d'assurer les équations d'équilibre

Les sollicitations définies à l'aide d'une structure isostatique associée et des inconnues hyperstatiques sont nécessairement statiquement admissibles.

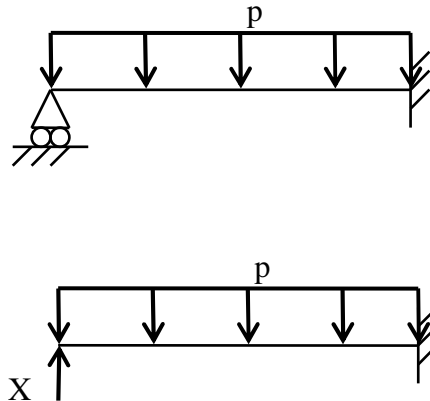


Fig. 3.5 – Structure hyperstatique – sollicitations Statiquement Admissibles

$$N(x) = 0 \qquad V(x) = -X + px \qquad M(x) = X \cdot x - p \frac{x^2}{2}$$

CL statique

$$N(0) = 0 \qquad M(0) = 0$$

3.1.3 Le problème de RDM

La résolution d'un problème de RDM se ramène à la recherche d'un champ de déplacement CCA et de sollicitations CSA reliés par la Relation : déplacements – sollicitations

Détermination des sollicitations dans une structure hyperstatique :

Méthode des forces :

On paramètre des sollicitations CSA à l'aide d'inconnues hyperstatique (type force)

Les sollicitations réelles font parties de cette famille

On détermine les inconnues hyperstatiques à l'aide des conditions cinématique.

Méthode des déplacements :

On paramètre des déplacements CCA à l'aide d'inconnues cinématiques (type déplacement)

Les déplacements réels font parties de cette famille

On détermine les inconnues cinématiques à l'aide des conditions statiques.

3.2 Principe des Travaux Virtuels (PTV)

3.2.1 Enoncé

Dans un référentiel Galiléen, et pour toute partition du système, la somme du travail virtuel des forces extérieures et du travail virtuel des forces intérieures est égal au travail virtuel des quantités d'accélération.

En statique, ce dernier terme est nul :

$$W_{\text{ext}}^* + W_{\text{int}}^* = 0$$

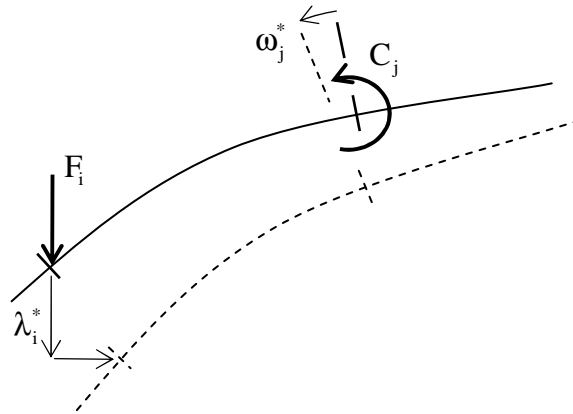


Fig. 3.6 – Travail virtuel des forces extérieures

$$W_{\text{ext}}^* = \sum_i F_i \lambda_i^* + \sum_j C_j \omega_j^*$$

$$W_{\text{int}}^* = - \int_L N \epsilon^* + V \gamma^* + M \chi^* ds$$

$$\sum_i F_i \lambda_i^* + \sum_j C_j \omega_j^* - \int_L N \epsilon^* + V \gamma^* + M \chi^* ds = 0$$

3.2.2 Exemples

Exemple 1 :

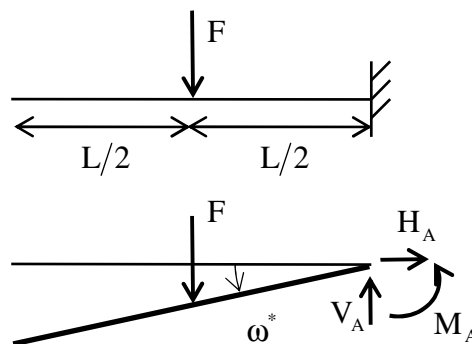


Fig. 3.7 – PTV - Rotation

Champ rigidifiant : $W_{\text{int}}^* = 0$

$$F \omega^* \frac{L}{2} + M_A \omega^* = 0$$

$$F \frac{L}{2} + M_A = 0$$

$$M_A = - \frac{FL}{2}$$

On reconnaît l'équation d'équilibre en moment

Exemple 2 :

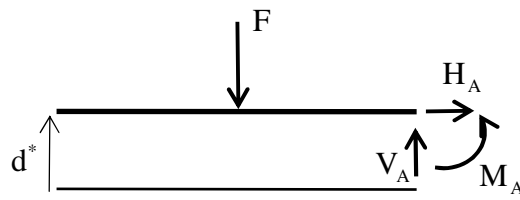


Fig. 3.8 – PTV – Déplacement vertical

Champ rigidifiant : $W_{int}^* = 0$

$$-Fd^* + V_A d^* = 0$$

$$-F + V_A = 0$$

$$V_A = F$$

On reconnaît l'équation d'équilibre en forces verticales

Exemple 3 :

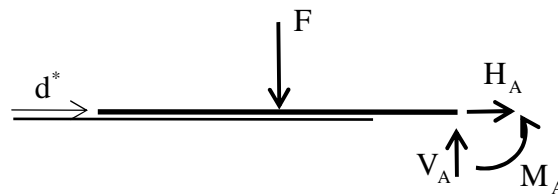


Fig. 3.9 – PTV – Déplacement horizontal

Champ rigidifiant : $W_{int}^* = 0$

$$H_A d^* = 0$$

$$H_A = 0$$

On reconnaît l'équation d'équilibre en forces horizontales

Le PTV (Principe des Travaux Virtuels) en statique est équivalent au principe fondamental de la statique (c'est pour cette raison qu'il n'est pas très utile de chercher à le démontrer)

Exemple 4 :

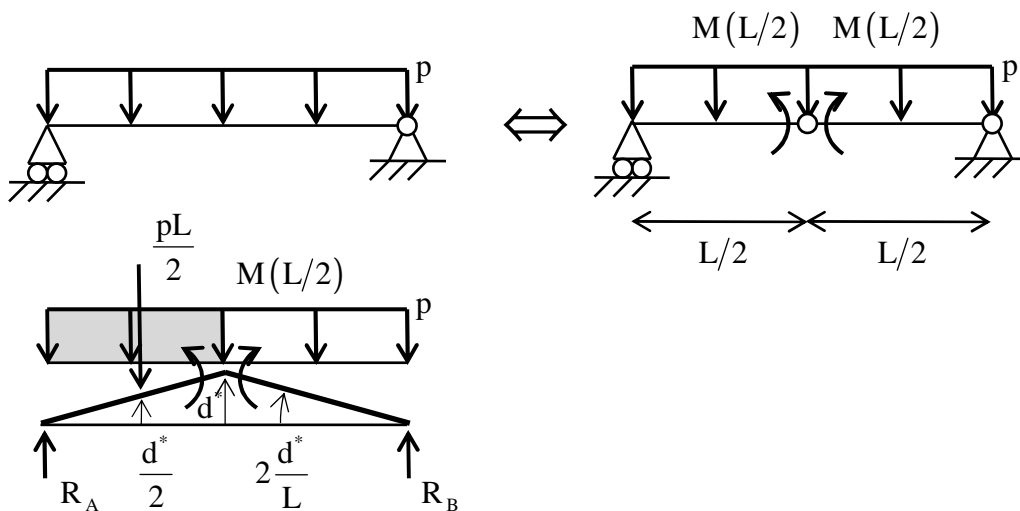


Fig. 3.10 – PTV – Coupure articulée

Remarques :

- Un effort intérieur peut être considéré comme une force extérieure en ayant au préalable libéré le degré de liberté correspondant.
- Dans un champ rigidifiant, le travail d'une force répartie est égal au travail de la force globalement équivalente, sur chaque partie ayant un mouvement de solide rigide.

Champ rigidifiant : $W_{int}^* = 0$

Champ cinématiquement admissible : le travail des efforts de liaison (parfaites) est nul.

$$-2 \frac{pL}{2} \frac{d^*}{2} + 2M(L/2) 2 \frac{d^*}{L} = 0 \quad M(L/2) = \frac{pL^2}{8}$$

Dans tous les cas, le principe des travaux virtuels n'est efficace qu'en considérant des champs de déplacements virtuels rigidifiant.

3.3 Théorème de réciprocité (MAXWELL-BETTI)

On considère une structure et deux cas de charge. (S^I) et (S^{II})

Loi de Comportement élastique

Liaisons parfaites

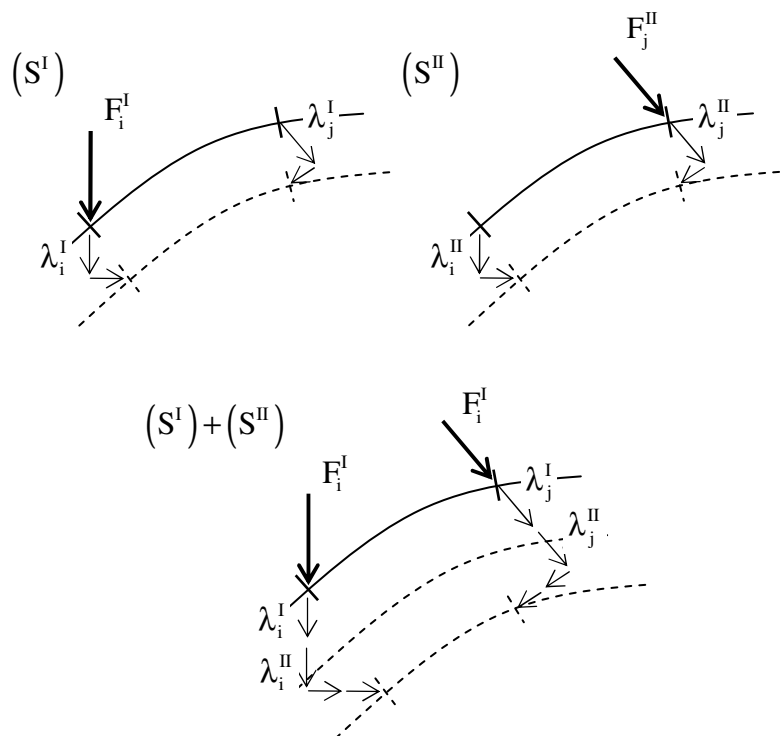


Fig. 3.11 – Théorème de réciprocité

Calcul de l'énergie interne du cas de charge I + II (fonction d'état)

Pré chargement I puis II :

$$U = \frac{1}{2} F_i^I \lambda_i^I + \left(\frac{1}{2} F_j^{II} \lambda_j^{II} + F_i^I \lambda_i^{II} \right)$$

Pré chargement II puis I :

$$U = \frac{1}{2} F_j^{II} \lambda_j^{II} + \left(\frac{1}{2} F_i^I \lambda_i^I + F_j^{II} \lambda_j^I \right)$$

L'égalité donne :

$$F_i^I \lambda_i^II = F_j^{II} \lambda_j^I$$

Le travail des forces du système (S^I) sur les déplacements élastiques du système (S^{II}) est égal au travail des forces du système (S^{II}) sur les déplacements élastiques du système (S^I)

$$W_{S^I \Delta S^{II}} = W_{S^{II} \Delta S^I}$$

3.4 Théorème de CASTIGLIANO

Soit une structure soumise à un système de forces \vec{F}_i indépendantes

Soit : λ_{ij} le déplacement selon F_i d'une charge $F_j = 1$

Le déplacement δ_i selon F_i vaut ainsi : $\sum_j \lambda_{ij} F_j$

D'où l'énergie interne : $U = U(F_1, \dots, F_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \delta_i F_i = \frac{1}{2} \sum_i F_i \sum_j \lambda_{ij} F_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \lambda_{ij} F_i F_j$

En dérivant selon F_{i_0} :

$$\frac{\partial U}{\partial F_{i_0}} = \frac{\partial}{\partial F_{i_0}} \left(\frac{1}{2} \lambda_{i_0 i_0} F_{i_0} F_{i_0} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq i_0} \lambda_{i i_0} F_i F_{i_0} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq i_0} \lambda_{i_0 i} F_{i_0} F_i \right)$$

D'après le théorème de réciprocité : $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$

$$\frac{\partial U}{\partial F_{i_0}} = \frac{\partial}{\partial F_{i_0}} \left(\frac{1}{2} \lambda_{i_0 i_0} F_{i_0} F_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} \lambda_{i_0 i} F_i F_{i_0} \right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial F_{i_0}} = \lambda_{i_0 i_0} F_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} \lambda_{i i_0} F_i = \sum_i \lambda_{i_0 i} F_i = \delta_{i_0}$$

D'où :

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \delta_i$$

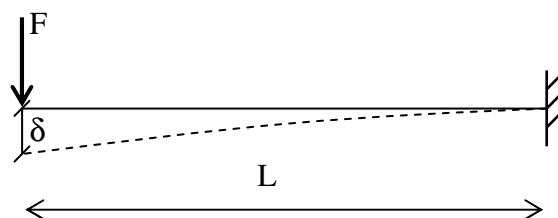
La dérivée partielle de l'énergie interne par rapport à une force est égale au déplacement algébrique du point d'application de cette charge selon sa direction

Remarque :

Une structure hyperstatique étant équivalente à une structure isostatique associée en introduisant des inconnues hyperstatiques, la force F_i peut être une force extérieure ou une inconnue hyperstatique.

Exemple 1 :

Calcul de flèche sous une charge concentrée.



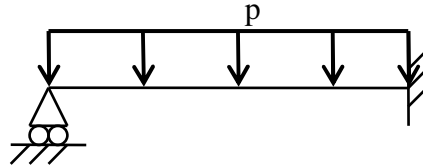
Déterminer δ

$$U = \frac{F^2 L^3}{6EI} \qquad \delta = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{FL^3}{3EI}$$

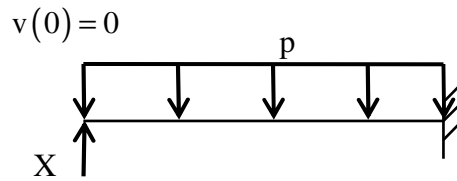
Exemple 2 :

Calcul d'une inconnue hyperstatique.

Déterminer l'action de liaison de l'appui simple



Système équivalent :



$$V(x) = -X + px \qquad M(x) = X \cdot x - p \frac{x^2}{2}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_L \frac{M^2}{EI} ds \qquad \frac{\partial U}{\partial X} = \int_L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X} ds = \frac{1}{EI} \int_L Xx^2 - p \frac{x^3}{2} ds = \frac{L^3}{EI} \left(\frac{X}{3} - \frac{pL}{8} \right)$$

$$\text{De plus } \frac{\partial U}{\partial X} = 0 \qquad X = \frac{3}{8} pL$$

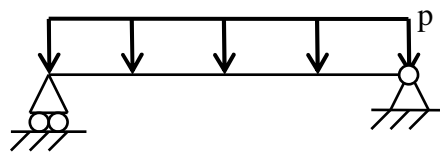
Remarque : sans négliger les déformations d'effort tranchant :

$$U = \frac{1}{2} \int_L \frac{M^2}{EI} + \frac{V^2}{GA_y} ds \text{ en posant } \alpha = \frac{EI_z}{L^2 GA_y} \text{ on retrouve } X = \frac{3}{8} pL \frac{1+4\alpha}{1+3\alpha}$$

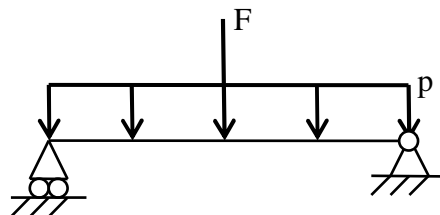
Cette dernière application est connue sous le nom de théorème de MENABREA

Exemple 3 :

Déterminer la flèche δ à mi travée :



Système équivalent si $F = 0$



$$\delta = \left. \frac{\partial U(F, p)}{\partial F} \right|_{F=0}$$

Tout calcul fait :
$$\delta = \frac{5pL^4}{384EI}$$

Cette application est connue sous le nom de méthode de la charge fictive

3.5 Equation de BdF (BERTRAND DE FONTVIOLANT)

On considère une structure et deux cas de charge (S) et (\bar{S})



Fig. 3.12 – Equation de BdF

Application du PTV au système (\bar{S}) avec comme champ de déplacement virtuel, celui de (S)

Rappel :

$$\sum_i F_i \lambda_i^* + \sum_j C_j \omega_j^* - \int_L N \varepsilon^* + V \gamma^* + M \chi^* ds = 0$$

On obtient :

$$\sum_i \bar{F}_i \lambda_i + \sum_j \bar{C}_j \omega_j - \int_L \bar{N} \varepsilon + \bar{V} \gamma + \bar{M} \chi ds = 0$$

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} \quad \gamma = \frac{V}{GA_y} \quad \chi = \frac{M}{EI}$$

On aboutit à :

$$\boxed{\sum \bar{F}_i \lambda_i + \bar{C}_j \omega_j = \int \frac{\bar{N}\bar{N}}{EA} + \frac{\bar{V}\bar{V}}{GA_y} + \frac{\bar{M}\bar{M}}{EI} ds}$$

Remarque :

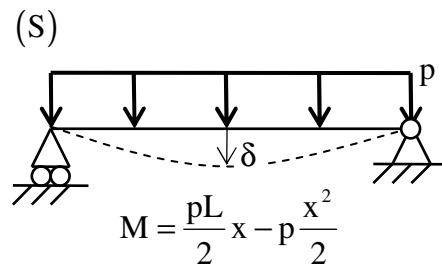
Les deux premiers termes sous l'intégrale peuvent souvent être négligés devant le troisième :

$$\boxed{\sum \bar{F}_i \lambda_i + \bar{C}_j \omega_j = \int \frac{\bar{M}\bar{M}}{EI} ds}$$

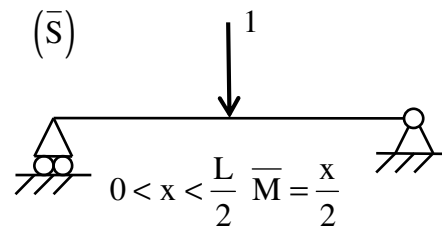
Le système (\bar{S}) est souvent choisi de façon simple, il est appelé système auxiliaire

Exemple 1 :

Déterminer la flèche δ à mi travée :



Choix de (\bar{S})



$$\delta = \int \frac{M\bar{M}}{EI} ds = \frac{2}{EI} \int_0^{L/2} \left(p\frac{L}{2}x - p\frac{x^2}{2} \right) \frac{x}{2} dx$$

$$\delta = \frac{2}{EI} \left(p\frac{L}{12} \frac{L^3}{8} - p\frac{1}{16} \frac{L^3}{16} \right) = \frac{5pL^4}{384EI}$$

Cette application est connue sous le nom de méthode ou théorème de la force unitaire.

Chapitre 4 Méthode des forces

4.1 Les intégrales de MOHR

Nous allons être amenés à calculer très souvent des intégrales de la forme $\int \frac{M\bar{M}}{EI} ds$ avec :

\bar{M} : Le moment d'un système auxiliaire qui sera une force ou un couple concentré unitaire.

Le moment \bar{M} sera donc très souvent linéaire

M : Le moment M sera souvent constant, linéaire ou parabolique

Technique graphique :

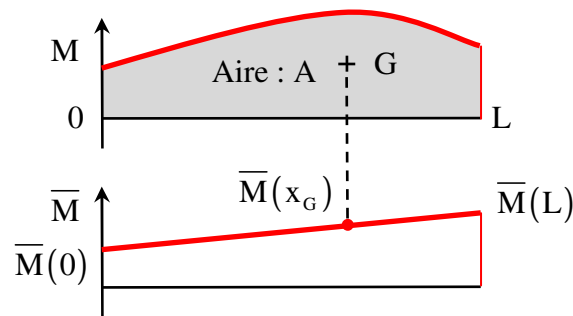


Fig. 4.1 – Intégrales de MOHR – Technique graphique

$$\bar{M}(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)\bar{M}(0) + \frac{x}{L}\bar{M}(L) = \bar{M}(0) + \frac{x}{L}(\bar{M}(L) - \bar{M}(0))$$

$$\int M\bar{M}ds = \int_0^L M(x)\bar{M}(x) dx = \int_0^L M(x) \left(\bar{M}(0) + \frac{x}{L}(\bar{M}(L) - \bar{M}(0)) \right) dx$$

$$\int M\bar{M}ds = \bar{M}(0) \int_0^L M(x) dx + \frac{\bar{M}(L) - \bar{M}(0)}{L} \int_0^L xM(x) dx = \bar{M}(0)A + \frac{\bar{M}(L) - \bar{M}(0)}{L} x_G A$$

$$\int M\bar{M}ds = \text{Aire}(M) \times \bar{M}(x_G)$$

Exemple :

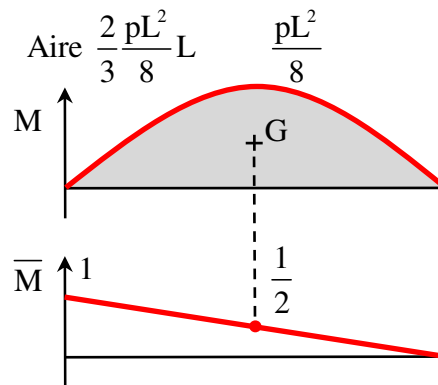


Fig. 4.2 – Intégrales de MOHR – Exemple

$$\int \bar{M} M ds = \frac{2}{3} \frac{pL^2}{8} L \times \frac{1}{2} = \frac{1}{24} pL^3$$

L'étude de différents cas possibles permet de mettre en place un tableau récapitulatif, dont l'utilisation porte le nom des intégrales de MOHR

$$\int_0^L M_i(x) M_j(x) dx = X M_i M_j L \text{ avec } X : \text{ valeur lue dans le tableau}$$

$M_i(x)$	$M_j(x)$	M_i	ψM	M_i	M_j
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
		1	$2 + \dots$	$\frac{1}{3}$	\dots

Fig. 4.3 – tableau des intégrales de MOHR

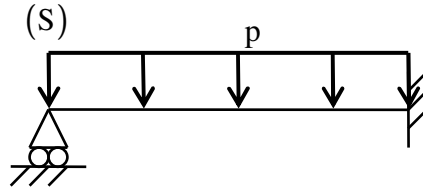
Pour reprendre l'exemple précédent :

$$\int \bar{M} M ds = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{pL^2}{8} \times L = \frac{1}{24} pL^3$$

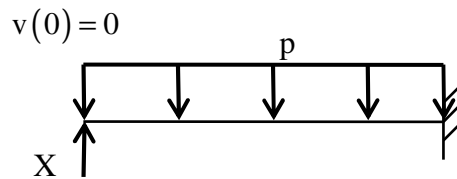
4.2 Calcul des inconnues hyperstatiques

4.2.1 Poutre hyperstatique de degré 1

Exemple :



Système isostatique équivalent :



On décompose le système (S) : $(S) = (S_0) + X(\bar{S})$

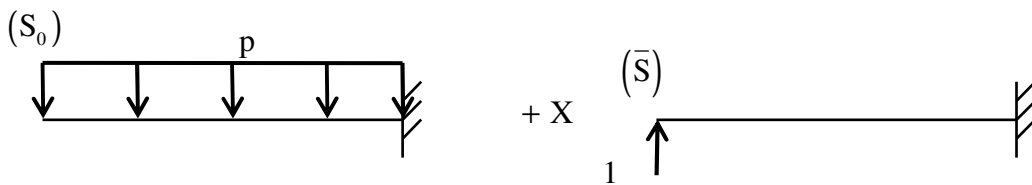


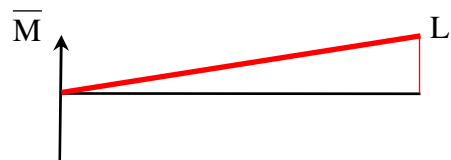
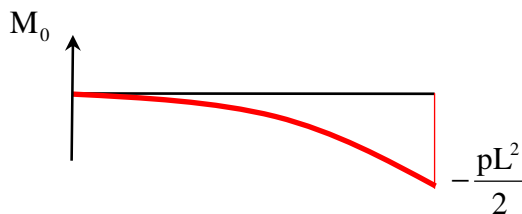
Fig. 4.4 – Poutre hyperstatique degré 1 – Décomposition

Le moment $M = M_0 + X\bar{M}$ avec une inconnue de type force est statiquement admissible.

On exprime la condition à la limite cinématique en appliquant BdF avec comme système auxiliaire (\bar{S})

$$1 \times 0 = \int \frac{M\bar{M}}{EI} ds = \int \frac{M_0\bar{M}}{EI} ds + X \int \frac{\bar{M}\bar{M}}{EI} ds$$

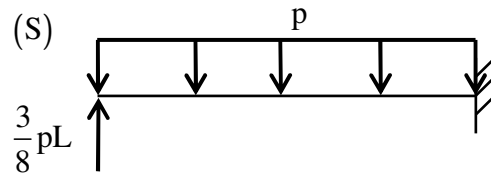
A l'aide des intégrales de MOHR :



$$\lambda_{01} = \int \frac{M_0\bar{M}}{EI} ds = \frac{1}{EI} \frac{1}{4} \left(-\frac{pL^2}{2} \right) LL = -\frac{pL^4}{8EI}$$

$$\lambda_{11} = \int \frac{\bar{M}\bar{M}}{EI} ds = \frac{1}{EI} \frac{1}{3} LLL = \frac{L^3}{3EI}$$

$$0 = \lambda_{01} + \lambda_{11}X \quad X = -\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{11}} = \frac{3}{8}pL$$



On peut tracer le moment fléchissant comme combinaison linéaire des diagrammes M_0 et \bar{M} ou en reprenant le dernier schéma mécanique équivalent.

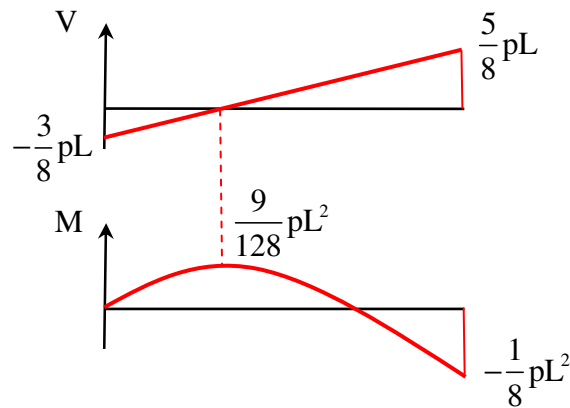
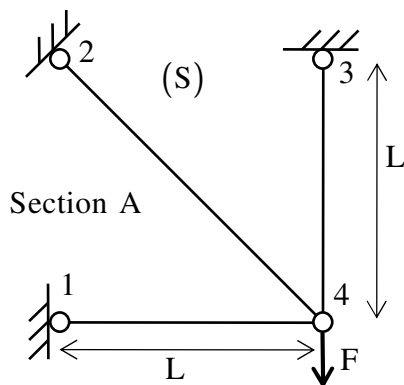


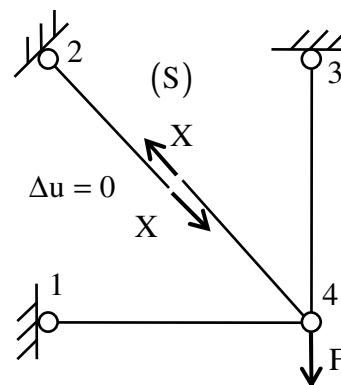
Fig. 4.5 – Poutre hyperstatique degré 1 – Sollicitations

4.2.2 Treillis hyperstatique de degré 1

Exemple :



Système équivalent :



On décompose le système (S) : $(S) = (S_0) + X(\bar{S})$

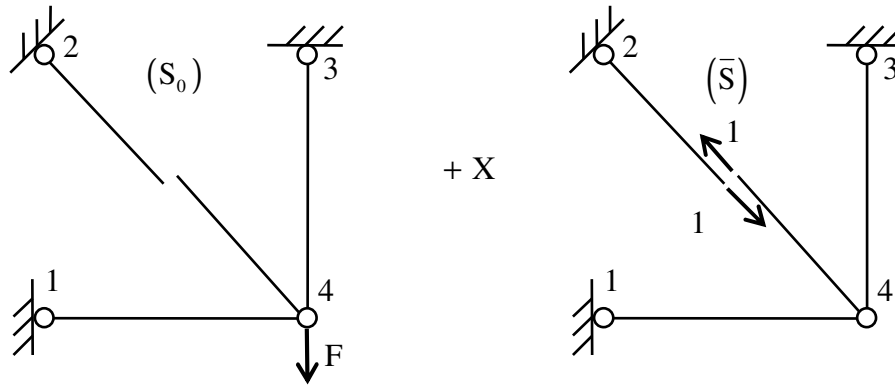


Fig. 4.6 – Treillis hyperstatique – Décomposition

barre	1-4	2-4	3-4
N_0	0	0	F
\bar{N}	$-\sqrt{2}/2$	1	$-\sqrt{2}/2$
L_i	L	$\sqrt{2}L$	L

L'effort normal $N = N_0 + X\bar{N}$ avec une inconnue de type force est statiquement admissible.

On exprime la condition à la limite cinématique en appliquant BdF avec comme système auxiliaire (\bar{S})

$$1 \times 0 = \int \frac{N\bar{N}}{EA} ds = \int \frac{N_0\bar{N}}{EA} ds + X \int \frac{\bar{N}\bar{N}}{EA} ds = \sum_i \frac{N_{0,i}\bar{N}_i}{EA_i} L_i + X \sum_i \frac{\bar{N}_i\bar{N}_i}{EA_i} L_i$$

$$\lambda_{01} = \sum_i \frac{N_{0,i}\bar{N}_i}{EA_i} L_i = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{FL}{EA}$$

$$\lambda_{11} = \sum_i \frac{\bar{N}_i\bar{N}_i}{EA_i} L_i = (1 + \sqrt{2}) \frac{L}{EA}$$

$$0 = \lambda_{01} + \lambda_{11}X \quad X = -\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{11}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} F$$

On en déduit les efforts normaux dans les barres :

barre	1-4	2-4	3-4
N	$-\frac{\sqrt{2}-1}{2} F$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2} F$	$\frac{3-\sqrt{2}}{2} F$

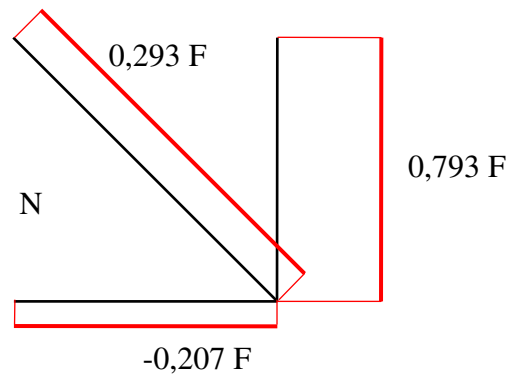
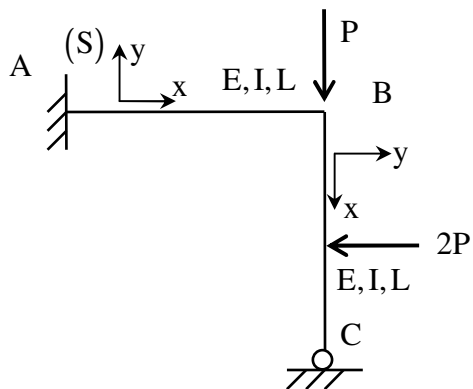


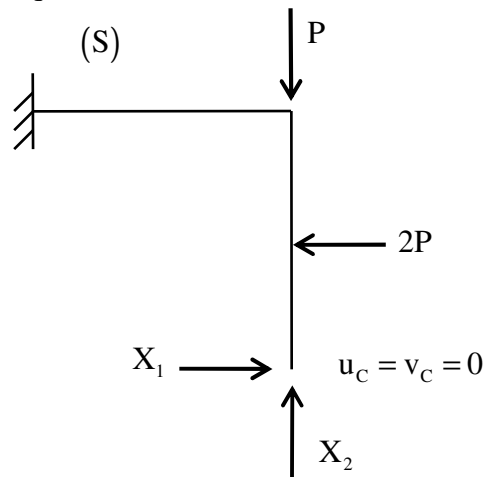
Fig. 4.7 – Treillis hyperstatique – Effort normal

4.2.3 Structure hyperstatique de degré 2

Exemple :



Système équivalent :



$$\text{Décomposition : } (S) = (S_0) + X_1(\bar{S}_1) + X_2(\bar{S}_2)$$

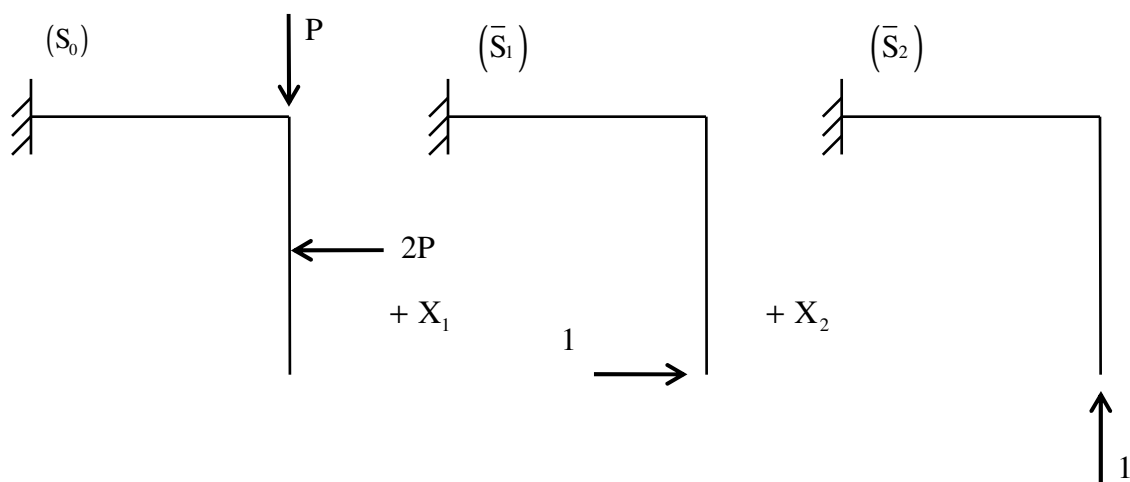


Fig. 4.8 – Structure hyperstatique degré 2 – Décomposition

$$M = M_0 + X_1\bar{M}_1 + X_2\bar{M}_2$$

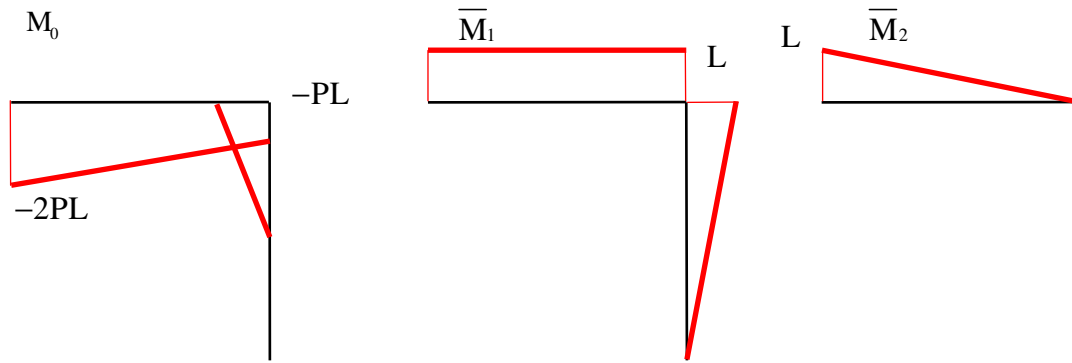


Fig. 4.9 – Structure hyperstatique degré 2 – Sollicitations élémentaires

On applique deux fois BdF avec les deux systèmes auxiliaires (\bar{S}_1) et (\bar{S}_2) :

$$v_c = 0 \quad 1 \times 0 = \int \frac{M\bar{M}_1}{EI} ds = \int \frac{M_0\bar{M}_1}{EI} ds + X_1 \int \frac{\bar{M}_1\bar{M}_1}{EI} ds + X_2 \int \frac{\bar{M}_2\bar{M}_1}{EI} ds$$

$$u_c = 0 \quad 1 \times 0 = \int \frac{M\bar{M}_2}{EI} ds = \int \frac{M_0\bar{M}_2}{EI} ds + X_1 \int \frac{\bar{M}_1\bar{M}_2}{EI} ds + X_2 \int \frac{\bar{M}_2\bar{M}_2}{EI} ds$$

$$\text{On pose } \lambda_{0j} = \int \frac{M_0\bar{M}_j}{EI} ds \text{ et } \lambda_{ij} = \int \frac{\bar{M}_i\bar{M}_j}{EI} ds$$

A l'aide des intégrales de MOHR :

$$\lambda_{01} = \frac{3}{4}(-2PL)L\frac{L}{EI} + \frac{5}{12}(-PL)L\frac{L}{2EI} = -\frac{41}{24}\frac{PL^3}{EI}$$

$$\lambda_{02} = \frac{5}{12}(-2PL)L\frac{L}{EI} = -\frac{5}{6}\frac{PL^3}{EI}$$

$$\lambda_{11} = LL\frac{L}{EI} + \frac{1}{3}LL\frac{L}{EI} = \frac{4}{3}\frac{L^3}{EI} \quad \lambda_{22} = \frac{1}{3}LL\frac{L}{EI} = \frac{1}{3}\frac{L^3}{EI}$$

$$\lambda_{12} = \lambda_{21} = \frac{1}{2}LL\frac{L}{EI} = \frac{1}{2}\frac{L^3}{EI}$$

L'écriture matricielle des 2 équations donne :

$$\frac{L^3}{EI} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \frac{PL^3}{EI} \begin{pmatrix} -\frac{41}{24} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 41 \\ 20 \end{pmatrix} P$$

Par suite :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{28} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 41 \\ 20 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \frac{11}{28} \\ \frac{14}{28} \\ \frac{37}{28} \\ \frac{28}{28} \end{pmatrix} P$$

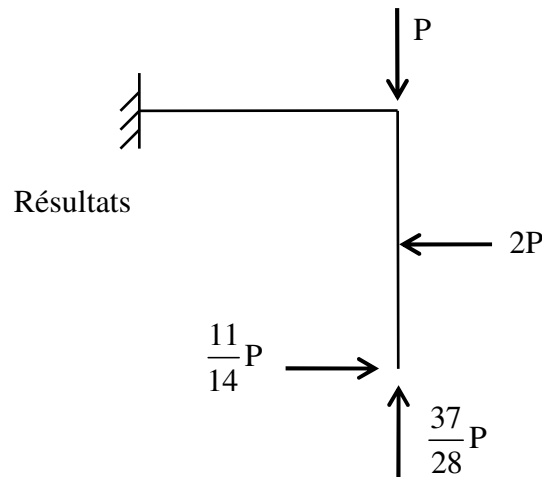


Fig. 4.10 – Structure hyperstatique degré 2 – Schéma mécanique équivalent

On peut tracer le moment fléchissant comme combinaison linéaire des diagrammes $M = M_0 + X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2$ ou en reprenant le dernier schéma mécanique équivalent.

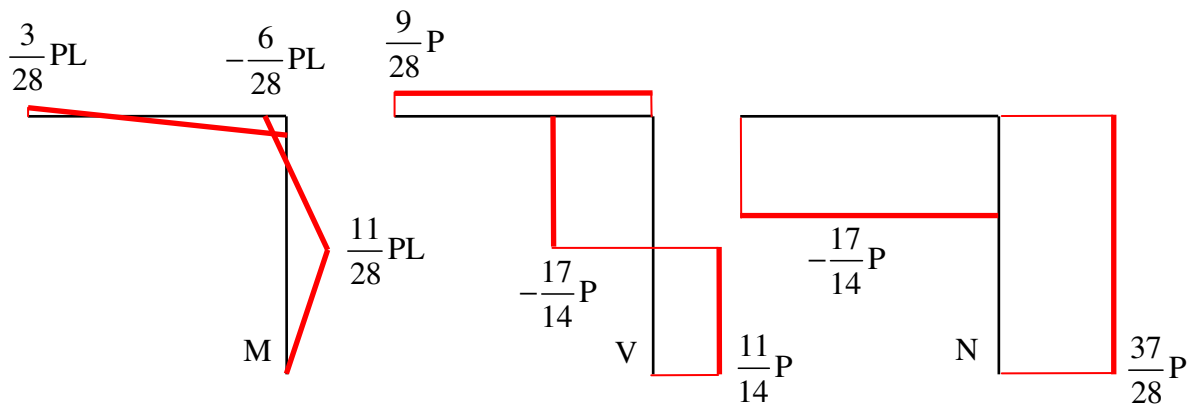


Fig. 4.11 – Structure hyperstatique degré 2 – Sollicitations

4.2.4 Généralisation

Soit une structure hyperstatique de degré n dont on cherche les sollicitations.

On choisit une structure isostatique associée avec n inconnues hyperstatiques

On peut libérer un degré de liberté d'une liaison externe et introduire comme inconnue : l'action de liaison, le déplacement correspondant est nul dans une liaison parfaite.

Exemple :



Fig. 4.12 – Inconnues hyperstatique – Action de liaison

On peut libérer un degré de liberté d'une liaison interne et introduire comme inconnue : la sollicitation correspondante, le déplacement relatif correspondant est nul.

Exemples :

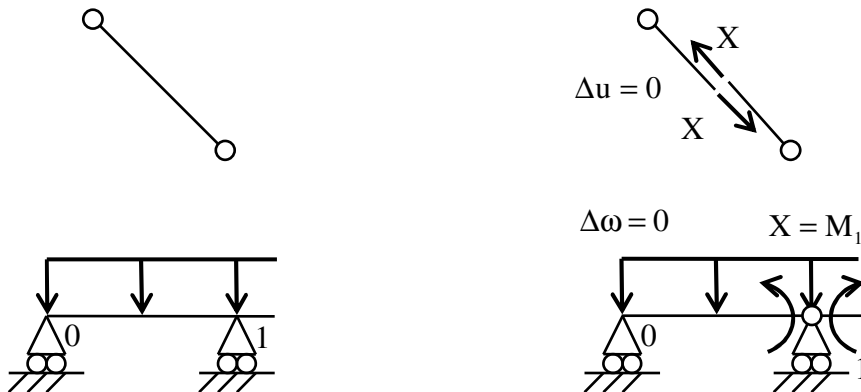


Fig. 4.13 – Inconnues hyperstatique – Sollicitation

On détermine les sollicitations dans les n systèmes auxiliaires correspondant à une valeur unitaire de chaque inconnue hyperstatique : $(S) = (S_0) + \sum_i X_i (\bar{S}_i)$

Décomposition des sollicitations :

$$N = N_0 + \sum_i X_i \bar{N}_i \quad V = V_0 + \sum_i X_i \bar{V}_i \quad M = M_0 + \sum_i X_i \bar{M}_i$$

On exprime les n conditions aux limites cinématiques pour obtenir un système linéaire :

$$[\lambda_{0j}] + [\lambda_{ij}] [X_j] = [0]$$

Avec :

$$\lambda_{0j} = \int_{\text{struct.}} \frac{N_0 \bar{N}_j}{EA} + \frac{V_0 \bar{V}_j}{GA_y} + \frac{M_0 \bar{M}_j}{EI} ds \quad \text{En général : } \lambda_{0j} = \int_{\text{struct.}} \frac{M_0 \bar{M}_j}{EI} ds$$

$$\lambda_{ij} = \int_{\text{struct.}} \frac{\bar{N}_i \bar{N}_j}{EA} + \frac{\bar{V}_i \bar{V}_j}{GA_y} + \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} ds \quad \text{En général : } \lambda_{ij} = \int_{\text{struct.}} \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} ds$$

On résout le système linéaire :

$$[X_j] = -[\lambda_{ij}]^{-1} [\lambda_{0j}]$$

On représente le schéma mécanique du système équivalent déterminé

On détermine les sollicitations à l'aide de ce schéma ou à l'aide de la décomposition des sollicitations

Remarque :

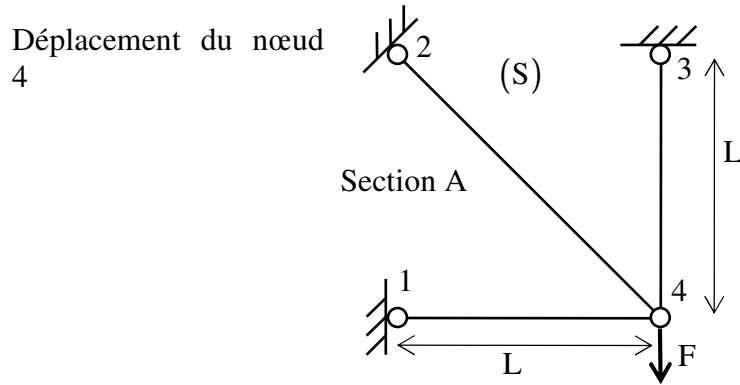
La matrice $[\lambda_{ij}]$ s'appelle matrice de souplesse, elle est symétrique définie positive

Le terme λ_{ij} représente le déplacement selon X_j d'une force unitaire $X_i = 1$

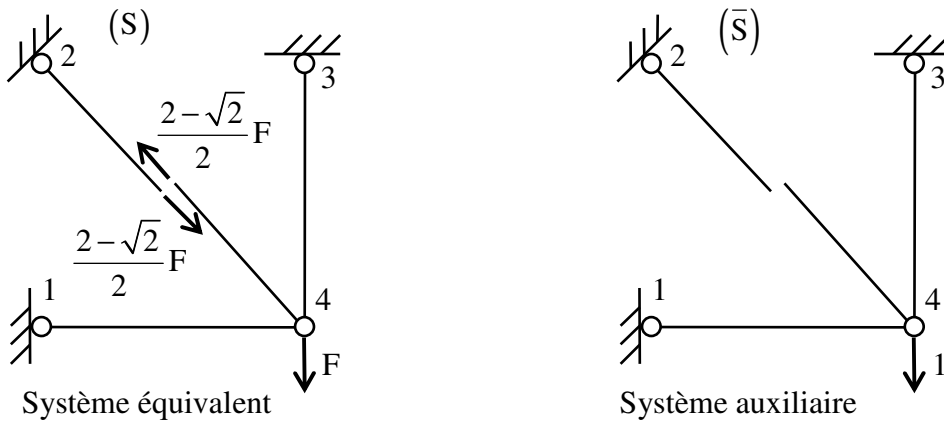
La symétrie découle donc du théorème de réciprocité

4.3 Calcul d'un déplacement en un point

Exemple 1 :



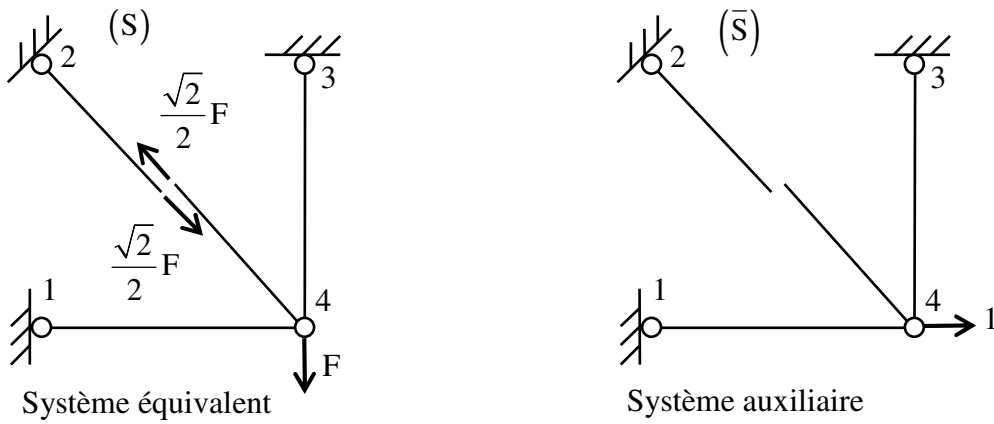
Déplacement vertical du nœud 4 :



barre	1-4	2-4	3-4
N	$-\frac{\sqrt{2}-1}{2}F$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}F$	$\frac{3-\sqrt{2}}{2}F$
\bar{N}	0	0	1

$$V_4 = 1 \times \frac{3-\sqrt{2}}{2} F \times \frac{L}{EA} = \frac{3-\sqrt{2}}{2} \frac{FL}{EA}$$

Déplacement horizontal du nœud 4 :

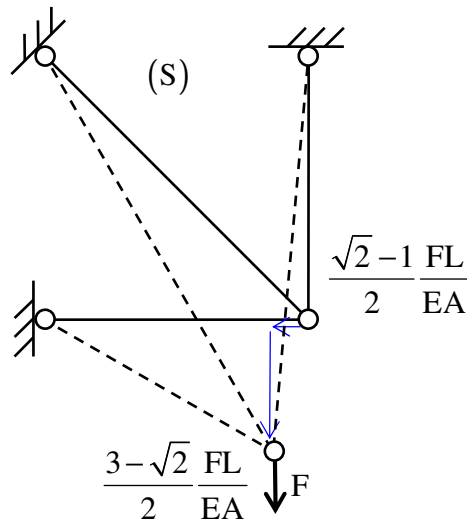


barre	1-4	2-4	3-4
N	$-\frac{\sqrt{2}-1}{2} F$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2} F$	$\frac{3-\sqrt{2}}{2} F$
\bar{N}	1	0	0

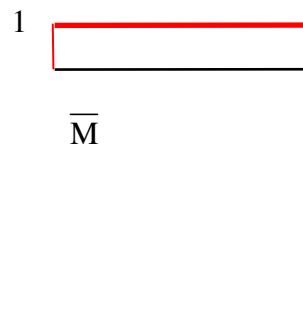
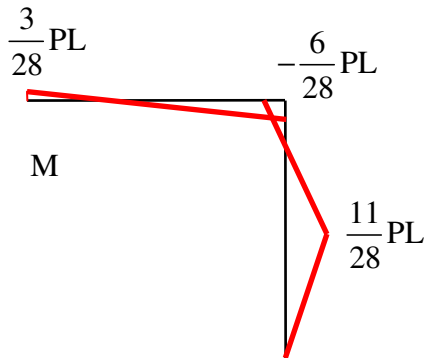
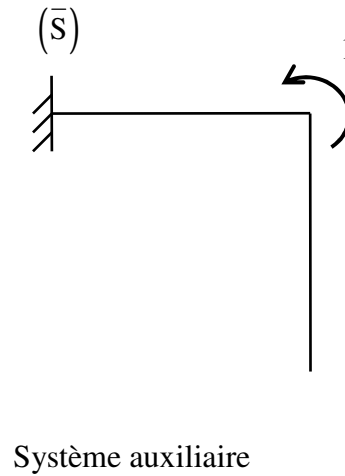
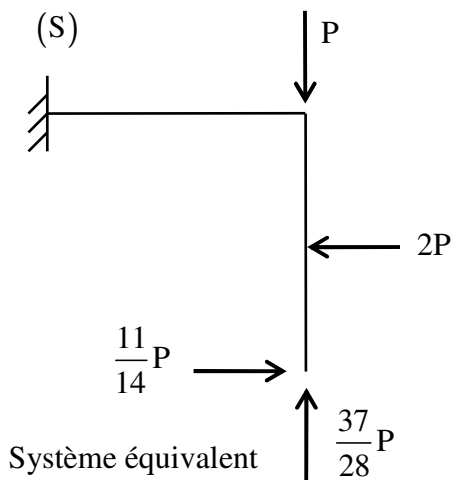
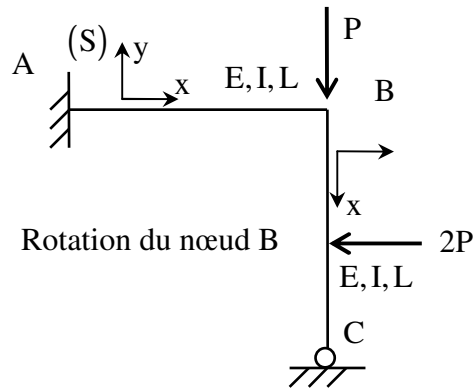
$$U_4 = 1 \times -\frac{\sqrt{2}-1}{2} F \times \frac{L}{EA} = -\frac{\sqrt{2}-1}{2} \frac{FL}{EA}$$

Le signe négatif indique un déplacement à l'opposé de la force unitaire, donc à gauche.

En résumé :



Exemple 2 :



A l'aide des intégrales de MOHR :

$$\omega_B = -\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{3}{28} PL \times \frac{L}{EI} = -\frac{3}{56} \frac{PL^2}{EI}$$

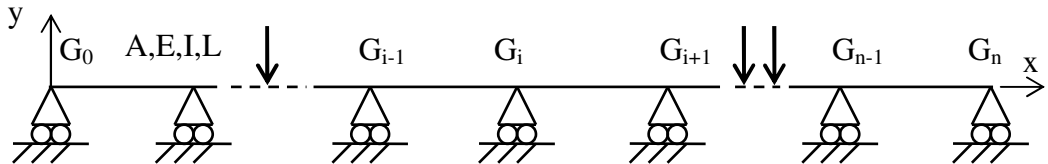
Le signe négatif indique une rotation de sens horaire (couple unitaire de sens trigonométrique)

Chapitre 5 Formule des 3 moments

5.1 Mise en place

La difficulté de la méthode des forces réside dans le choix de la structure isostatique associée. Le cas particulier des poutres continues permet un choix canonique d'une structure isostatique associée, un algorithme peut donc être établi et des logiciels fonctionnent selon cette méthode.

Une poutre continue est une poutre droite reposant sur plus de deux appuis simples, soumise à des charges verticales et des couples.



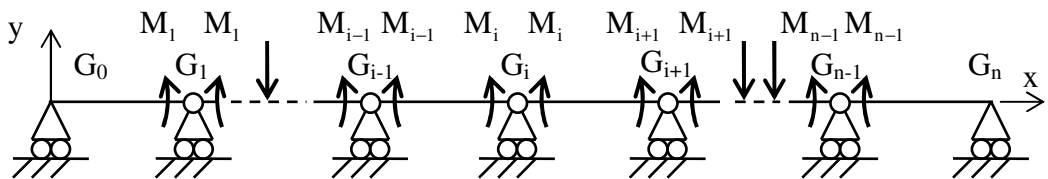
Travée :	1		i	i+1		n
Longueur :	L_1		L_i	L_{i+1}		L_n
Inertie I_{Gz} :	I_1		I_i	I_{i+1}		I_n
Module E	E_1		E_i	E_{i+1}		E_n

C'est une structure hyperstatique de degré n-1

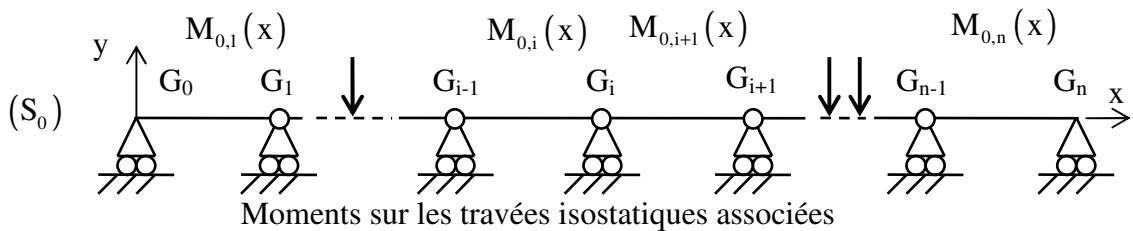
Les inconnues hyperstatiques seront les n-1 moments sur appuis intermédiaires :

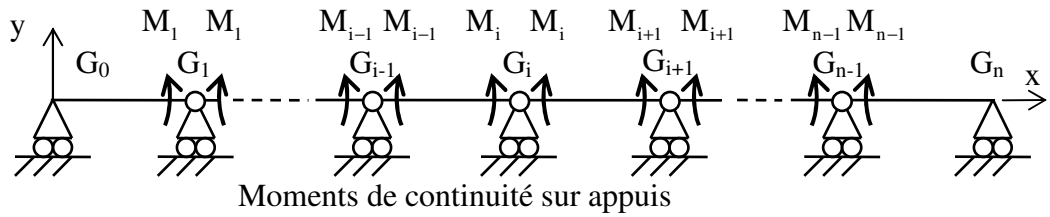
$$M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$$

Système isostatique associé :

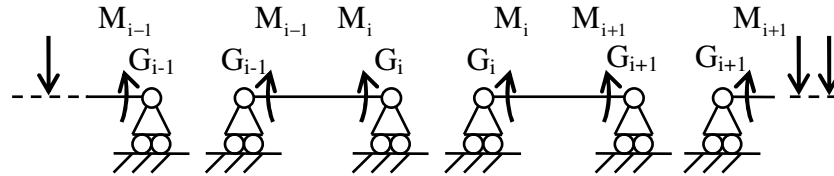


Décomposition :

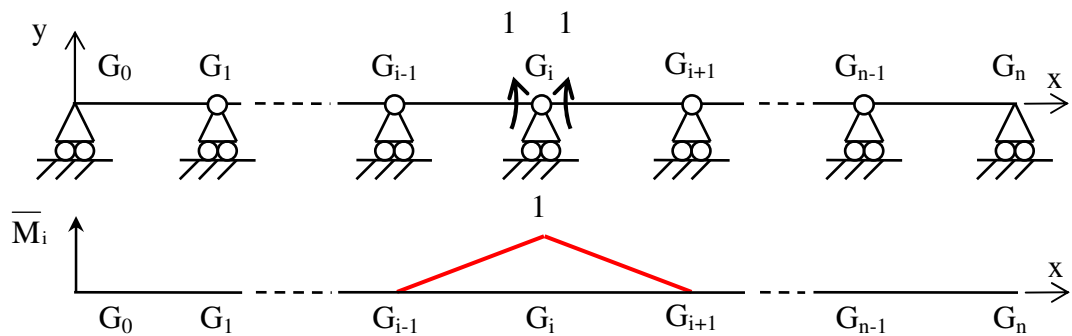




Remarque : Chaque travée se comporte indépendamment des autres :



Système auxiliaire (\bar{S}_i)



Equation relative à $\Delta\omega_i = 0$

$$\lambda_{0i} + \sum_j \lambda_{ij} M_j = 0$$

$$\lambda_{0i} + \lambda_{i,i-1} M_{i-1} + \lambda_{i,i} M_i + \lambda_{i,i+1} M_{i+1} = 0$$

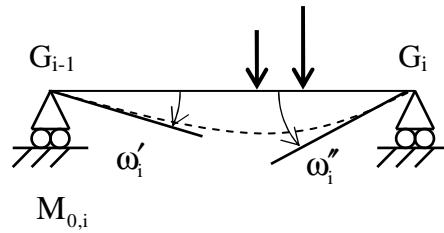
$$\lambda_{0i} = \int_{G_{i-1}}^{G_i} M_{0,i} \frac{x}{L_i} \frac{dx}{E_i I_i} + \int_{G_i}^{G_{i+1}} M_{0,i+1} \left(1 - \frac{x}{L_{i+1}}\right) \frac{dx}{E_{i+1} I_{i+1}}$$

$$\lambda_{i,i-1} = \int_{G_{i-1}}^{G_i} \frac{x}{L_i} \left(1 - \frac{x}{L_i}\right) \frac{dx}{E_i I_i}$$

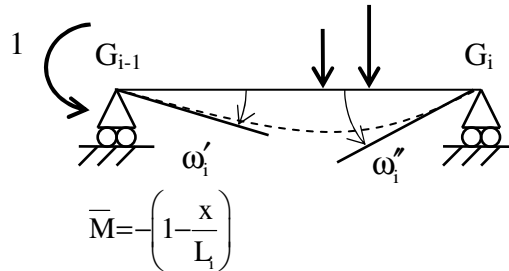
$$\lambda_{i,i} = \int_{G_{i-1}}^{G_i} \left(\frac{x}{L_i}\right)^2 \frac{dx}{E_i I_i} + \int_{G_i}^{G_{i+1}} \left(1 - \frac{x}{L_{i+1}}\right)^2 \frac{dx}{E_{i+1} I_{i+1}}$$

$$\lambda_{i,i+1} = \int_{G_i}^{G_{i+1}} \frac{x}{L_{i+1}} \left(1 - \frac{x}{L_{i+1}}\right) \frac{dx}{E_{i+1} I_{i+1}}$$

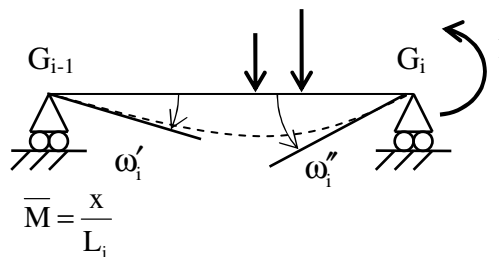
On appelle ω'_i et ω''_i les rotations aux appuis de la travée i isostatique associée.



Système auxiliaire :



$$\omega'_i = - \int_{G_{i-1}}^{G_i} M_{0,i} \left(1 - \frac{x}{L_i}\right) \frac{dx}{E_i I_i}$$



$$\omega''_i = \int_{G_{i-1}}^{G_i} M_{0,i} \frac{x}{L_i} \frac{dx}{E_i I_i}$$

$$\lambda_{0i} = \omega''_i - \omega'_{i+1} = -(\omega'_{i+1} - \omega''_i)$$

Cas : Déformations d'effort tranchant négligées devant celles du moment fléchissant.
 E et I sont constants dans chaque travée.
 Pas de dénivellation d'appuis.

$$\lambda_{i,i-1} = \frac{L_i}{6E_i I_i} \quad \lambda_{i,i} = \frac{L_i}{3E_i I_i} + \frac{L_{i+1}}{3E_{i+1} I_{i+1}} \quad \lambda_{i,i+1} = \frac{L_{i+1}}{6E_{i+1} I_{i+1}}$$

D'où :

$$\frac{L_i}{6E_i I_i} M_{i-1} + 2 \left(\frac{L_i}{6E_i I_i} + \frac{L_{i+1}}{6E_{i+1} I_{i+1}} \right) M_i + \frac{L_{i+1}}{6E_{i+1} I_{i+1}} M_{i+1} = \omega'_{i+1} - \omega''_i$$

L, E, I, \omega' et \omega'' ont des indices de travée
 M a un indice d'appui


Cas : Poutre continue d'inertie constante I et de module d'élasticité constant E.

$$L_i M_{i-1} + 2(L_i + L_{i+1}) M_i + L_{i+1} M_{i+1} = 6EI(\omega'_{i+1} - \omega''_i)$$

On peut écrire cette équation autant de fois qu'il y a d'appuis intermédiaire : n-1
On détermine ainsi les n-1 inconnues hyperstatiques.

A chaque travée, on doit considérer la travée isostatique associée et déterminer les rotations aux appuis.

Exemples de rotations aux extrémités de travées isostatiques :



$$\omega' = -\frac{FL^2}{16EI} \quad \omega'' = \frac{FL^2}{16EI}$$

$$\omega' = -\frac{pL^3}{24EI} \quad \omega'' = \frac{pL^3}{24EI}$$

5.2 Dénivellations sur appuis

Considérons un cas de charge supplémentaire : les déplacements verticaux des nœuds G_i sont imposés à v_i

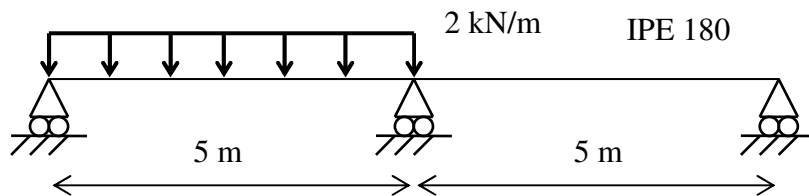
Soit Ω_i la rotation de la travée isostatique associée sous l'effet des dénivellations sur appuis :

$$\Omega_i = \frac{v_i - v_{i-1}}{L_i}$$

On montre que la formule des 3 moments devient :

$$\frac{L_i}{6E_i I_i} M_{i-1} + 2 \left(\frac{L_i}{6E_i I_i} + \frac{L_{i+1}}{6E_{i+1} I_{i+1}} \right) M_i + \frac{L_{i+1}}{6E_{i+1} I_{i+1}} M_{i+1} = \omega'_{i+1} - \omega''_i + \Omega_{i+1} - \Omega_i$$

5.3 Exemple



$$\omega'_1 = -\frac{125 \cdot 10^3}{12EI} \quad \omega''_1 = \frac{125 \cdot 10^3}{12EI}$$

$$\omega'_2 = 0 \quad \omega''_2 = 0$$

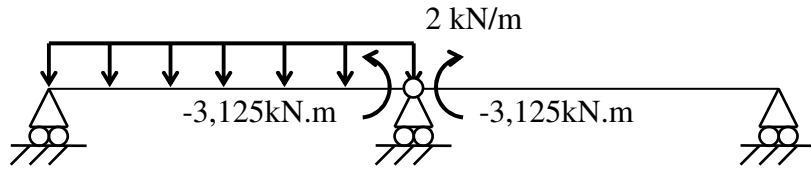
$$M_0 = 0 \quad M_2 = 0$$

Equation des 3 moments pour $i = 1$

$$5 \times 0 + 2(5+5)M_1 + 5 \times 0 = 6EI \left(0 - \frac{125 \cdot 10^3}{12EI} \right)$$

$$\text{D'où : } M_1 = -3,125 \text{ kN.m}$$

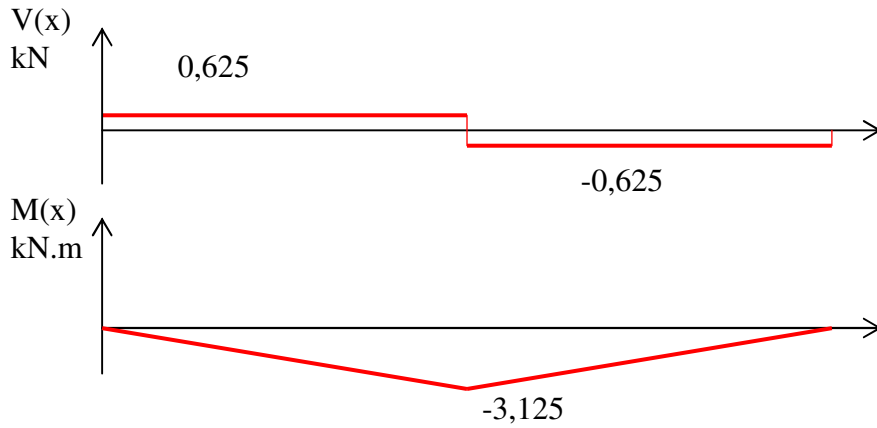
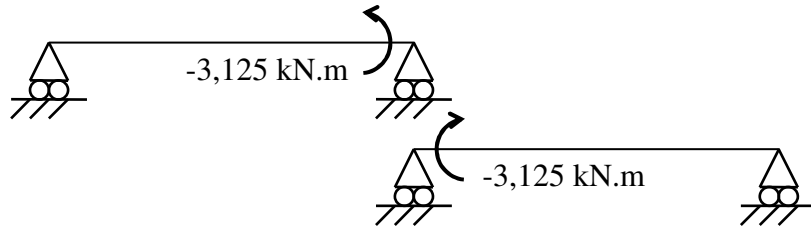
Système équivalent :



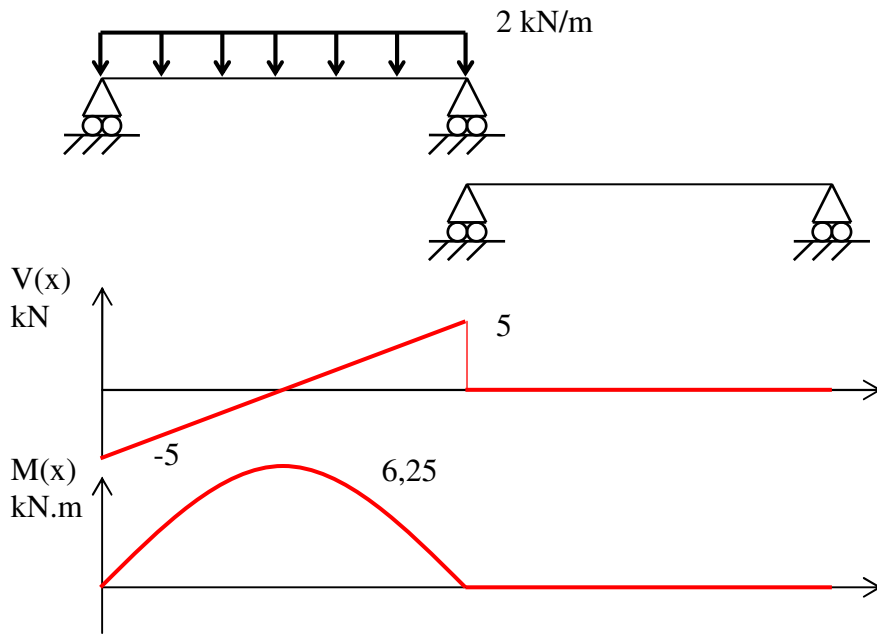
Chaque travée est totalement indépendante ; on peut en fait l'étude séparément.

On décompose ce système en un cas de charge : « moments sur appuis » et « chargement extérieur sur les travées isostatiques »

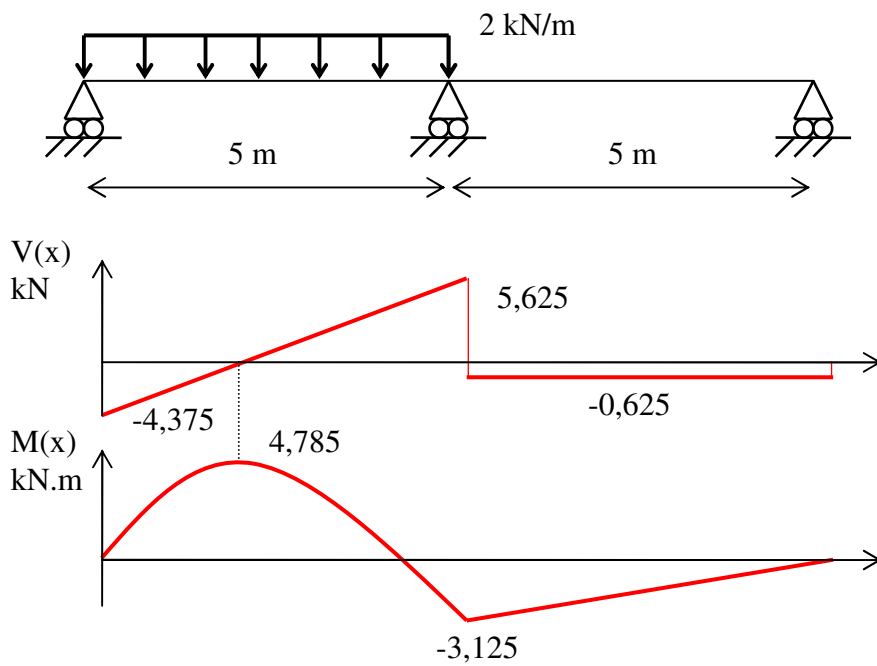
Cas de charge : moments sur appuis (ou moments de continuité)



Cas de charge : chargement extérieur sur les travées isostatiques

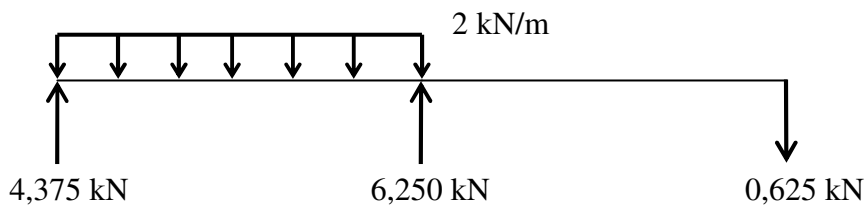


Principe de superposition



Remarque :

La courbe d'effort tranchant permet de déduire les actions de liaison



L'appui de droite doit avoir un comportement bi latéral.

Chapitre 6 Méthode des déplacements

Restrictions :

- Modèle de BERNOULLI
- Problème plan
- Poutres droites, section constante
- Liaisons parfaites
- Matériau élastique linéaire

6.1 Mise en place

Le principe de la méthode des déplacements est de déterminer une famille paramétrée de champs de déplacements cinématiquement admissibles (contenant le champ réel), d'exprimer les conditions aux limites statiques pour en déduire les paramètres correspondant au champ de déplacement réel.

On décompose la structure plane en poutres et nœuds

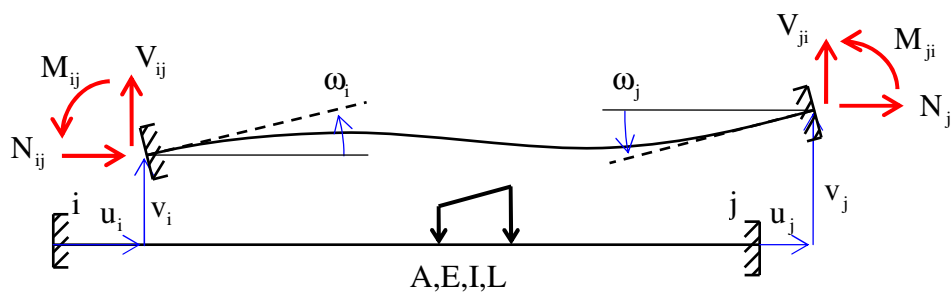
On paramètre les champs de déplacements cinématiquement admissible par les déplacements aux nœuds u_i, v_i, ω_i

6.2 Matrice de rigidité élémentaire d'une poutre

6.2.1 Notations

Déterminations des efforts aux extrémités en fonctions des inconnues cinématiques

Les efforts et les déplacements aux extrémités de chaque poutre ij sont donnés dans le repère local :



Remarque :

Les sollicitations aux extrémités sont donc :

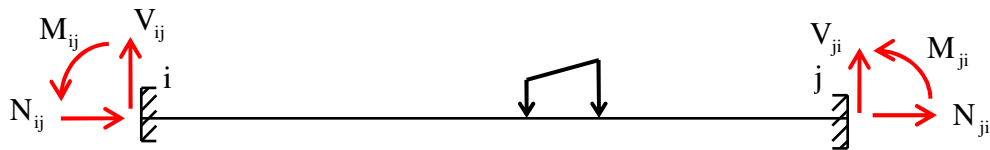
$$\begin{cases} N(0) = -N_{ij} \\ V(0) = -V_{ij} \\ M(0) = -M_{ij} \end{cases} \quad \begin{cases} N(L) = N_{ji} \\ V(L) = V_{ji} \\ M(L) = M_{ji} \end{cases}$$

La linéarité du problème nous amène à chercher une matrice, appelée matrice de rigidité élémentaire telle que :

$$\begin{bmatrix} N_{ij} \\ V_{ij} \\ M_{ij} \\ N_{ji} \\ V_{ji} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = [K_e] \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \omega_i \\ u_j \\ v_j \\ \omega_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{ij}^0 \\ V_{ij}^0 \\ M_{ij}^0 \\ N_{ji}^0 \\ V_{ji}^0 \\ M_{ji}^0 \end{bmatrix}$$

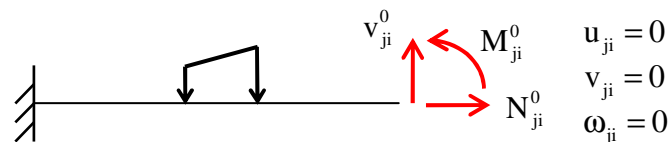
On étudie séparément l'incidence du chargement extérieur et de chaque déplacement élémentaire

6.2.1 Chargement extérieur



Les efforts aux extrémités de la poutre correspondent aux actions de liaison dans une poutre bi encastrée

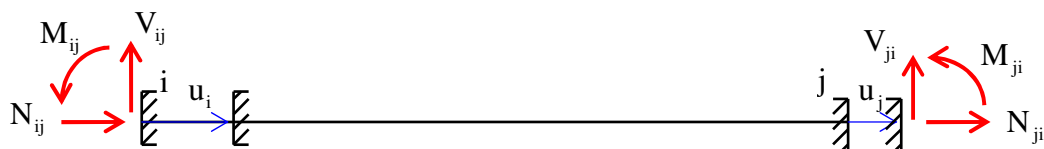
Ils peuvent être calculés par la méthode des forces.



Exemple :

$M_{ij}^0 = \frac{FL}{8}$	$M_{ji}^0 = -\frac{FL}{8}$
$M_{ij}^0 = \frac{pL^2}{12}$	$M_{ji}^0 = -\frac{pL^2}{12}$
$N_{ij} = N_{ij}^0$	$N_{ji} = N_{ji}^0$
$V_{ij} = V_{ij}^0$	$V_{ji} = V_{ji}^0$
$M_{ij} = M_{ij}^0$	$M_{ji} = M_{ji}^0$

6.2.2 Déplacements u_i, u_j

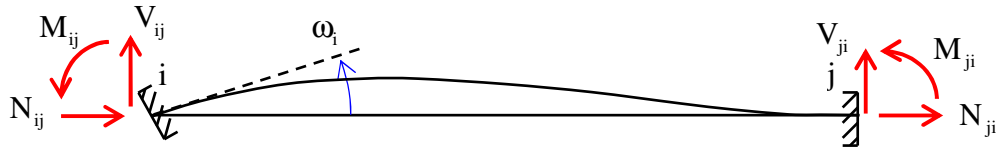


$$\epsilon(x) = \frac{u_j - u_i}{L} \quad \sigma(x) = E \frac{u_j - u_i}{L} \quad N(x) = N_{ji} = -N_{ij} = \frac{EA}{L} (u_j - u_i)$$

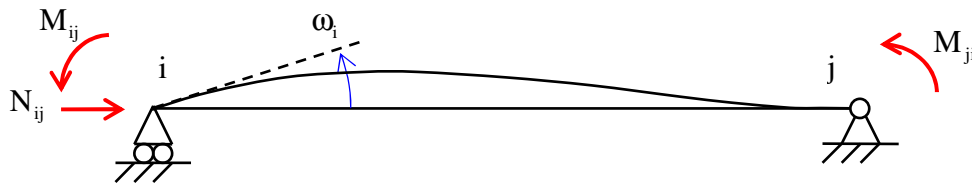
$$N_{ij} = -\frac{EA}{L}(u_j - u_i) \qquad N_{ji} = \frac{EA}{L}(u_j - u_i)$$

6.2.3 Rotations ω_i, ω_j

On considère $\omega_i, \omega_j = 0$



Système équivalent isostatique soumis à 3 forces indépendantes :



$$\text{Sollicitations : } \begin{cases} N(x) = -N_{ij} \\ V(x) = -\frac{M_{ij} + M_{ji}}{L} \\ M(x) = -M_{ij}\left(1 - \frac{x}{L}\right) + M_{ji} \frac{x}{L} \end{cases}$$

Par la méthode des forces :

$$\begin{cases} N_{ij} = 0 \\ 2M_{ij} - M_{ji} = \frac{6EI}{L} \omega_i \\ -M_{ij} + 2M_{ji} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} M_{ij} = \frac{4EI}{L} \omega_i \\ M_{ji} = \frac{2EI}{L} \omega_i \end{cases}$$

$$M_{ij} = k\omega_i$$

$$M_{ji} = k\lambda\omega_i$$

$$V_{ij} = \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L} = k \frac{1+\lambda}{L} \omega_i$$

$$V_{ji} = -V_{ij} = -k \frac{1+\lambda}{L} \omega_i$$

k : facteur de rigidité $k = \frac{4EI}{L}$

λ : facteur de transmission $\lambda = \frac{1}{2}$

Par symétrie $\omega_i = 0, \omega_j$:

$$V_{ij} = k \frac{1+\lambda}{L} \omega_j$$

$$V_{ji} = -k \frac{1+\lambda}{L} \omega_j$$

$$M_{ij} = k\lambda\omega_j$$

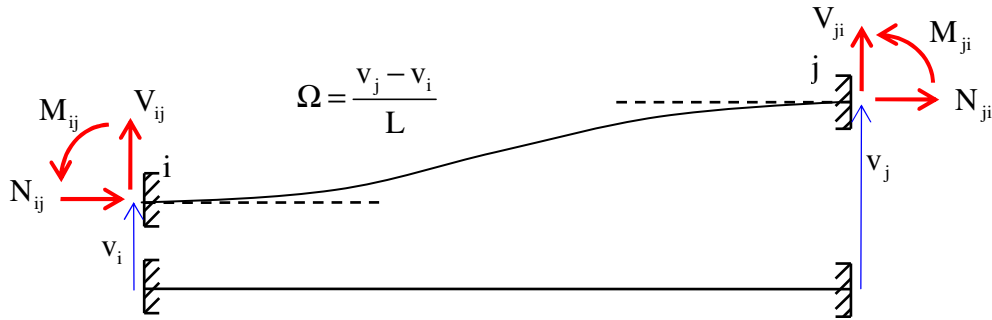
$$M_{ji} = k\omega_j$$

Par superposition :

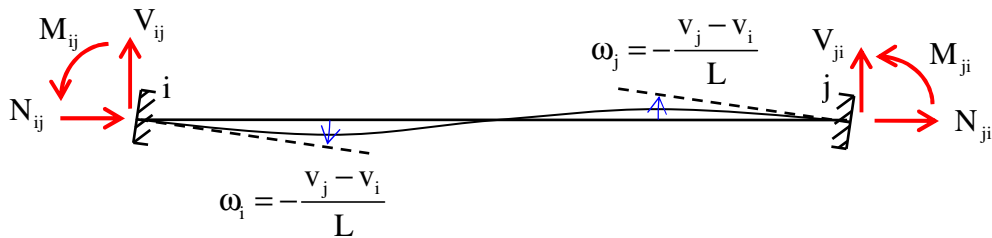
$$V_{ij} = k \frac{1+\lambda}{L} (\omega_i + \omega_j) \qquad V_{ji} = -k \frac{1+\lambda}{L} (\omega_i + \omega_j)$$

$$M_{ij} = k\omega_i + k\lambda\omega_j \qquad M_{ji} = k\lambda\omega_i + k\omega_j$$

6.2.4 Déplacements v_i, v_j



Problème équivalent :



$$V_{ij} = -2k \frac{1+\lambda}{L^2} (v_j - v_i) \qquad V_{ji} = 2k \frac{1+\lambda}{L^2} (v_j - v_i)$$

$$M_{ij} = -k \frac{1+\lambda}{L} (v_j - v_i) \qquad M_{ji} = -k \frac{1+\lambda}{L} (v_j - v_i)$$

6.2.5 Superposition

$$N_{ij} = -\frac{EA}{L} (u_j - u_i) + N_{ij}^0$$

$$N_{ji} = \frac{EA}{L} (u_j - u_i) + N_{ji}^0$$

$$V_{ij} = k \frac{1+\lambda}{L} (\omega_i + \omega_j) - 2k \frac{1+\lambda}{L^2} (v_j - v_i) + V_{ij}^0$$

$$V_{ji} = -k \frac{1+\lambda}{L} (\omega_i + \omega_j) + 2k \frac{1+\lambda}{L^2} (v_j - v_i) + V_{ji}^0$$

$$M_{ij} = k\omega_i + k\lambda\omega_j - k \frac{1+\lambda}{L} (v_j - v_i) + M_{ij}^0$$

$$M_{ji} = k\lambda\omega_i + k\omega_j - k \frac{1+\lambda}{L} (v_j - v_i) + M_{ji}^0$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} N_{ij} \\ V_{ij} \\ M_{ij} \\ N_{ji} \\ V_{ji} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 2k\frac{1+\lambda}{L^2} & k\frac{1+\lambda}{L} & 0 & -2k\frac{1+\lambda}{L^2} & k\frac{1+\lambda}{L} \\ 0 & k\frac{1+\lambda}{L} & k & 0 & -k\frac{1+\lambda}{L} & k\lambda \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -2k\frac{1+\lambda}{L^2} & -k\frac{1+\lambda}{L} & 0 & 2k\frac{1+\lambda}{L^2} & -k\frac{1+\lambda}{L} \\ 0 & k\frac{1+\lambda}{L} & k\lambda & 0 & -k\frac{1+\lambda}{L} & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \omega_i \\ u_j \\ v_j \\ \omega_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{ij}^0 \\ V_{ij}^0 \\ M_{ij}^0 \\ N_{ji}^0 \\ V_{ji}^0 \\ M_{ji}^0 \end{bmatrix}$$

En fonction des caractéristiques de la poutre :

$$\begin{aligned} N_{ij} &= -\frac{EA}{L}(u_j - u_i) + N_{ij}^0 \\ N_{ji} &= \frac{EA}{L}(u_j - u_i) + N_{ji}^0 \\ V_{ij} &= \frac{6EI}{L^2}(\omega_i + \omega_j) - \frac{12EI}{L^3}(v_j - v_i) + V_{ij}^0 \\ V_{ji} &= -\frac{6EI}{L^2}(\omega_i + \omega_j) + \frac{12EI}{L^3}(v_j - v_i) + V_{ji}^0 \\ M_{ij} &= \frac{4EI}{L}\omega_i + \frac{2EI}{L}\omega_j - \frac{6EI}{L^2}(v_j - v_i) + M_{ij}^0 \\ M_{ji} &= \frac{2EI}{L}\omega_i + \frac{4EI}{L}\omega_j - \frac{6EI}{L^2}(v_j - v_i) + M_{ji}^0 \end{aligned}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} N_{ij} \\ V_{ij} \\ M_{ij} \\ N_{ji} \\ V_{ji} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \omega_i \\ u_j \\ v_j \\ \omega_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{ij}^0 \\ V_{ij}^0 \\ M_{ij}^0 \\ N_{ji}^0 \\ V_{ji}^0 \\ M_{ji}^0 \end{bmatrix}$$

Remarques :

Cette matrice est symétrique :

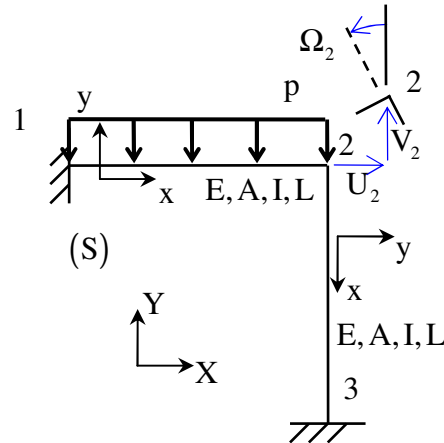
Cela découle du théorème de réciprocité

Cette matrice est singulière :

A une cinématique non nulle de solide rigide $u_i = u_j$ est associée des efforts nuls aux extrémités de la poutre.

6.3 Matrice de rigidité globale d'une structure

Exemple :



Les déplacements aux nœuds 1 et 3 sont nuls

La cinématique du problème est donc paramétrée par les déplacements du nœud 2 qui doivent être définis dans le repère global : U_2, V_2, Ω_2

Pour la poutre 1-2 :

$$u_1 = 0, v_1 = 0, \omega_1 = 0$$

$$N_{12} = -\frac{EA}{L} U_2$$

$$V_{12} = \frac{6EI}{L^2} \Omega_2 - \frac{12EI}{L^3} V_2 + \frac{pL}{2}$$

$$M_{12} = \frac{2EI}{L} \Omega_2 - \frac{6EI}{L^2} V_2 + \frac{pL^2}{12}$$

$$u_2 = U_2, v_2 = V_2, \omega_2 = \Omega_2$$

$$N_{21} = \frac{EA}{L} U_2$$

$$V_{21} = -\frac{6EI}{L^2} \Omega_2 + \frac{12EI}{L^3} V_2 + \frac{pL}{2}$$

$$M_{21} = \frac{4EI}{L} \Omega_2 - \frac{6EI}{L^2} V_2 - \frac{pL^2}{12}$$

Pour la poutre 2-3 :

$$u_2 = -V_2, v_2 = U_2, \omega_2 = \Omega_2$$

$$N_{23} = -\frac{EA}{L} V_2$$

$$V_{23} = \frac{6EI}{L^2} \Omega_2 + \frac{12EI}{L^3} U_2$$

$$M_{23} = \frac{4EI}{L} \Omega_2 + \frac{6EI}{L^2} U_2$$

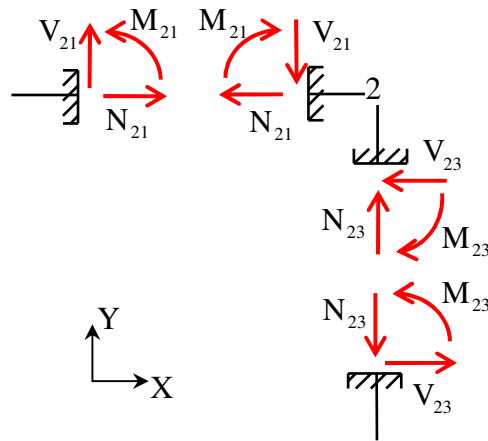
$$u_3 = 0, v_3 = 0, \omega_3 = 0$$

$$N_{32} = \frac{EA}{L} V_2$$

$$V_{32} = -\frac{6EI}{L^2} \Omega_2 - \frac{12EI}{L^3} U_2$$

$$M_{32} = \frac{2EI}{L} \Omega_2 + \frac{6EI}{L^2} U_2$$

On écrit les équations d'équilibre du nœud 2 :



$$\begin{cases} -N_{21} - V_{23} = 0 \\ -V_{21} + N_{23} = 0 \\ -M_{21} - M_{23} = 0 \end{cases}$$

Soit le système linéaire :

	Variable U_2		Variable Ω_2	
	↓	Variable V_2	↓	
Equation relative à U_2	→	$\begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{8EI}{L} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{pL}{2} \\ -\frac{pL^2}{12} \end{bmatrix}$	
Equation relative à V_2	→			
Equation relative à Ω_2	→			

Sous cette forme, la matrice est symétrique.

Application numérique :

Profilé métallique IPE180 de portée $L = 2$ m sous une charge de $p = 2$ kN/m

$E = 210\,000$ MPa, $I_z = 1317$ cm⁴ $A = 23,9$ cm²

On remarque que :

$$\frac{EI}{L^3} < \frac{EA}{L} \quad \alpha = \frac{\frac{EI}{L^3}}{\frac{EA}{L}} = \frac{I}{AL^2} = 0,00138$$

$$\begin{bmatrix} 1+12\alpha & 0 & 6\alpha \\ 0 & 1+12\alpha & -6\alpha \\ 6\alpha & -6\alpha & 8\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \Omega_2 L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha \frac{pL^4}{12EI}$$

$$\begin{bmatrix} 1,0165 & 0 & 0,0083 \\ 0 & 1,0165 & -0,0083 \\ 0,0083 & -0,0083 & 0,0110 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \Omega_2 L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7,9697 \\ 1,3283 \end{bmatrix} 10^{-6}$$

La résolution donne :

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \Omega_2 L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,9437 \\ -6,8964 \\ 116,0595 \end{bmatrix} 10^{-6}$$

On en déduit les efforts aux extrémités des poutres :

Pour la poutre 1-2 :

$$N_{12} = 236,824$$

$$N_{21} = -236,824$$

$$V_{12} = 2269,349$$

$$V_{21} = 1730,651$$

$$M_{12} = 855,770$$

$$M_{21} = -317,071$$

Pour la poutre 2-3 :

$$N_{23} = 1730,651$$

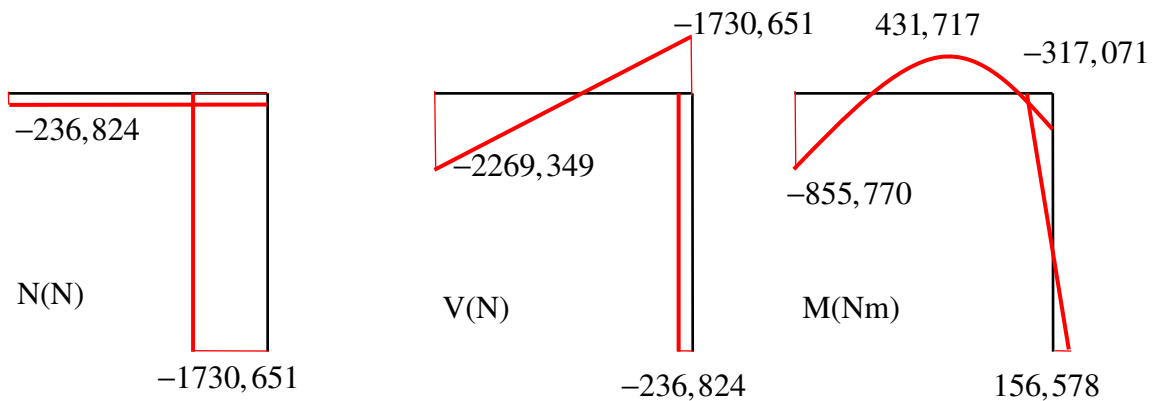
$$N_{32} = -1730,651$$

$$V_{23} = 236,824$$

$$V_{32} = -236,824$$

$$M_{23} = 317,071$$

$$M_{32} = 156,578$$



Chapitre 7 Méthode des rotations

7.1 Hypothèse simplificatrice

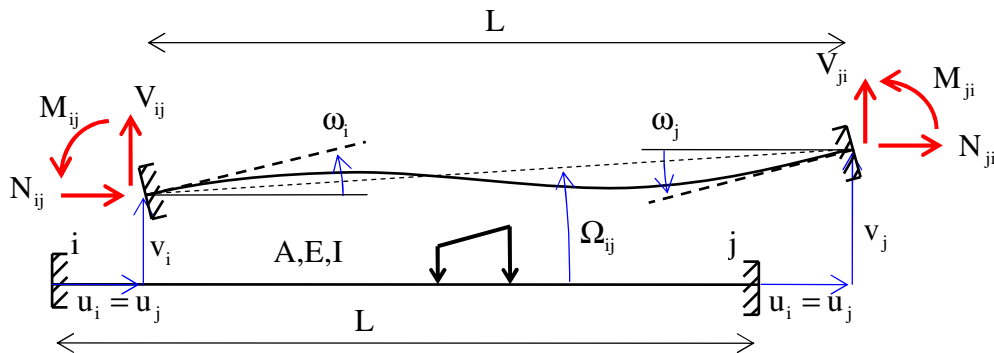
Afin de diminuer le nombre d'inconnues cinématiques, nous faisons l'hypothèse que la longueur des barres est invariante (hyp. lbi) : $u_i = u_j$

Cela équivaut à dire que l'on néglige les déformations d'effort normal devant celles du moment fléchissant, de ce fait cette hypothèse n'est pas envisageable pour les treillis.

Les actions aux extrémités N_{ij} et N_{ji} seront indéterminées, on tentera de les déterminer en écrivant les équations d'équilibre des nœuds.

Sous l'hypothèse des petites perturbations, une poutre ij subit une rotation d'ensemble :

$$\Omega_{ij} = \frac{v_j - v_i}{L} \text{ comptée positive dans le sens trigonométrique}$$



Les moments aux extrémités d'une poutre s'exprime en fonction des rotations ω_i, ω_j et de la rotation d'ensemble Ω_{ij}

$$M_{ij} = k\omega_i + k\lambda\omega_j - k(1+\lambda)\Omega_{ij} + M_{ij}^0$$

$$M_{ji} = k\lambda\omega_i + k\omega_j - k(1+\lambda)\Omega_{ij} + M_{ji}^0$$

En fonction des caractéristiques de la poutre :

$$M_{ij} = \frac{4EI}{L}\omega_i + \frac{2EI}{L}\omega_j - \frac{6EI}{L}\Omega_{ij} + M_{ij}^0$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L}\omega_i + \frac{4EI}{L}\omega_j - \frac{6EI}{L}\Omega_{ij} + M_{ji}^0$$

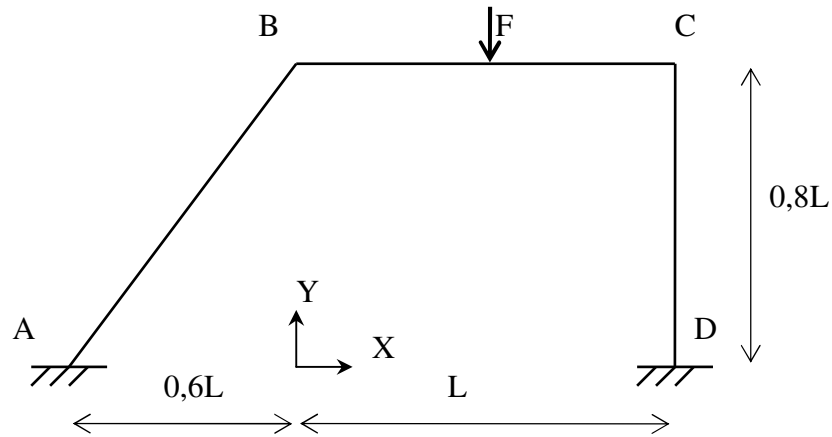
7.2 Etude cinématique

Cette hypothèse diminue le nombre de ddl (degré de liberté).

Pour déterminer le nombre de ddl indépendants d'un problème, on peut soit :

- Ecrire toutes les relations : $\vec{U}(A_j) = \vec{U}(A_i) + \vec{\Omega}_{ij} \wedge \overrightarrow{A_i A_j}$ en décrivant toute la structure
- Utiliser une technique graphique, dont le principe est de reporter sur un plan affine les points a_i tels que les vecteurs $\overrightarrow{Oa_i}$ représentent les vecteurs déplacements du point A_i
La relation vectorielle précédente nous impose : $\overrightarrow{a_i a_j} \wedge \overrightarrow{A_i A_j}$

Exemple :



Technique graphique :

$$\vec{U}(A) = \vec{U}(D) = \vec{0}$$

$$a = d = O$$

$$\overrightarrow{cd} \text{ perp. } \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{Oc} = U\vec{X}$$

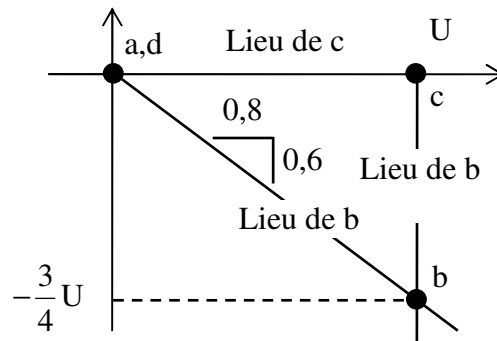
$$\overrightarrow{cb} \text{ perp. } \overrightarrow{CB}$$

b à la vertical de c

$$\overrightarrow{ab} \text{ perp. } \overrightarrow{AB}$$

b sur une droite de pente 0,6/0,8 passant par a

Construction de b



$$\vec{U}(A) = \vec{U}(D) = \vec{0}$$

$$\vec{U}(B) = U\vec{X} - 0,75U\vec{Y}$$

$$\vec{U}(C) = U\vec{X}$$

Dans l'exemple précédent :

Sans l'hypothèse lbi, on a 6 ddl :

$$U_B, V_B, \Omega_B, U_C, V_C, \Omega_C$$

Avec l'hypothèse lbi on a 3 ddl :

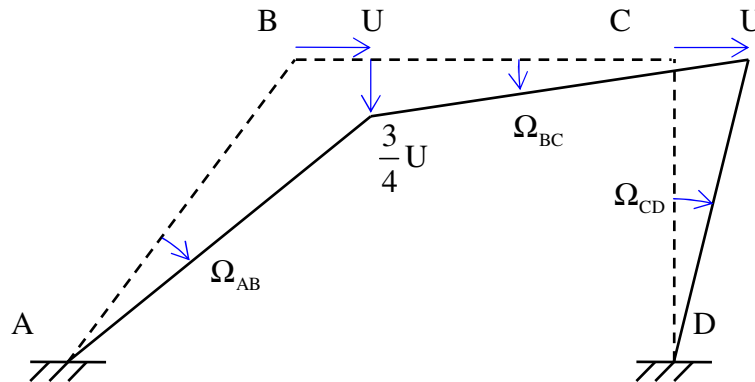
$$U, \Omega_B, \Omega_C$$

7.3 Rotations d'ensemble

Avec l'hypothèse lbi, on peut interpréter les ddl de translation comme des rotations d'ensemble.

Dans l'exemple précédent :

$$\Omega_{AB} = -\frac{U}{0,8L} = -1,25 \frac{U}{L} \quad \Omega_{BC} = \frac{3U}{4L} = 0,75 \frac{U}{L} \quad \Omega_{CD} = -\frac{U}{0,8L} = -1,25 \frac{U}{L}$$



Soit Ω la rotation d'ensemble de la poutre CD

$$\Omega_{AB} = \Omega \quad \Omega_{BC} = -0,6\Omega \quad \Omega_{CD} = \Omega$$

Les ddl indépendants de notre problème sont ainsi tous des rotations, d'où le nom de la méthode des rotations.

7.4 Mise en place des équations d'équilibre

A chaque ddl q_{i_0} , on associe une équation d'équilibre obtenue avec le PTV appliqué à un champ de déplacement virtuel $\delta q_{i_0}^* \neq 0, \delta q_i^* = 0$ si $i \neq i_0$

Nous décomposons la structure en nœuds et en poutres, les efforts aux extrémités des poutres deviennent des forces extérieures.

Le champ de déplacement virtuel doit être rigidifiant par poutre et tel que :

$$W_{\text{ext}}^* (N_{ij}) + W_{\text{ext}}^* (N_{ji}) = 0 \quad W_{\text{ext}}^* (V_{ij}) + W_{\text{ext}}^* (V_{ji}) = 0$$

Ceci est réalisable si les extrémités de poutres restent au contact des nœuds

L'application du PTV ne fera intervenir que les moments M_{ij} et M_{ji}

En fonctions des ddl du problème :

$$M_{ij} = \frac{4EI}{L} \Omega_i + \frac{2EI}{L} \Omega_j - \frac{6EI}{L} \Omega_{ij} + M_{ij}^0$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L} \Omega_i + \frac{4EI}{L} \Omega_j - \frac{6EI}{L} \Omega_{ij} + M_{ji}^0$$

Remarque : les rotations des nœuds dans les problèmes plans sont identiques dans le repère local ou global : $\omega_i = \Omega_i$

L'application du PTV donne :

$$W_{\text{ext}}^* (\delta q_{i_0}^*) = 0$$

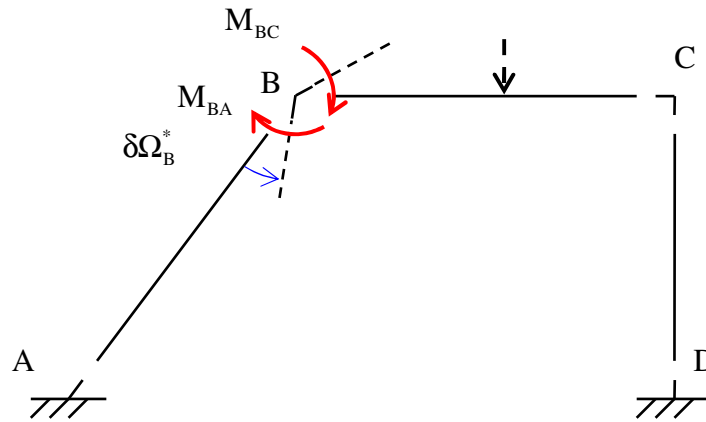
L'équation retenue est :

$$-\frac{W_{\text{ext}}^* (\delta q_{i_0}^*)}{\delta q_{i_0}^*} = 0$$

7.5 Résolution d'un problème

Equation associée à l'inconnue cinématique Ω_B

Champ de déplacements virtuel :



Remarque : on ne représente que les efforts extérieurs qui travaillent

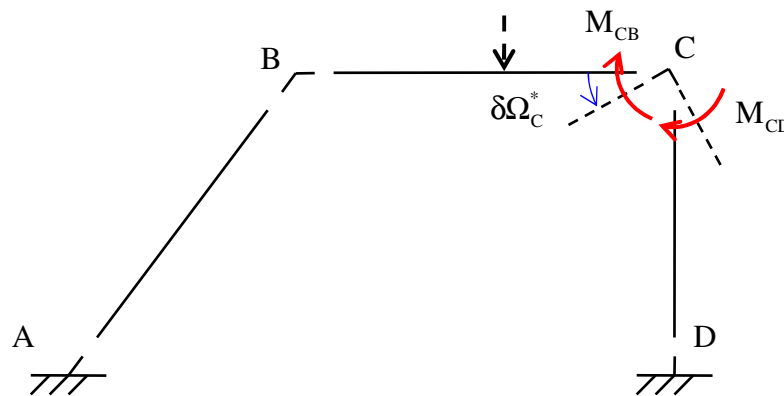
Application du PTV : $(-M_{BA} - M_{BC}) \delta\Omega_B^* = 0$

Equation retenue : $M_{BA} + M_{BC} = 0$

On reconnaît l'équation d'équilibre en moment du nœud B

Equation associée à l'inconnue cinématique Ω_C

Champ de déplacements virtuel :



Remarque : on ne représente que les efforts extérieurs qui travaillent

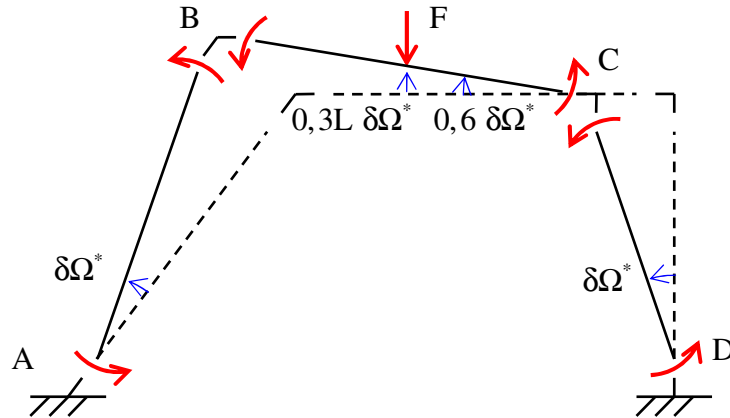
Application du PTV : $(-M_{CB} - M_{CD}) \delta\Omega_C^* = 0$

Equation retenue : $M_{CB} + M_{CD} = 0$

On reconnaît l'équation d'équilibre en moment du nœud C

Equation associée à l'inconnue cinématique Ω

Champ de déplacements virtuel :



Remarque : on ne représente que les efforts extérieurs qui travaillent

Application du PTV :

$$(M_{AB} + M_{BA} + M_{CD} + M_{DC})\delta\Omega^* - (M_{BC} + M_{CB})0,6\delta\Omega^* - F 0,3L\delta\Omega^* = 0$$

Equation retenue :

$$-(M_{AB} + M_{BA} + M_{CD} + M_{DC}) + (M_{BC} + M_{CB})0,6 + F 0,3L = 0$$

Nous avons un système matriciel de 3 équations :

$$\begin{cases} M_{BA} + M_{BC} = 0 \\ M_{CB} + M_{CD} = 0 \\ -(M_{AB} + M_{BA} + M_{CD} + M_{DC}) + (M_{BC} + M_{CB})0,6 + F 0,3L = 0 \end{cases}$$

Remarque :

Le choix des cinématiques virtuelles ne fait intervenir que les efforts aux extrémités M_{ij} et M_{ji}

On exprime les moments aux extrémités des poutres en fonction des inconnues $\Omega_B, \Omega_C, \Omega$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}\Omega_B - \frac{6EI}{L}\Omega$$

$$M_{BA} = \frac{4EI}{L}\Omega_B - \frac{6EI}{L}\Omega$$

$$M_{BC} = \frac{4EI}{L}\Omega_B + \frac{2EI}{L}\Omega_C + \frac{6EI}{L}0,6\Omega + \frac{FL}{8}$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{L}\Omega_B + \frac{4EI}{L}\Omega_C + \frac{6EI}{L}0,6\Omega - \frac{FL}{8}$$

$$M_{CD} = \frac{4EI}{0,8L}\Omega_C - \frac{6EI}{0,8L}\Omega$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{0,8L}\Omega_C - \frac{6EI}{0,8L}\Omega$$

Soit le système linéaire :

$$\begin{array}{l}
 \text{Equation relative à } \Omega_B \quad \rightarrow \\
 \text{Equation relative à } \Omega_C \quad \rightarrow \\
 \text{Equation relative à } \Omega \quad \rightarrow
 \end{array}
 \frac{EI}{L}
 \begin{array}{c}
 \text{Variable } \Omega_B \quad \text{Variable } \Omega \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \text{Variable } \Omega_C \\
 \left[\begin{array}{ccc}
 8 & 2 & -2,4 \\
 2 & 9 & -3,9 \\
 -2,4 & -3,9 & 31,32
 \end{array} \right]
 \begin{bmatrix}
 \Omega_B \\
 \Omega_C \\
 \Omega
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -0,125 \\
 0,125 \\
 -0,3
 \end{bmatrix}
 \text{FL}
 \end{array}$$

Sous cette forme, la matrice est symétrique.

La résolution donne :

$$\begin{cases}
 \frac{EI}{L} \Omega_B = -0,02214 \text{ FL} \\
 \frac{EI}{L} \Omega_C = 0,01472 \text{ FL} \\
 \frac{EI}{L} \Omega = -0,00944 \text{ FL}
 \end{cases}$$

Soit en remplaçant dans les expressions des M_{ij} et M_{ji}

$$M_{AB} = 0,0124 \text{ FL}$$

$$M_{BA} = -0,0319 \text{ FL}$$

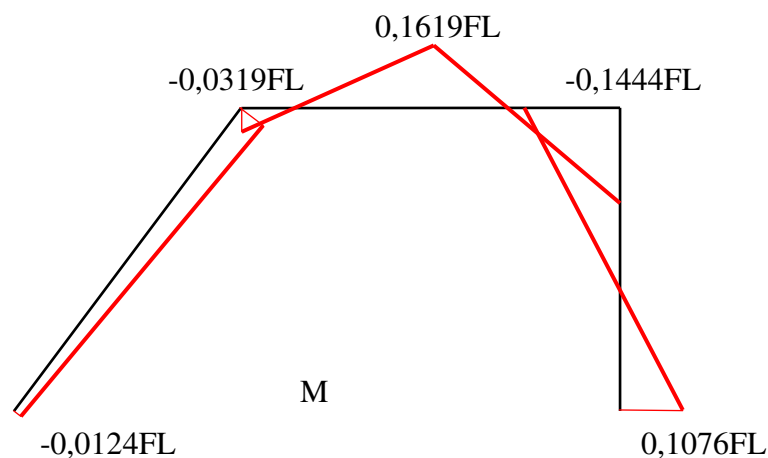
$$M_{BC} = 0,0319 \text{ FL}$$

$$M_{CB} = -0,1444 \text{ FL}$$

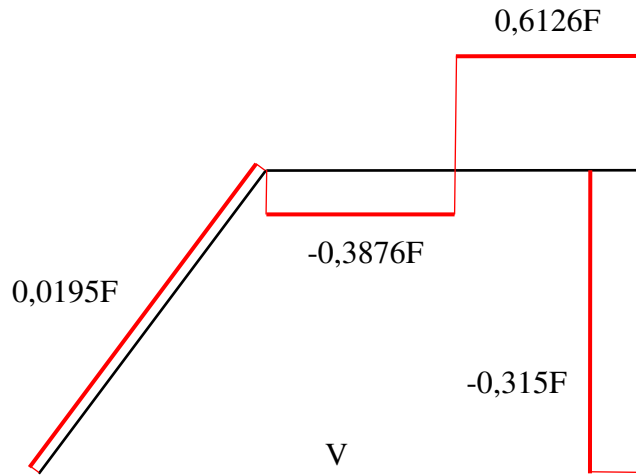
$$M_{CD} = 0,1444 \text{ FL}$$

$$M_{DC} = 0,1076 \text{ FL}$$

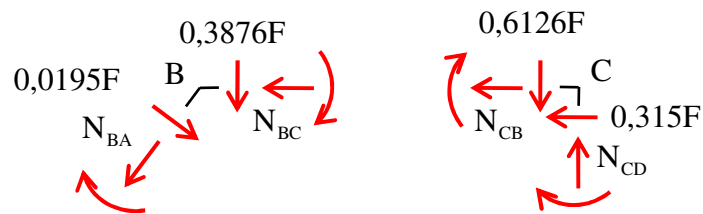
On en déduit les courbes de moment :



On déduit par dérivation celles de l'effort tranchant :

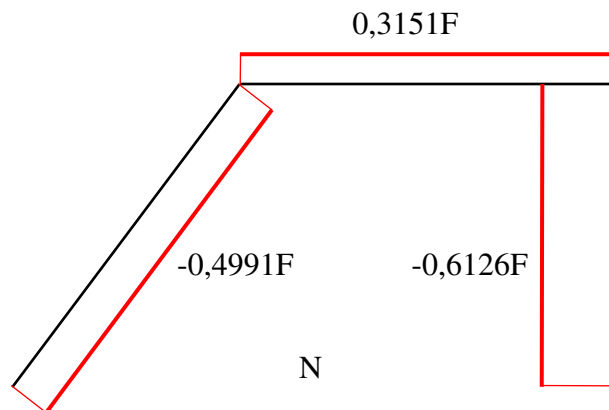


On en déduit par équilibre des nœuds, les efforts normaux :



$$\begin{cases} -0,6N_{BA} + 0,8 \cdot 0,0195F - N_{BC} = 0 \\ -0,8N_{BA} - 0,6 \cdot 0,0195F - 0,3876F = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -N_{CB} - 0,315F = 0 \\ -0,6126F + N_{CD} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{BC} = 0,3151 F \\ N_{BA} = -0,4991 F \end{cases} \quad \begin{cases} N_{CB} = -0,315F \\ N_{CD} = 0,6126F \end{cases}$$

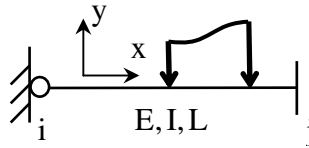


Remarque : cette dernière étape n'aboutit pas toujours, il suffit de vérifier qu'en changeant le type de structure en treillis (tous les nœuds intérieurs sont des articulations) on obtient une structure non hyperstatique.

7.6 Substitution

Cas particulier avec une articulation externe (ou appui simple) à l'extrémité d'une poutre.

7.6.1 Cas $M_{ij} = 0$



Nous avons une inconnue Ω_i avec comme équation associée : $M_{ij} = 0$

$$\text{Soit : } \frac{4EI}{L}\Omega_i + \frac{2EI}{L}\Omega_j - \frac{6EI}{L}\Omega_{ij} + M_{ij}^0 = 0$$

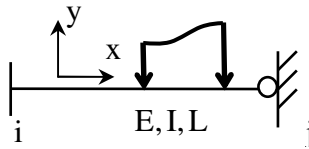
L'inconnue Ω_i peut être substituée avec les autres : $\frac{2EI}{L}\Omega_i = -\frac{EI}{L}\Omega_j + \frac{3EI}{L}\Omega_{ij} - \frac{1}{2}M_{ij}^0$

Dans ce cas :

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L}\Omega_i + \frac{4EI}{L}\Omega_j - \frac{6EI}{L}\Omega_{ij} + M_{ji}^0$$

$$M_{ji} (M_{ij} = 0) = \frac{3EI}{L}\Omega_j - \frac{3EI}{L}\Omega_{ij} - \frac{1}{2}M_{ij}^0 + M_{ji}^0$$

7.6.2 Cas $M_{ji} = 0$



Nous avons une inconnue Ω_j avec comme équation associée : $M_{ji} = 0$

$$\text{Soit : } \frac{2EI}{L}\Omega_i + \frac{4EI}{L}\Omega_j - \frac{6EI}{L}\Omega_{ij} + M_{ji}^0 = 0$$

L'inconnue Ω_j peut être substituée avec les autres : $\frac{2EI}{L}\Omega_j = -\frac{EI}{L}\Omega_i + \frac{3EI}{L}\Omega_{ij} - \frac{1}{2}M_{ji}^0$

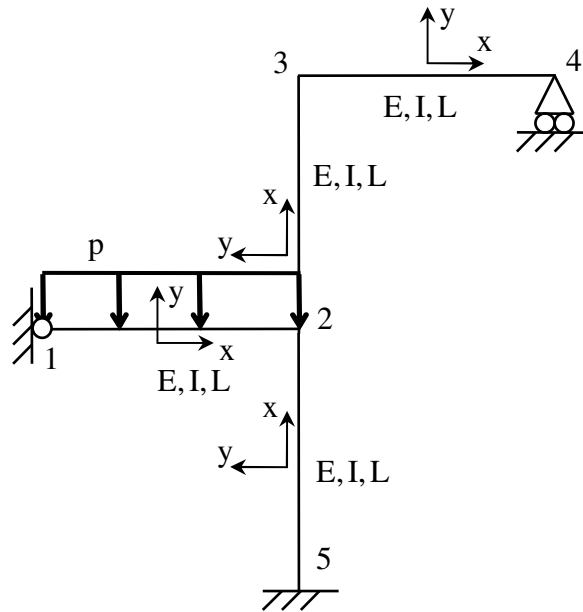
Dans ce cas :

$$M_{ij} = \frac{4EI}{L}\Omega_i + \frac{2EI}{L}\Omega_j - \frac{6EI}{L}\Omega_{ij} + M_{ij}^0$$

$$M_{ij} (M_{ji} = 0) = \frac{3EI}{L}\Omega_i - \frac{3EI}{L}\Omega_{ij} + M_{ij}^0 - \frac{1}{2}M_{ji}^0$$

Les substitutions de ces inconnues permettent de réduire le système d'équations.

7.6.3 Exemple



Inconnues avant substitution :

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega$ avec Ω rotation d'ensemble de la barre 2-3

L'articulation en 1 et l'appui simple en 4 permettent de substituer les inconnues Ω_1 et Ω_4

Inconnues après substitution :

$\Omega_2, \Omega_3, \Omega$ avec Ω rotation d'ensemble de la barre 2-3

Expressions des moments aux extrémités :

$$M_{21} (M_{12} = 0) = \frac{3EI}{L} \Omega_2 - \frac{3}{2} \frac{pL^2}{12}$$

$$M_{23} = \frac{4EI}{L} \Omega_2 + \frac{2EI}{L} \Omega_3 - \frac{6EI}{L} \Omega$$

$$M_{32} = \frac{2EI}{L} \Omega_2 + \frac{4EI}{L} \Omega_3 - \frac{6EI}{L} \Omega$$

$$M_{34} (M_{43} = 0) = 3 \frac{EI}{L} \Omega_3$$

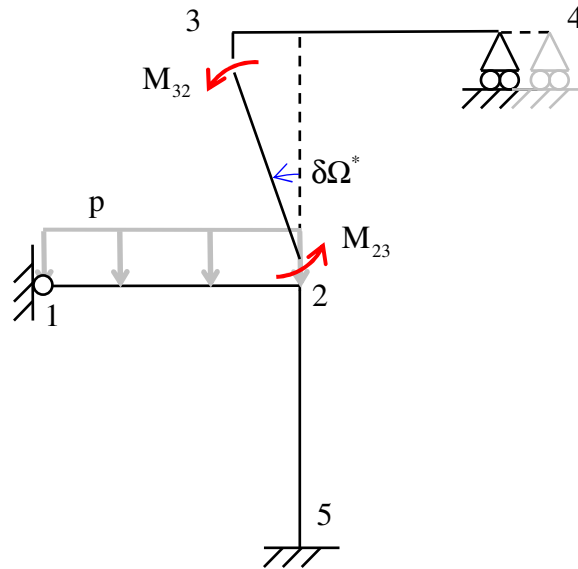
$$M_{52} = \frac{2EI}{L} \Omega_2$$

$$M_{25} = \frac{4EI}{L} \Omega_2$$

Equation relative à Ω_2 : $M_{21} + M_{23} + M_{25} = 0$

Equation relative à Ω_3 : $M_{32} + M_{34} = 0$

Equation relative à Ω : $-M_{23} - M_{32} = 0$



$$\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 11 & 2 & -6 \\ 2 & 7 & -6 \\ -6 & -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_2 \\ \Omega_3 \\ \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \frac{pL^2}{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Omega_2 \\ \Omega_3 \\ \Omega \end{pmatrix} = \frac{pL^3}{EI} \begin{pmatrix} 0,01613 \\ 0,00403 \\ 0,01008 \end{pmatrix}$$

$$M_{21} (M_{12} = 0) = -0,07661 pL^2$$

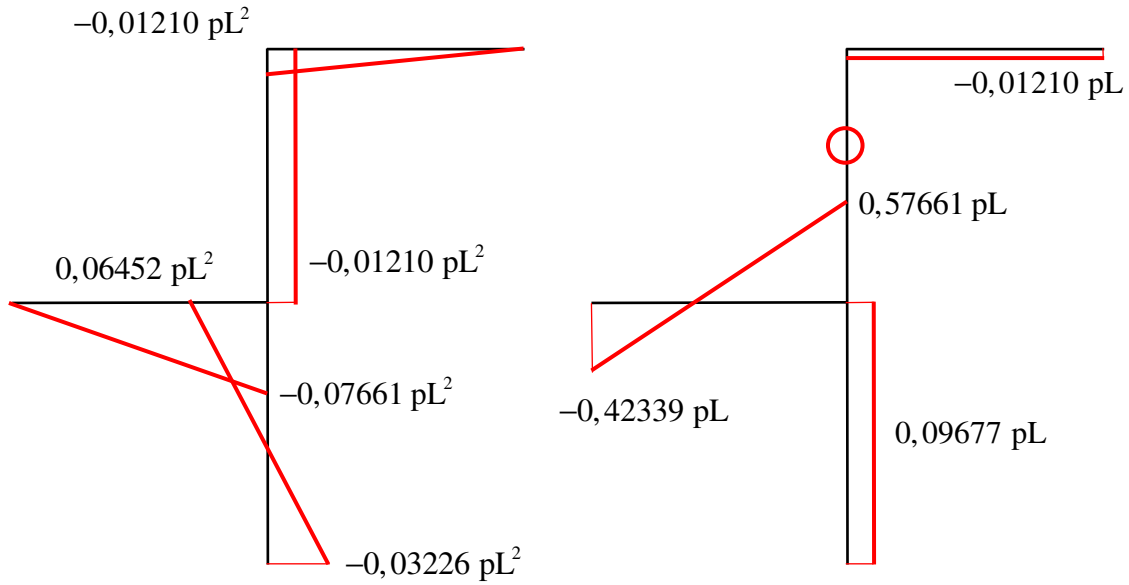
$$M_{23} = 0,01210 pL^2$$

$$M_{32} = -0,01210 pL^2$$

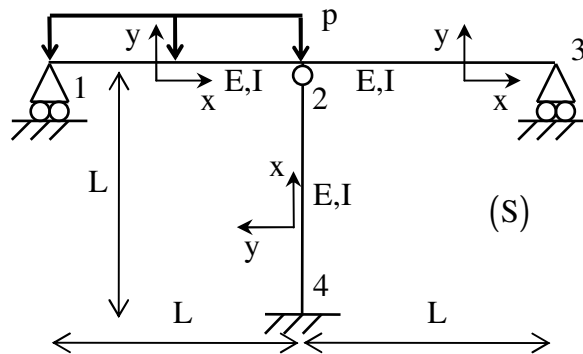
$$M_{34} (M_{43} = 0) = 0,01210 pL^2$$

$$M_{52} = 0,03226 pL^2$$

$$M_{25} = 0,06452 pL^2$$



7.7 Liaison interne particulière



Le nœud 2 possède 2 inconnues cinématique en rotation, selon que l'on considère les poutres 1-2 et 2-3 $\Omega_2^{(1)}$ ou la poutre 4-2 $\Omega_2^{(2)}$

Nombre d'inconnues cinématique :

$$U_1, \Omega_1, U_2, V_2, \Omega_2^{(1)}, \Omega_2^{(2)}, U_3, \Omega_3$$

Avec l'hypothèse de longueur des barres invariantes :

$$\Omega_{4-2}, \Omega_1, \Omega_2^{(1)}, \Omega_2^{(2)}, \Omega_3$$

Après substitution :

$$\Omega_{4-2}, \Omega_2^{(1)}, \Omega_2^{(2)}$$

Après analyse de l'équilibre de la poutre 1-3, on détermine que la poutre 4-2 est simplement comprimée.

Par suite $\Omega_{4-2} = 0, \Omega_2^{(2)} = 0$

Il ne reste plus qu'une seule inconnue cinématique

$$\Omega_2^{(1)}$$

Chapitre 8 Méthode des éléments finis

8.1 Théorème de l'énergie potentielle

On définit l'énergie de déformation de \tilde{u}_i CCA (Champ Cinématiquement Admissible) par :

$$W(\tilde{u}_i) = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} A_{ijkh} \tilde{\epsilon}_{ij} \tilde{\epsilon}_{kh} dv = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\epsilon}_{ij} dv$$

$\tilde{\epsilon}$ est le champ de contrainte associé à \tilde{u}_i

$\tilde{\sigma}$ est le champ de contrainte associé à $\tilde{\epsilon}$

On définit le travail des efforts donnés dans \tilde{u}_i par :

$$T_f^d(\tilde{u}_i) = \iiint_{\Omega} f_i \tilde{u}_i dv + \iint_{S_f} T_i \tilde{u}_i ds$$

f_i sont les forces volumiques données

T_i sont les forces surfaciques données

On définit l'énergie potentiel de \tilde{u}_i CCA par :

$$K(\tilde{u}_i) = W(\tilde{u}_i) - T_f^d(\tilde{u}_i)$$

Théorème de l'énergie potentielle :

Parmi tous les CCA, la solution u_i minimise l'énergie potentielle

$$\forall \tilde{u}_i \text{ CCA } K(u_i) \leq K(\tilde{u}_i)$$

8.2 Méthode des éléments finis MMC

Restrictions :

- Modèle de BERNOULLI
- Problème plan
- Poutres droites, section constante
- Liaisons parfaites
- Matériau élastique linéaire

8.2.1 Principe

Le théorème de l'énergie potentielle nous incite à minimiser cette énergie dans un espace de fonctions admissibles.

On en déduit l'idée d'une méthode numérique pour le calcul d'une solution approchée : on approche l'espace des fonctions admissibles par un espace de dimension finie.

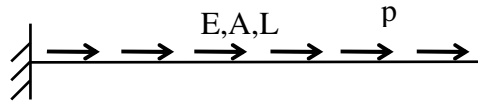
On obtient ainsi une solution approchée d'autant plus proche de la solution réelle que l'espace de dimension fini approche mieux l'espace des fonctions admissibles.

8.2.2 Discrétisation

On discrétise le domaine Ω en un certain nombre de sous domaines simples (triangles, rectangles,...) : les éléments finis.

On prend sur chaque élément une forme analytique simple des champs de déplacements, de sorte que les fonctions déplacements en tout point soient données par des valeurs en un nombre limité de « nœuds »

Exemple :



La solution exacte de ce problème est :

$$\begin{cases} u = \frac{p}{EA} \left(L - \frac{x}{2} \right) x \\ \sigma = \frac{p}{A} (L - x) \end{cases}$$

Energie de déformation d'un champ de déplacement CCA :

$$W(\tilde{u}_i) = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\epsilon}_{ij} dv$$

Le champ de déplacement est défini par sa composante sur x : $\tilde{u}_i = \tilde{u}$

$$\tilde{\epsilon}_{11} = \frac{d\tilde{u}}{dx} \quad \tilde{\sigma}_{11} = E\tilde{\epsilon}_{11} = E \frac{d\tilde{u}}{dx}$$

$$W(\tilde{u}) = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} E \left(\frac{d\tilde{u}}{dx} \right)^2 dv$$

$$W(\tilde{u}) = \frac{1}{2} \int_L EA \left(\frac{d\tilde{u}}{dx} \right)^2 dx$$

Travail des forces extérieures sur un champ de déplacement CCA :

$$T_f^d(\tilde{u}_i) = \iiint_{\Omega} f_i \tilde{u}_i dv + \iint_{S_f} T_i \tilde{u}_i ds$$

$$T_f^d(\tilde{u}) = \int_L p \tilde{u} dx$$

On a considéré une force volumique $f_1 = \frac{p}{A}$

Energie potentielle d'un champ de déplacement CCA :

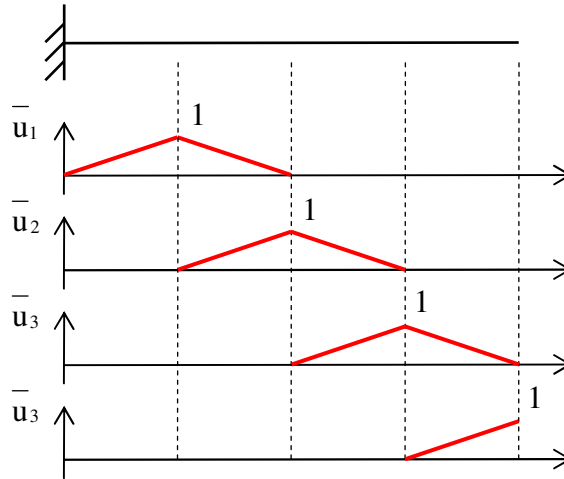
$$K(\tilde{u}) = \frac{1}{2} \int_L EA \left(\frac{d\tilde{u}}{dx} \right)^2 dx - \int_L p\tilde{u} dx$$

Discrétisation :

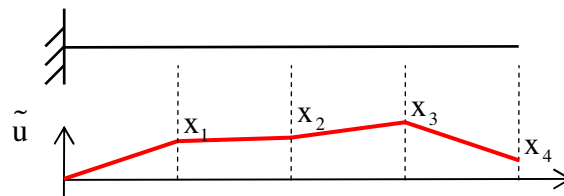
On choisit un espace vectoriel de dimension 4 de champ de déplacement CCA

La condition CCA se traduit par $\tilde{u}(0) = 0$

$$\mathbf{u} = \left\{ \tilde{u} / \bar{u} = \sum_{i=1}^4 x_i \bar{u}_i \right\}$$

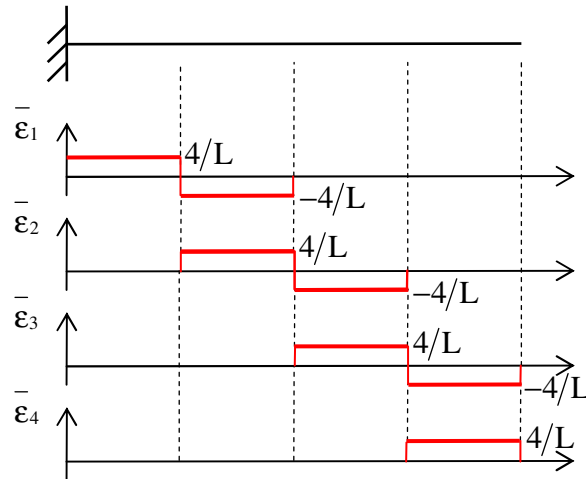


$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^4 x_i \bar{u}_i$$



On en déduit les champs de déformations associés

$$\tilde{\epsilon} = \sum_{i=1}^4 x_i \bar{\epsilon}_i$$



8.2.3 Résolution

Energie de déformation $\tilde{u} \in \mathcal{U}$:

$$W(\tilde{u}) = \frac{1}{2} \int_L EA \left(\frac{d\tilde{u}}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_L EA \tilde{\varepsilon}^2 dx = \frac{1}{2} EA \int_L x_i \tilde{\varepsilon}_i \tilde{\varepsilon}_j x_j dx \quad (\text{indices muets})$$

$$W(\tilde{u}) = \frac{1}{2} x_i \left(EA \int_L \tilde{\varepsilon}_i \tilde{\varepsilon}_j dx \right) x_j$$

On met en place une matrice de rigidité symétrique définie positive indépendante du cas de charge :

$$K_{ij} = EA \int_L \tilde{\varepsilon}_i \tilde{\varepsilon}_j dx \quad [K] = \frac{4EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W(\tilde{u}) = \frac{1}{2} x_i K_{ij} x_j$$

Travail des forces extérieures $\tilde{u} \in \mathcal{U}$:

$$T_f^d(\tilde{u}) = \int_L p \tilde{u} dx = \left(x_1 + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2} \right) \frac{pL}{4}$$

D'où l'expression de l'énergie potentielle $\tilde{u} \in \mathcal{U}$:

$$K(\tilde{u}) = \frac{1}{2} [x_1, x_2, x_3, x_4] \frac{4EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - [x_1, x_2, x_3, x_4] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \frac{pL}{4}$$

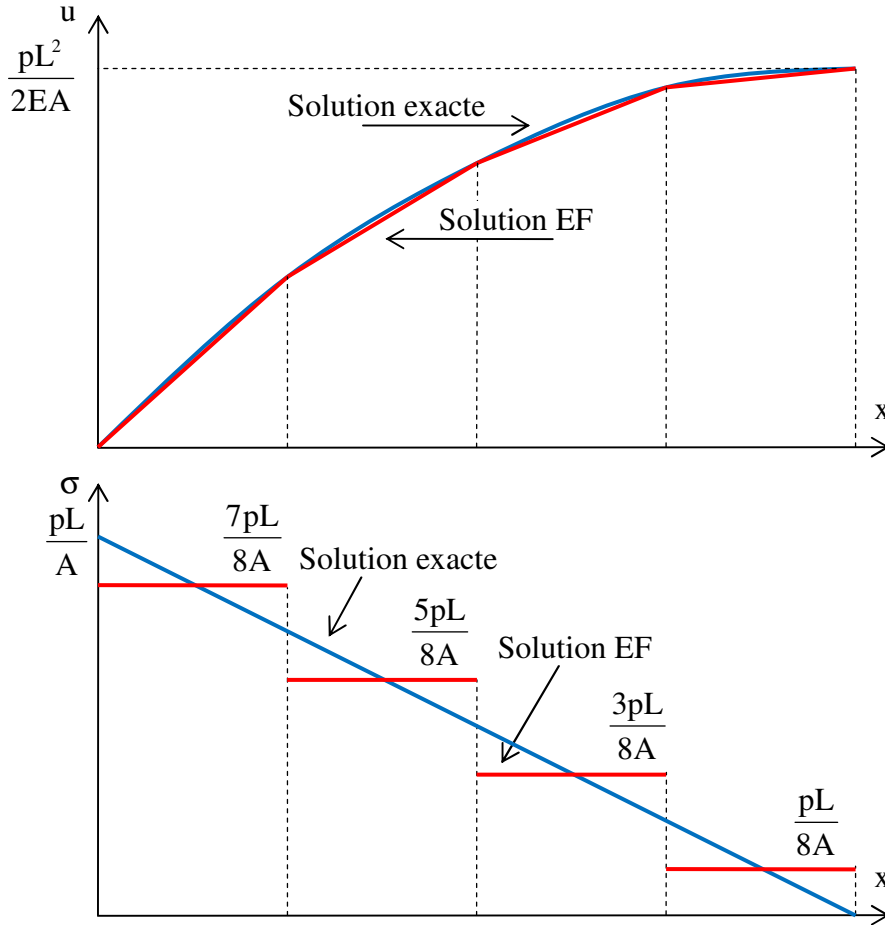
La solution approchée sur \mathcal{U} est $\text{Inf}_{\mathcal{U}} K(\tilde{u})$ soit $\frac{\partial K(\tilde{u})}{\partial x_i} = 0$ d'où :

$$\frac{4EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \frac{pL}{4}$$

Solution :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{32} \frac{pL^2}{EA} \\ x_2 = \frac{12}{32} \frac{pL^2}{EA} \\ x_3 = \frac{15}{32} \frac{pL^2}{EA} \\ x_4 = \frac{16}{32} \frac{pL^2}{EA} \end{cases}$$

On en déduit les déplacements et les contraintes :



Remarques :

- On peut améliorer la précision en augmentant le nombre d'éléments ou en choisissant d'autres fonctions d'interpolation (polynômes du second degré)
- Le champ de contrainte n'est pas un champ CSA : $\sigma(L) = \frac{pL}{8A} \neq 0$
- La méthode des éléments finis amène à la résolution d'un système linéaire avec une matrice symétrique définie positive, avec de nombreux termes nuls loin de la diagonale

8.3 Méthode des éléments finis RDM

8.3.1 Principe

Les éléments finis seront les poutres.

La cinématique sera définie par les valeurs des déplacements et rotations aux nœuds

Restrictions :

- Modèle de BERNOULLI
- Problème plan
- Poutres droites, section constante
- Liaisons parfaites
- Matériau élastique linéaire

8.3.2 Fonctions d'interpolation

Quel choix pour les fonctions de base définissant une approximation de l'ensemble des champs de déplacement CCA ?

Les champs de déplacement CCA imposent que les déplacements aux extrémités de la poutre soient : u_i, v_i, ω_i et u_j, v_j, ω_j

Dans le cas des poutres de BERNOULLI, il est nécessaire que :

$$\begin{aligned} u(0) &= u_i & u(L) &= u_j \\ v(0) &= v_i & v'(0) &= \omega_i & v(L) &= v_j & v'(L) &= \omega_j \end{aligned}$$

Le choix pour $v(x)$ imposera celui de $\omega(x) = v'(x)$

Méthode 1 :

On peut rechercher une fonction linéaire pour $u(x)$ paramétrée par u_i et u_j

On peut rechercher un polynôme de degré 3 pour $v(x)$ paramétrée par v_i, ω_i et v_j, ω_j

Méthode 2 :

On peut rechercher l'expression de $u(x)$ et $v(x)$ respectant les conditions aux limites cinématiques suivantes :

Poutres bi encastree non chargée avec déplacements aux extrémités imposés : u_i, v_i, ω_i et u_j, v_j, ω_j

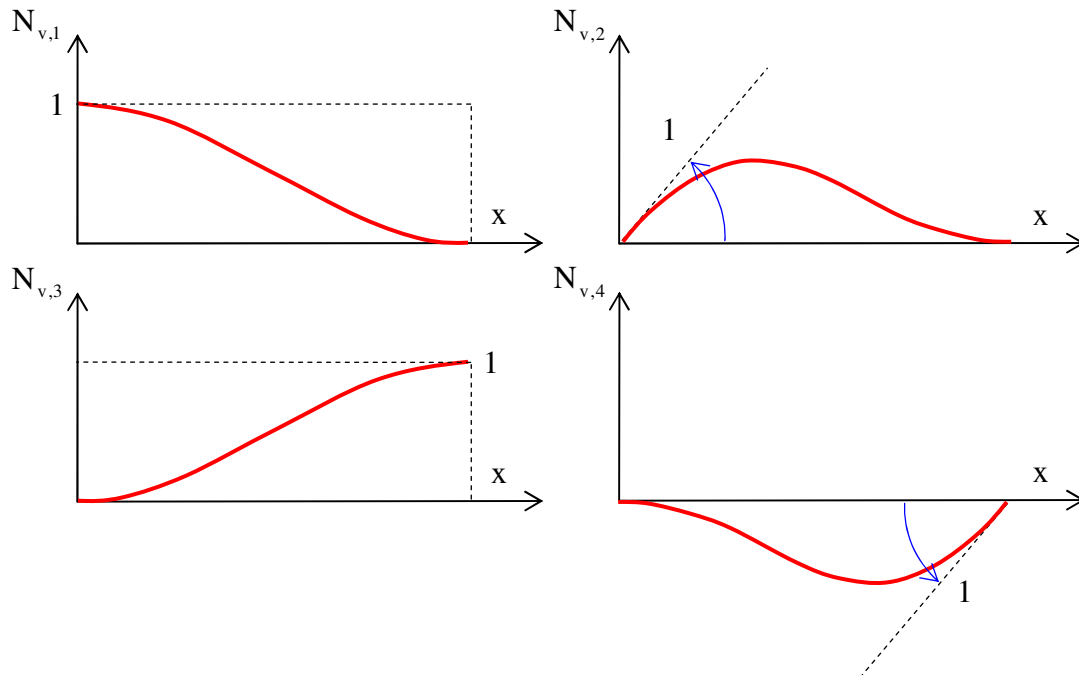
Dans les deux cas on trouve les mêmes champs de déplacements :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L} \\ u(x) &= (1-\xi)u_i + \xi u_j \\ v(x) &= (1-3\xi^2 + 2\xi^3)v_i + L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\omega_i + (3\xi^2 - 2\xi^3)v_j + L(\xi^3 - \xi^2)\omega_j \\ \omega(x) &= 6(\xi^2 - \xi)\frac{v_i}{L} + (1-4\xi + 3\xi^2)\omega_i + 6(\xi^2 - \xi)\frac{v_j}{L} + (3\xi^2 - 2\xi)\omega_j \end{aligned}$$

Les composantes selon les paramètres sont appelées fonctions d'interpolation ou fonctions de forme

$$\begin{aligned}
 [N_u] &= [N_{u,1}, N_{u,2}] & N_{u,1}(\xi) &= 1 - \xi & N_{u,2}(\xi) &= \xi \\
 [N_v] &= [N_{v,1}, N_{v,2}, N_{v,3}, N_{v,4}] & N_{v,1}(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & N_{v,2}(\xi) &= (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)L \\
 & & N_{v,3}(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3 & N_{v,4}(\xi) &= (\xi^3 - \xi^2)L \\
 [N_\omega] &= [N_{\omega,1}, N_{\omega,2}, N_{\omega,3}, N_{\omega,4}] & N_{\omega,1}(\xi) &= 6(\xi^2 - \xi) & N_{\omega,2}(\xi) &= L(1 - 4\xi + 3\xi^2) \\
 & & N_{\omega,3}(\xi) &= 6(\xi^2 - \xi) & N_{\omega,4}(\xi) &= L(3\xi^2 - 2\xi)
 \end{aligned}$$

Remarque : $\frac{d}{dx}[N_v] = [N_\omega]$



$\mathcal{U} = \left\{ [\tilde{q}(x)] = [u(x), v(x), \omega(x)] \right\}$ / sur chaque poutre

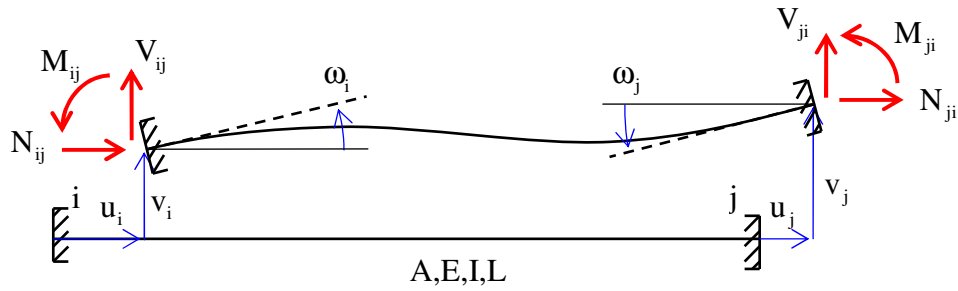
$$u(x) = [N_u] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}, v(x) = [N_v] \begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \\ v_j \\ \omega_j \end{bmatrix}, \omega(x) = [N_\omega] \begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \\ v_j \\ \omega_j \end{bmatrix} \text{ et CL Cin } \left. \vphantom{\begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \\ v_j \\ \omega_j \end{bmatrix}} \right\}$$

8.3.3 Energie de déformation sur \mathcal{U}

La structure est décomposée en nœuds et poutres.
L'énergie de déformation se trouve dans les poutres

On détermine l'énergie de déformation d'une poutre isolée dont les déplacements sont rappelés ci dessous :

Poutres bi encastree non chargée avec déplacements aux extrémités imposés : u_i, v_i, ω_i et u_j, v_j, ω_j



Les efforts aux nœuds correspondants sont :

$$\begin{bmatrix} N_{ij} \\ V_{ij} \\ M_{ij} \\ N_{ji} \\ V_{ji} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = [K_e] \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \omega_i \\ u_j \\ v_j \\ \omega_j \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} Q_{ij} \\ Q_{ji} \end{bmatrix} = [K_e] \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix}$$

On note la matrice uni colonne des efforts aux extrémités : $\begin{bmatrix} Q_{ij} \\ Q_{ji} \end{bmatrix}$

On note la matrice uni colonne des déplacements aux extrémités : $\begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix}$

On détermine l'énergie de déformation comme le travail réel des forces extérieures :

$$W(\tilde{q}) = \frac{1}{2} [q_i, q_j] \begin{bmatrix} Q_{ij} \\ Q_{ji} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [q_i, q_j] [K_e] \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix}$$

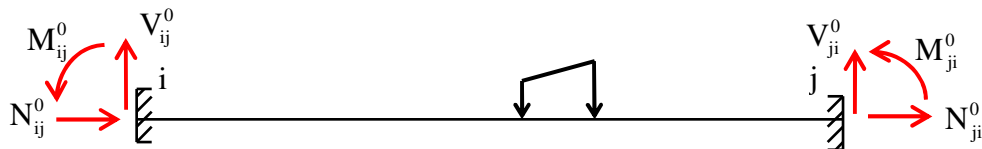
Au total :

$$W(\tilde{q}) = \frac{1}{2} \sum_{\text{poutres } ij} [q_i, q_j] [K_e] \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix}$$

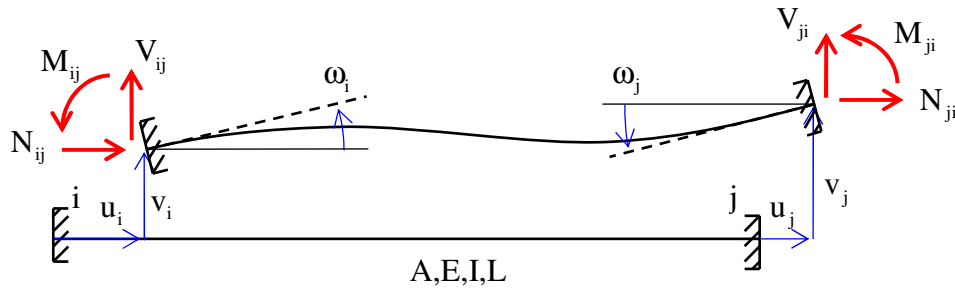
8.3.4 Travail des efforts donnés sur u

8.3.4.1 Efforts sur une poutre ij :

On considère sur une poutre ij bi encastée soumise au chargement :



On considère la même poutre non chargée soumise à un champ de déplacements de u



A l'aide du théorème de réciprocité :

$$T_f^d(\tilde{q}) + [q_i][Q_{ij}^0] + [q_j][Q_{ji}^0] = 0$$

D'où :

$$T_f^d(\tilde{q}) = -[q_i, q_j] \begin{bmatrix} Q_{ij}^0 \\ Q_{ji}^0 \end{bmatrix}$$

Les efforts Q_{ij}^0 (resp. Q_{ji}^0) sont les efforts à l'origine (resp. à l'extrémité) de la poutre ij bi encastree.

Si les efforts d'encastremets ne sont pas connus, par exemple une répartition de charge non linéaire $p_x(x)\vec{i} + p_y(x)\vec{j}$, le travail est calculé par :

$$T_f^d(\tilde{q}) = \int_L p_x(x)u(x)dx + \int_L p_y(x)v(x)dx = \int_L p_x(x)[N_u] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} dx + \int_L p_y(x)[N_v] \begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \\ v_j \\ \omega_j \end{bmatrix} dx$$

$$T_f^d(\tilde{q}) = [u_i, u_j] \int_L p_x(x)[N_u]^t dx + [v_i, \omega_i, v_j, \omega_j] \int_L p_y(x)[N_v]^t dx$$

Que l'on peut mettre sous la forme :

$$T_f^d(\tilde{q}) = -[q_i, q_j] \begin{bmatrix} Q_{ij}^0 \\ Q_{ji}^0 \end{bmatrix}$$

Le calcul numérique des dernières intégrales peut amener des approximations

8.3.4.2 Efforts sur un nœud i :

$$T_f^d(\tilde{q}) = [q_i][F_{nod,i}]$$

Au total :

$$T_f^d(\tilde{q}) = - \sum_{\text{poutres } ij} [q_i, q_j] \begin{bmatrix} Q_{ij}^0 \\ Q_{ji}^0 \end{bmatrix} + \sum_{\text{noeuds } i} [q_i][F_{nod,i}]$$

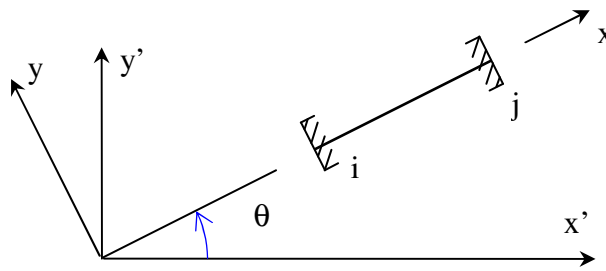
8.3.5 Energie potentielle sur \mathcal{u}

$$\tilde{q} \in \mathcal{u} \quad K(\tilde{q}) = W(\tilde{q}) - T_f^d(\tilde{q})$$

$$\tilde{q} \in \mathcal{u} \quad K(\tilde{q}) = \frac{1}{2} \sum_{\text{poutres } ij} [q_i, q_j][K_e] \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix} + \sum_{\text{poutres } ij} [q_i, q_j] \begin{bmatrix} Q_{ij}^0 \\ Q_{ji}^0 \end{bmatrix} - \sum_{\text{noeuds } i} [q_i][F_{nod,i}]$$

Les paramètres sont définis dans les repères locaux, il est nécessaire de passer à un repère global pour réaliser l'assemblage :

Les déplacements dans le repère global sont notés $[q'_i]$



Changement de repère :

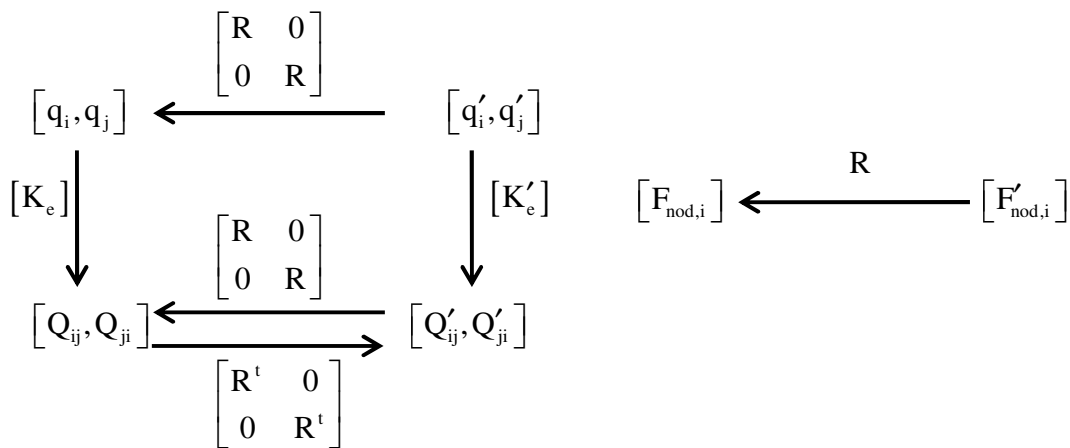
$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_i \\ v'_i \end{bmatrix} \quad \omega_i = \omega'_i$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \omega_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ \omega'_i \end{bmatrix} \quad [q_i] = [R][q'_i] \text{ avec } [R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Par suite :

$$\begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q'_i \\ q'_j \end{bmatrix} \text{ ou } [q_i, q_j] = [q'_i, q'_j] \begin{bmatrix} R^t & 0 \\ 0 & R^t \end{bmatrix}$$



$$\tilde{q} \in \mathcal{U} \quad K(\tilde{q}) = \frac{1}{2} \sum_{\text{poutres } ij} [q'_i, q'_j] [K'_e] \begin{bmatrix} q'_i \\ q'_j \end{bmatrix} + \sum_{\text{poutres } ij} [q'_i, q'_j] \begin{bmatrix} Q_{ij}^{*0} \\ Q_{ji}^{*0} \end{bmatrix} - \sum_{\text{noeuds } i} [q'_i] [F'_{nod,i}]$$

Avec :

$$[K'_e] = \begin{bmatrix} R^t & 0 \\ 0 & R^t \end{bmatrix} [K_e] \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

Dans le repère global :

$$\begin{bmatrix} Q'_{ij} \\ Q'_{ji} \end{bmatrix} \quad \text{Efforts aux extrémités de la poutre } ij \text{ supposée bi encastrée.}$$

$$[F'_{\text{nod},i}] \quad \text{Efforts sur le nœud } i$$

8.3.6 Assemblage

La minimisation de l'énergie potentielle donne le système linéaire à résoudre :

$$\sum_{\text{poutres } ij} [K'_e] \begin{bmatrix} q'_i \\ q'_j \end{bmatrix} = - \sum_{\text{poutres } ij} \begin{bmatrix} Q'_{ij} \\ Q'_{ji} \end{bmatrix} + \sum_{\text{nœuds } i} [F'_{\text{nod},i}]$$

Remarque :

La matrice de rigidité élémentaire dans le repère global d'une poutre p allant du nœud i au nœud j peut s'écrire sous la forme :

$$[K'_e] = \begin{bmatrix} K_{ii}^p & K_{ij}^p \\ K_{ji}^p & K_{jj}^p \end{bmatrix}$$

D'où le système linéaire :

$$\sum_{\text{poutres } p} \begin{bmatrix} K_{ii}^p & K_{ij}^p \\ K_{ji}^p & K_{jj}^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q'_i \\ q'_j \end{bmatrix} = - \sum_{\text{poutres } ij} \begin{bmatrix} Q'_{ij} \\ Q'_{ji} \end{bmatrix} + \sum_{\text{nœuds } i} [F'_{\text{nod},i}]$$

Dans le repère global, on définit :

$[q']$: la matrice uni colonne des déplacements aux nœuds.

$[Q'^0]$: la matrice uni colonne des efforts aux extrémités des poutres supposées bi encastrées.

$[F'_{\text{nod}}]$: la matrice uni colonne des efforts aux nœuds.

On met ainsi en place le système linéaire :

$$[K][q'] = -[Q'^0] + [F'_{\text{nod}}]$$

$[K]$ est la matrice de rigidité globale de la structure, elle est indépendante du cas de charge.

Parmi les déplacements $[q']$, certains sont connus car ils doivent respecter les conditions aux limites cinématiques dues aux liaisons externes q'_c , les autres restent inconnus, donc à déterminer q'_i

$$\text{On partitionne les déplacements : } [q'] = \begin{bmatrix} q'_i \\ q'_c \end{bmatrix}$$

En correspondance des déplacements connus, les efforts aux nœuds sont inconnus (liaisons parfaites).

$$\text{On partitionne les forces aux nœuds : } [F'_{\text{nod}}] = \begin{bmatrix} F'_c \\ F'_i \end{bmatrix}$$

On partitionne en correspondance les efforts aux extrémités des poutres supposées bi encastrées :

$$[Q^{r0}] = \begin{bmatrix} Q_1^{r0} \\ Q_2^{r0} \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité se décompose alors en sous matrice :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i' \\ q_c' \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Q_1^{r0} \\ Q_2^{r0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_c' \\ F_i' \end{bmatrix} \text{ avec } K_{21} = K_{12}^t$$

8.3.7 Résolution

Calcul des inconnues cinématiques :

$$[K_{11}][q_i'] + [K_{12}][q_c'] = -[Q_1^{r0}] + [F_c']$$

$$[q_i'] = [K_{11}]^{-1} (-[Q_1^{r0}] + [F_c'] - [K_{12}][q_c'])$$

Calcul des actions de liaison

$$[K_{21}][q_i'] + [K_{22}][q_c'] = -[Q_2^{r0}] + [F_i']$$

$$[F_i'] = [Q_2^{r0}] + [K_{21}][q_i'] + [K_{22}][q_c']$$

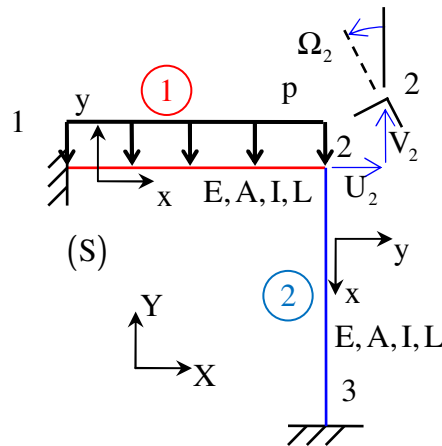
Remarques :

Si les déplacements imposés sont en nombre suffisants, la matrice $[K_{11}]$ est non singulière.

Les matrices $[K_{11}]$ et $[K_{22}]$ sont des matrices symétriques carrées.

Les matrices $[K_{12}]$ et $[K_{21}] = [K_{12}]^t$ ne sont pas nécessairement des matrices carrées.

8.4 Exemple RDM



Dans le repère global :

Matrices de rigidité élémentaires :

$$\left[\mathbf{K}_{12}^e \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^1 & \mathbf{K}_{12}^1 \\ \mathbf{K}_{21}^1 & \mathbf{K}_{22}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$\left[\mathbf{K}_{23}^e \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{22}^2 & \mathbf{K}_{23}^2 \\ \mathbf{K}_{32}^2 & \mathbf{K}_{33}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Déplacements aux nœuds :

$$\text{Nœud 1 : } [q_1'] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Nœud 2 : } [q_2'] = \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} \quad \text{Nœud 3 : } [q_3'] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Efforts aux extrémités des poutres supposées bi encastées :

$$\text{Nœud 1 : } [Q_{12}'^0] = \begin{bmatrix} 0 \\ pL/2 \\ pL^2/12 \end{bmatrix} \quad \text{Nœud 2 : } [Q_{21}'^0] = \begin{bmatrix} 0 \\ pL/2 \\ -pL^2/12 \end{bmatrix} \quad [Q_{23}'^0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Nœud 3 : } [Q_{32}'^0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Efforts sur les nœuds :

$$\text{Nœud 1 : } \begin{bmatrix} F'_{\text{nod},1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ M_1 \end{bmatrix} \quad \text{Nœud 2 : } \begin{bmatrix} F'_{\text{nod},2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Nœud 3 : } \begin{bmatrix} F'_{\text{nod},3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{3X} \\ F_{3Y} \\ M_3 \end{bmatrix}$$

Mise en place du système :

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ 0 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ q'_2 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Q_{12}^0 \\ Q_{21}^0 + Q_{23}^0 \\ Q_{32}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F'_{\text{nod},1} \\ F'_{\text{nod},2} \\ F'_{\text{nod},3} \end{bmatrix}$$

$$[q'] = \begin{bmatrix} q'_i \\ q'_c \end{bmatrix} \quad [q'_i] = [q'_2] \quad [q'_c] = \begin{bmatrix} q'_1 \\ q'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[F'_{\text{nod}}] = \begin{bmatrix} F'_c \\ F'_i \end{bmatrix} \quad [F'_c] = [F'_{\text{nod},2}] = [0] \quad [F'_i] = \begin{bmatrix} F'_{\text{nod},1} \\ F'_{\text{nod},3} \end{bmatrix}$$

Système à résoudre :

$$\begin{bmatrix} K_{22}^1 + K_{22}^2 \end{bmatrix} [q'_2] = - \begin{bmatrix} Q_{21}^0 + Q_{23}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F'_{\text{nod},2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ pL/2 \\ -pL^2/12 \end{bmatrix}$$

On retrouve le même système que celui mis en place avec la méthode des déplacements.

$$\text{Les déplacements } [q'_2] = \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} \text{ sont ainsi déterminés}$$

On en déduit les efforts sur les nœuds :

$$\begin{bmatrix} F'_1 \\ F'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{12}^1 \\ K_{32}^2 \end{bmatrix} [q'_2] + \begin{bmatrix} Q_{12}^0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ M_1 \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ pL/2 \\ pL^2/12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8.5 Une solution exacte

L'exemple RDM aboutit au système linéaire déjà mis en place dans la méthode des déplacements.

Cette méthode aboutissant à la solution exacte, on peut supposer qu'il en est de même pour la méthode des éléments finis

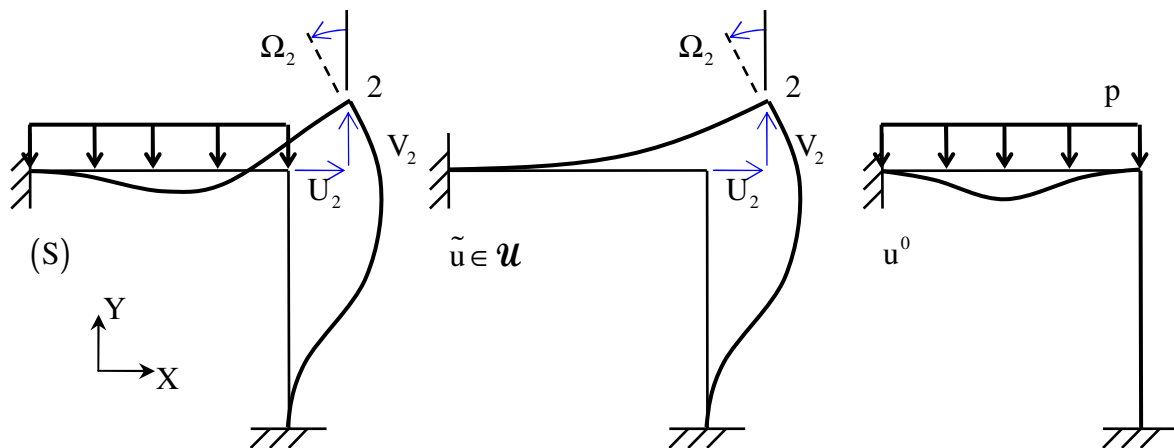
Remarque :

Si la solution EF donne les valeurs exactes aux nœuds, le champ de déplacement complet est construit avec les fonctions de forme qui supposent les poutres non chargées ; sur les seules poutres non chargées la solution sera alors exacte

8.5.1 Espace de fonctions admissibles

A l'aide du principe de superposition, on décompose le cas de charge :

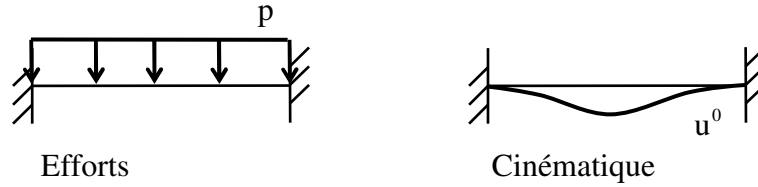
La solution est la superposition d'un champ de déplacement $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ et du déplacement d'une poutre bi encastrée u^0 :



Si on recherche une solution de la forme $\tilde{u} + u^0$ avec $\tilde{u} \in \mathcal{U}$, on trouvera la solution exacte.

8.5.2 Poutre bi encastrée

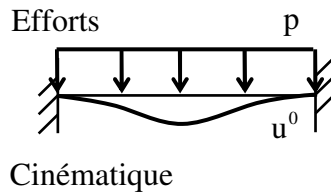
Par définition, le travail des forces extérieures sur une cinématique u^0 est $T_f^d(u^0)$



Exemple : $T_f^d(u^0) = \int_L p(x)u^0(x)dx$

Considérons une poutre bi encastrée :

Soumise à un effort p, elle se déforme selon u^0



Travail réel des efforts extérieurs : $W_{ext} = \frac{1}{2} \int_L p(x)u^0(x)dx = \frac{1}{2} T_f^d(u^0)$

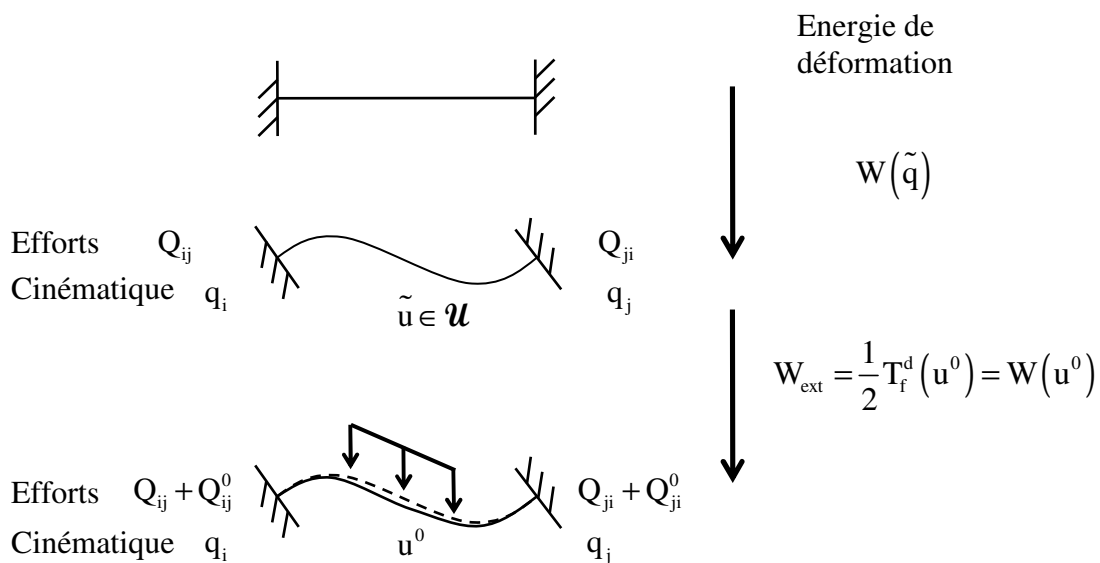
Le coefficient $\frac{1}{2}$ traduisant la mise en charge progressive.

L'énergie de déformation associée à la cinématique u^0 est égale au travail réel des forces extérieures engendrant cette cinématique, d'où :

$$W(u^0) = \frac{1}{2} T_f^d(u^0)$$

8.5.3 Potentiel interne

Energie de déformation sur une cinématique $\tilde{u} + u^0$ $\tilde{u} \in \mathcal{U}$:



Nous obtenons : $W(\tilde{q} + u^0) = W(\tilde{q}) + W(u^0)$

Ce résultat n'est pas immédiat, l'énergie de déformation n'est pas une fonction linéaire des déformations, cela tient du fait que les efforts à appliquer pour construire la cinématique \tilde{u} ne travaillent pas sur la cinématique u^0

Travail des forces extérieures sur une cinématique $\tilde{q} + u^0$ $\tilde{q} \in \mathcal{U}$:

Nous avons cette fois la linéarité : $T_f^d(\tilde{q} + u^0) = T_f^d(\tilde{q}) + T_f^d(u^0)$

Potentiel interne sur une cinématique $\tilde{q} + u^0$ $\tilde{q} \in \mathcal{U}$:

$$K(\tilde{q} + u^0) = W(\tilde{q} + u^0) - T_f^d(\tilde{q} + u^0)$$

$$K(\tilde{q} + u^0) = (W(\tilde{q}) + W(u^0)) - (T_f^d(\tilde{q}) + T_f^d(u^0))$$

$$K(\tilde{q} + u^0) = (W(\tilde{q}) - T_f^d(\tilde{q})) + W(u^0) - T_f^d(u^0) \quad \text{avec } T_f^d(u^0) = 2W(u^0)$$

$$K(\tilde{q} + u^0) = K(\tilde{q}) - W(u^0)$$

8.5.4 Résolution

La solution exacte sur $\mathcal{U} + u^0$ est $\text{Inf}_{\mathcal{U}} K(\tilde{u} + u^0)$ soit $\frac{\partial K(\tilde{u} + u^0)}{\partial x_i} = 0$ ce qui équivaut à :

$$\frac{\partial K(\tilde{u})}{\partial x_i} = 0$$

On retrouve alors la formulation des éléments poutres

Ainsi les paramètres q_i déterminés par la méthode des éléments finis correspondent bien à la solution exacte du problème de RDM aux nœuds.

Pour obtenir le champ de déplacement solution, il faut ajouter au champ de déplacements de la solution EF, le champ de déplacement des poutres bi encastées soumises aux cas de charge.

Annexes :

Résumé RDM 1 année

Tableau des intégrales de MOHR

Formule des 3 moments

Rotations poutre isostatique

Méthode des déplacements

Méthode des rotations

Poutres bi encastées

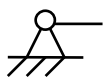
Matrice de rigidité élémentaire

Liaisons

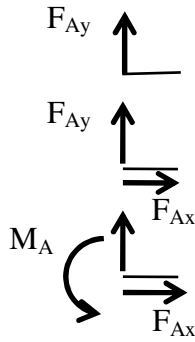
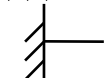
Appuis simple



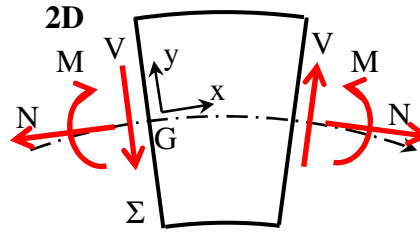
Articulation



Encastrement



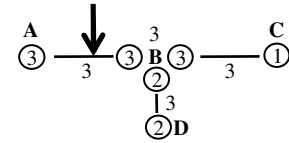
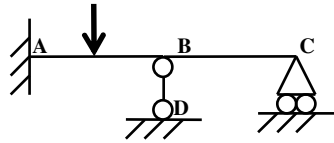
Sollicitations Définition



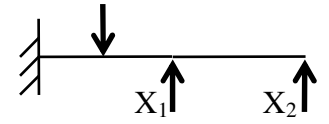
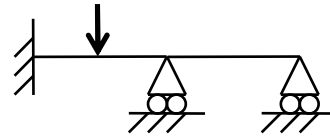
$$\begin{pmatrix} N \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{matrix} \text{3D} \\ \sum \text{Efforts} \\ \text{droite} \\ - \sum \text{Efforts} \\ \text{gauche} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} T \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{matrix} \sum \text{Moments}_G \\ \text{droite} \\ - \sum \text{Moments}_G \\ \text{gauche} \end{matrix}$$

Hyperstatisme



Structure isostatique associée



Barres : $b = 3$

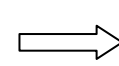
Equations d'équilibre noeud : $\sum N_i = 3$ j Equations

Inconnues de liaison : $\sum l_i = 14$ ① Inconnues

$$\sum l_i - (3b + \sum N_i) = 2 \quad \text{Hyperstatisme degré 2}$$

Hyperstatisme degré 2

-2 degré de liberté



Structure

isostatique associée

Caractéristiques géométriques

Aire

$$A = \int_{\Sigma} dS$$

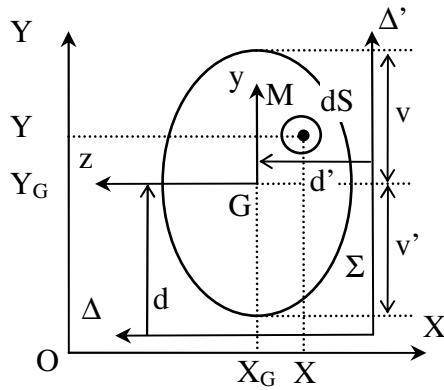
Moment statique

$$S_x = \int_{\Sigma} Y dS \quad \text{et} \quad S_y = \int_{\Sigma} X dS$$

Centre de Gravité

$$S_y = S_z = 0$$

$$Y_G = \frac{S_x}{A} \quad \text{et} \quad X_G = \frac{S_y}{A}$$



Moment d'inertie

$$I_x = \int_{\Sigma} Y^2 dS \quad \text{et} \quad I_y = \int_{\Sigma} X^2 dS$$

Produit d'inertie

$$I_{xy} = \int_{\Sigma} XY dS$$

Inerties principales (min et max par G)

$$I_z = \int_{\Sigma} y^2 dS \quad \text{et} \quad I_y = \int_{\Sigma} z^2 dS$$

$$I_{yz} = \int_{\Sigma} yz dS = 0$$

Les axes des inerties principales définissent le repère local : (G, y, z)

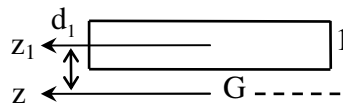
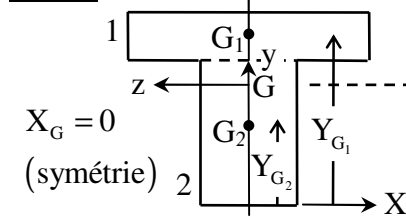
Rayon de giration :

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \quad \text{et} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

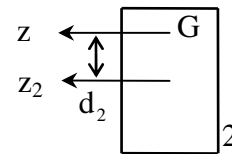
Théorème d'HUYGENS

$$I_{\Delta} = I_z + Ad^2, \quad I_{\Delta'} = I_y + Ad'^2, \quad I_{\Delta\Delta'} = I_{yz} + Add'$$

Calcul



$$I_z(1) = I_{z_1}(1) + A(1)d_1^2$$



$$I_z(2) = I_{z_2}(2) + A(2)d_2^2$$

$$S_x(1) = A(1)Y_{G_1}$$

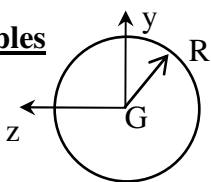
$$S_x(2) = A(2)Y_{G_2}$$

$$Y_G = (S_x(1) + S_x(2)) / (A(1) + A(2))$$

$$I_z = I_z(1) + I_z(2)$$

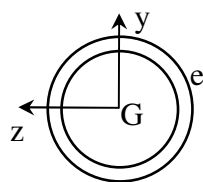
$$I_y = I_y(1) + I_y(2)$$

Exemples



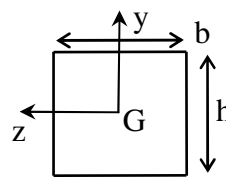
$$I_z = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$



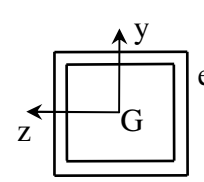
$$I_z = \pi e R^3$$

$$I_y = \pi e R^3$$



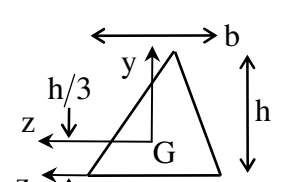
$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$



$$I_z = \frac{eh^2}{6}(3b + h)$$

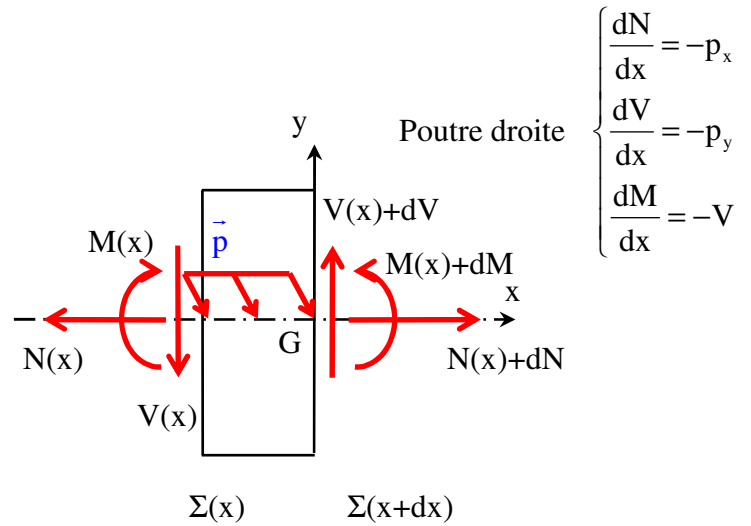
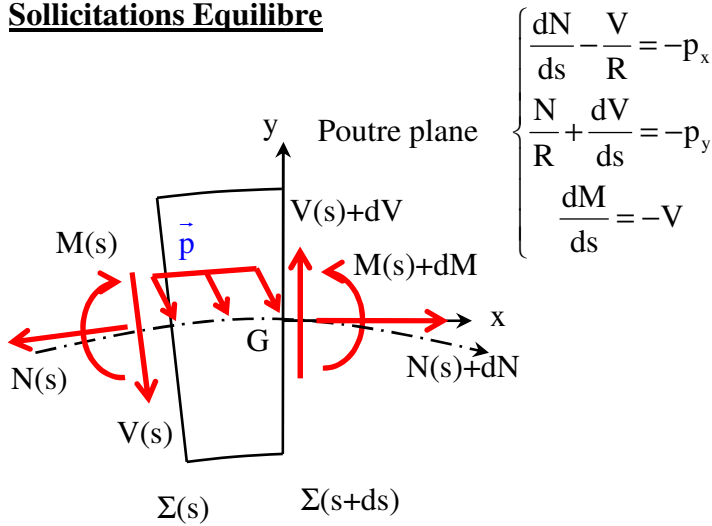
$$I_y = \frac{eb^2}{6}(3h + b)$$



$$I_z = \frac{bh^3}{36}$$

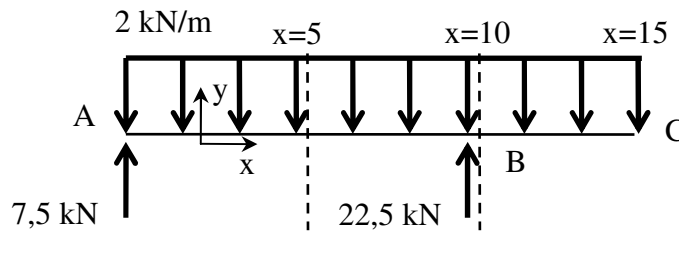
$$I_{z_1} = \frac{bh^3}{12}$$

Sollicitations Equilibre



Sollicitations Expression 2D

$$\begin{cases} N(x) = - \sum_{\text{gauche}} F_x \\ V(x) = - \sum_{\text{gauche}} F_y \\ M(x) = - \sum_{\text{gauche}} M_G \end{cases}$$



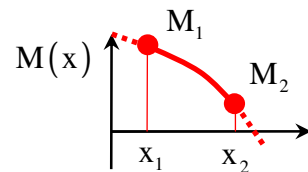
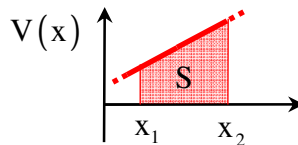
$$\begin{cases} N(x) = \sum_{\text{droite}} F_x \\ V(x) = \sum_{\text{droite}} F_y \\ M(x) = \sum_{\text{droite}} M_G \end{cases}$$

$M(5) = 7,5 \times 5 - 2 \times 5^2 / 2 = 12,5 \text{ kN.m}$

$M(10) = -2 \times 5^2 / 2 = -25 \text{ kN.m}$

Relation M-V

$$M(x_2) = M(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} V(x) dx$$



$M_2 = M_1 - S$

Sollicitations Tracé

Effets des actions ponctuelles

Effets des actions réparties

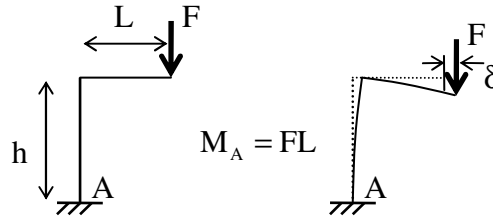
Action de liaison	Force suivant y	Couple suivant z	Action répartie	Fus d'action répartie
 Appui simple Articulation				
			 Droite inclinée	
	 Saut de F Changement de pente	 Saut de C	 Arc de parabole	 Droite inclinée

Hypothèses de la MMC

Hypothèses des Petites Perturbations

Petites déformations

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_{ij} \text{ avec } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$



Petits déplacements

Equations d'équilibre dans la configuration non déformée

Loi de Comportement Elastique Linéaire Homogène Isotrope : Loi de HOOKE

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \sigma) \delta \\ \sigma &= 2\mu \varepsilon + \lambda (\text{tr} \varepsilon) \delta \end{aligned} \right\} \xrightarrow{3D} \left\{ \begin{aligned} \begin{pmatrix} \varepsilon & \gamma_y/2 & \gamma_z/2 \\ \gamma_y/2 & \varepsilon_T & 0 \\ \gamma_z/2 & 0 & \varepsilon_T \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sigma = E\varepsilon \\ \tau_y = G\gamma_y \\ \tau_z = G\gamma_z \end{pmatrix} \\ -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon} = \nu & \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{2D} \left\{ \begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sigma = E\varepsilon \\ \tau = G\gamma \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \varepsilon & \gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & \varepsilon_T & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_T \end{pmatrix} & \end{aligned} \right\}$$

Hypothèses de la RDM

Principe de NAVIER BERNOULLI

$$\varepsilon(y, z) = a + by + cz$$

Principe de SAINT VENANT

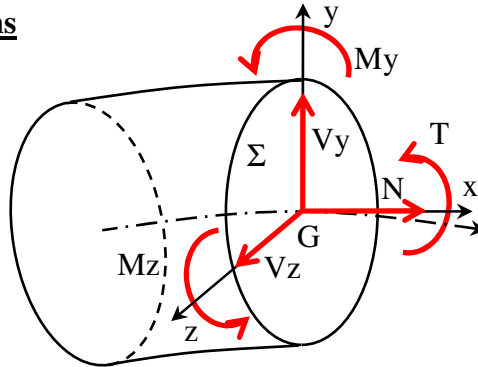
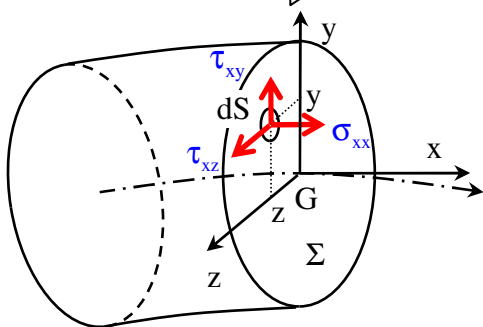
$$\sigma(N, M_y, M_z) \\ \tau_y, \tau_z(V_y, V_z, T)$$

HOOKE

$$3D \quad \sigma(y, z) = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

$$2D \quad \sigma(y, z) = \frac{N}{A} - \frac{M}{I_z} y$$

Contraintes \implies **Sollicitations**



$$\left\{ \begin{aligned} N &= \int_{\Sigma} \sigma_{xx} dS \\ V_y &= \int_{\Sigma} \tau_{xy} dS \\ V_z &= \int_{\Sigma} \tau_{xz} dS \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} T &= \int_{\Sigma} -\tau_{xy} z + \tau_{xz} y dS \\ M_y &= \int_{\Sigma} \sigma_{xx} z dS \\ M_z &= \int_{\Sigma} -\sigma_{xx} y dS \end{aligned} \right.$$

Sollicitations \implies **Contraintes normales 2D**

N - M=0 Traction-Compression Simple

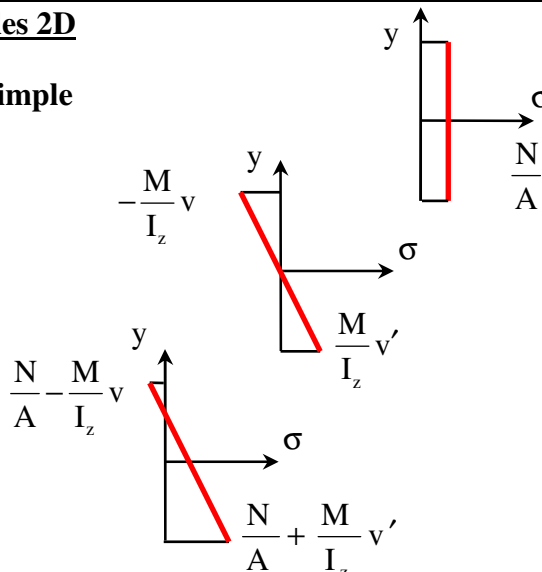
$$\sigma(y) = \frac{N}{A}$$

N=0 - M Flexion Simple

$$\sigma(y) = -\frac{M}{I_z} y$$

N - M Flexion Composée

$$\sigma(y) = \frac{N}{A} - \frac{M}{I_z} y$$

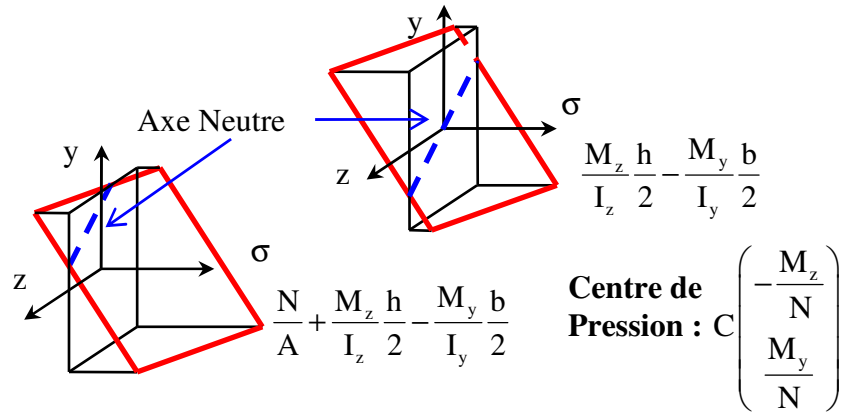


Centre de Pression : $C \begin{pmatrix} -\frac{M}{N} \\ 0 \end{pmatrix}$

Sollicitations \implies **Contraintes normales 3D**

$N=0 - M_y - M_z$ Flexion déviée

$$\sigma(y, z) = -\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$



$N - M_y - M_z$ Flexion Composée

$$\sigma(y, z) = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

Axe neutre

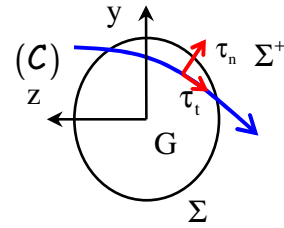
$$\sigma(y, z) = 0 \implies 1 + \frac{y_c}{i_z^2} y + \frac{z_c}{i_y^2} z = 0$$

Novau central

Lieux de C tel que section entièrement comprimée \implies Limite = Axe Neutre tangent à la section

Contraintes tangentes – Théorème de la coupure

$$\int_{(C)} \tau_n dl = \frac{V_y}{I_z} S_z(\Sigma^+) + \frac{V_z}{I_y} S_y(\Sigma^+)$$



Effort tranchant \implies **Contraintes tangentes**

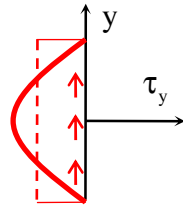
Section massive

$$\tau_y(y) = \frac{V_y}{I_z} \frac{S_z(\Sigma^+)}{b(y)}$$

Section rectangulaire

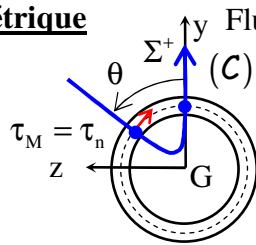
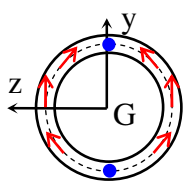
$$\tau_y(y) = \frac{3}{2} \frac{V_y}{A} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right)$$

$$\tau_{y \max} = \frac{3}{2} \frac{V_y}{A}$$



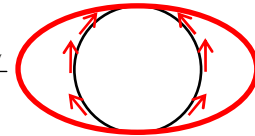
Profil mince fermé symétrique

Flux de cisaillement τ_e continu



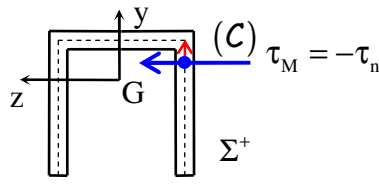
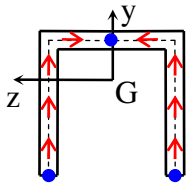
$$\tau_M = \frac{V_y}{\pi Re} \sin \theta = \frac{V_y}{A} 2 \sin \theta$$

$$\tau_{\max} = 2 \frac{V_y}{A}$$



Profil mince ouvert symétrique

Flux de cisaillement τ_e continu



$$\tau_M = -\tau_n$$

$$\frac{V_y}{2eh}$$

Linéaire

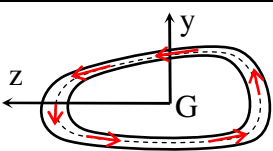
Parabolique

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{V_y}{2eh}$$

Torsion \implies **Contraintes tangentes**

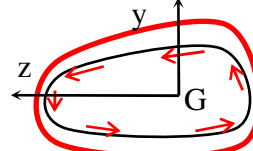
Profil mince fermé mono cellulaire

Flux de cisaillement constant : $\tau_B e_B = \tau_A e_A$



Première formule de BREDT

$$\tau = \frac{T}{2Se} \quad \tau_{\max} = \frac{T}{2Se_{\min}}$$



Deuxième formule de BREDT

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{T}{GJ} \quad J = \frac{4S^2}{\oint \frac{ds}{e}}$$

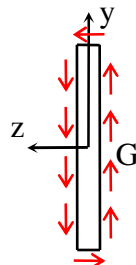
Anneau : $J = I_G$

Surface intérieure : S

Profil mince ouvert

$$J = \frac{he^3}{3}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{J} e$$



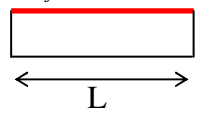
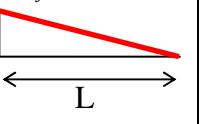
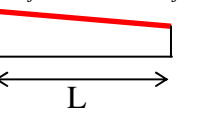
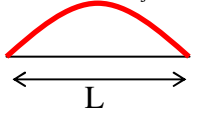
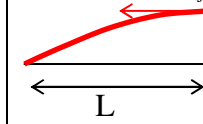
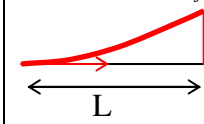
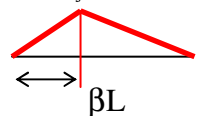
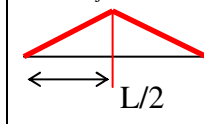
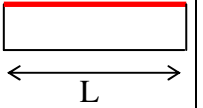
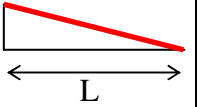
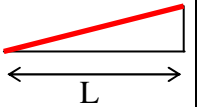
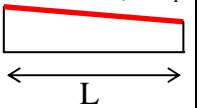
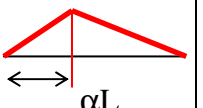
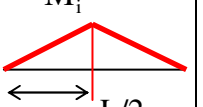
$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{T}{GJ}$$

Profils composés :

$$J = \sum \frac{he^3}{3}$$

Le long du bord extérieur vertical

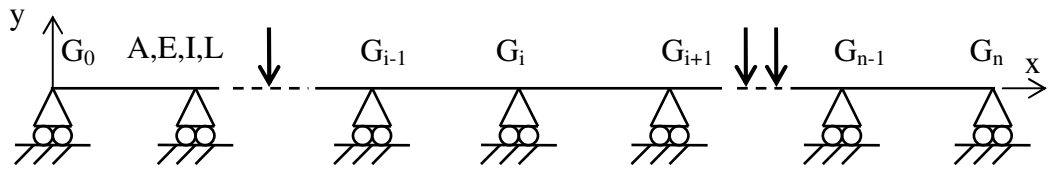
Tableau des intégrales de MOHR : $\int_0^L M_i(x) M_j(x) dx = X M_i M_j L$ avec X : valeur lue dans le tableau

$M_j(x)$	M_j	M_j	M_j φM_j	M_j	M_j	M_j	M_j	M_j	
$M_i(x)$									
M_i		$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\varphi}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
M_i		$\frac{1}{2}$	$\frac{2+\varphi}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{(2-\beta)}{6}$	$\frac{1}{4}$	
M_i		$\frac{1}{2}$	$\frac{1+2\varphi}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{(1+\beta)}{6}$	$\frac{1}{4}$	
M_i ψM_i		$\frac{1+\psi}{2}$	$\frac{2+\psi}{6}$	$\frac{2+\varphi+\psi+2\varphi\psi}{6}$	$\frac{1+\psi}{3}$	$\frac{3+5\psi}{12}$	$\frac{1+3\psi}{12}$	$\frac{(2-\beta)+\psi(1+\beta)}{6}$	$\frac{1+\psi}{4}$
M_i		$\frac{1}{2}$	$\frac{2-\alpha}{6}$	$\frac{(2-\alpha)+\varphi(1+\alpha)}{6}$	$\frac{1-\alpha-\alpha^2}{3}$	$\frac{3+3\alpha-\alpha^2}{12}$	$\frac{1+3\psi}{12}$	$\alpha > \beta \quad \frac{1-(1-\alpha)^2-\beta^2}{6\alpha(1-\beta)}$ $\alpha < \beta \quad \frac{1-(1-\beta)^2-\alpha^2}{6\beta(1-\alpha)}$	$\alpha > \frac{1}{2} \quad \frac{3-4(1-\alpha)^2}{12\alpha}$ $\alpha < \frac{1}{2} \quad \frac{3-4\alpha^2}{12(1-\alpha)}$
M_i		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1+\varphi}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{17}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\beta < \frac{1}{2} \quad \frac{3-4\beta^2}{12(1-\beta)}$ $\beta > \frac{1}{2} \quad \frac{3-4(1-\beta)^2}{12\beta}$	$\frac{1}{3}$

Dans le tableau, M_i, M_j sont les extremums des fonctions $M_i(x), M_j(x)$, ils sont à prendre en valeurs algébriques. Les coefs. φ et ψ sont algébriques

Formule des 3 moments :

Poutre continue :



Travée :	1		i	i+1		n
Longueur :	L_1		L_i	L_{i+1}		L_n
Inertie I_{Gz} :	I_1		I_i	I_{i+1}		I_n
Module E	E_1		E_i	E_{i+1}		E_n

On appelle ω'_i et ω''_i les rotations aux appuis de la travée i isostatique associée.

Cas : Déformations d'effort tranchant négligées devant celles du moment fléchissant.
E et I sont constants dans chaque travée.
Pas de dénivellation d'appuis.

$$\lambda_{i,i-1} = \frac{L_i}{6E_i I_i} \quad \lambda_{i,i} = \frac{L_i}{3E_i I_i} + \frac{L_{i+1}}{3E_{i+1} I_{i+1}} \quad \lambda_{i,i+1} = \frac{L_{i+1}}{6E_{i+1} I_{i+1}}$$

$$\frac{L_i}{6E_i I_i} M_{i-1} + 2 \left(\frac{L_i}{6E_i I_i} + \frac{L_{i+1}}{6E_{i+1} I_{i+1}} \right) M_i + \frac{L_{i+1}}{6E_{i+1} I_{i+1}} M_{i+1} = \omega'_{i+1} - \omega''_i$$

Cas : Poutre continue d'inertie constante I et de module d'élasticité constant E.

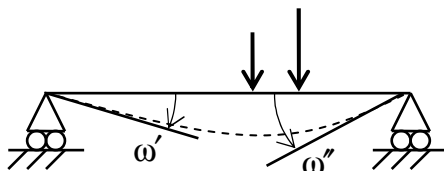
$$L_i M_{i-1} + 2(L_i + L_{i+1}) M_i + L_{i+1} M_{i+1} = 6EI(\omega'_{i+1} - \omega''_i)$$

Dénivellation sur appuis i v_i :

Ω_i la rotation de la travée isostatique associée : $\Omega_i = \frac{v_i - v_{i-1}}{L_i}$

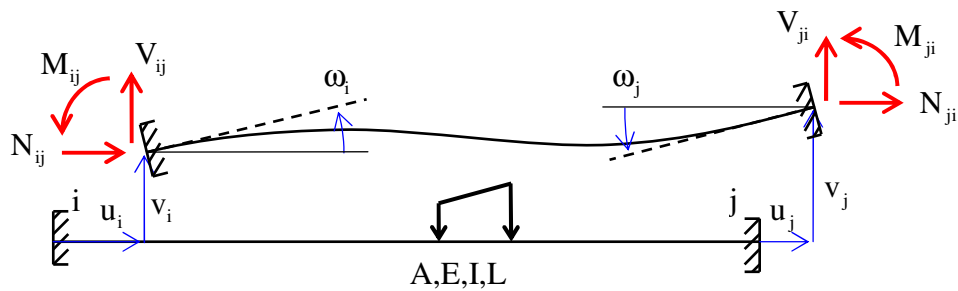
$$\frac{L_i}{6E_i I_i} M_{i-1} + 2 \left(\frac{L_i}{6E_i I_i} + \frac{L_{i+1}}{6E_{i+1} I_{i+1}} \right) M_i + \frac{L_{i+1}}{6E_{i+1} I_{i+1}} M_{i+1} = \omega'_{i+1} - \omega''_i + \Omega_{i+1} - \Omega_i$$

Rotations poutre isostatique :



$\omega' = -\frac{FL^2}{16EI}$ $\omega'' = \frac{FL^2}{16EI}$	$\omega' = -\frac{Fab(L+b)}{6EIL}$ $\omega'' = \frac{Fab(L+a)}{6EIL}$
$\omega' = -\frac{pL^3}{24EI}$ $\omega'' = \frac{pL^3}{24EI}$	$\omega' = -\frac{pa^2(2L-a)^2}{24EIL}$ $\omega'' = \frac{pa^2(2L^2-a^2)}{24EIL}$
$\omega' = -\frac{pb(b+2c)}{48EIL} (4L^2 - (b+2c)^2 - b^2)$ $\omega'' = \frac{pb(2a+b)}{48EIL} (4L^2 - (2a+b)^2 - b^2)$	$\omega' = -\frac{p}{24EI} (L^3 - 2La^2 + a^3)$ $\omega'' = \frac{p}{24EI} (L^3 - 2La^2 + a^3)$
$\omega' = -\frac{7pL^3}{360EI}$ $\omega'' = \frac{8pL^3}{360EI}$	$\omega' = -\frac{p}{360EI} (L+b)(7L^2 - 3b^2)$ $\omega'' = \frac{p}{360EI} (L+a)(7L^2 - 3a^2)$
$\omega' = -\frac{C}{6EIL} (L^2 - 3b^2)$ $\omega'' = -\frac{C}{6EIL} (L^2 - 3a^2)$	$\omega' = 0$ $\omega'' = 0$

Méthode des déplacements :



$$N_{ij} = -\frac{EA}{L}(u_j - u_i) + N_{ij}^0$$

$$N_{ji} = \frac{EA}{L}(u_j - u_i) + N_{ji}^0$$

$$V_{ij} = k \frac{1+\lambda}{L}(\omega_i + \omega_j) - 2k \frac{1+\lambda}{L^2}(v_j - v_i) + V_{ij}^0$$

$$V_{ji} = -k \frac{1+\lambda}{L}(\omega_i + \omega_j) + 2k \frac{1+\lambda}{L^2}(v_j - v_i) + V_{ji}^0$$

$$M_{ij} = k\omega_i + k\lambda\omega_j - k \frac{1+\lambda}{L}(v_j - v_i) + M_{ij}^0$$

$$M_{ji} = k\lambda\omega_i + k\omega_j - k \frac{1+\lambda}{L}(v_j - v_i) + M_{ji}^0$$

$$N_{ij} = -\frac{EA}{L}(u_j - u_i) + N_{ij}^0$$

$$N_{ji} = \frac{EA}{L}(u_j - u_i) + N_{ji}^0$$

$$V_{ij} = \frac{6EI}{L^2}(\omega_i + \omega_j) - \frac{12EI}{L^3}(v_j - v_i) + V_{ij}^0$$

$$V_{ji} = -\frac{6EI}{L^2}(\omega_i + \omega_j) + \frac{12EI}{L^3}(v_j - v_i) + V_{ji}^0$$

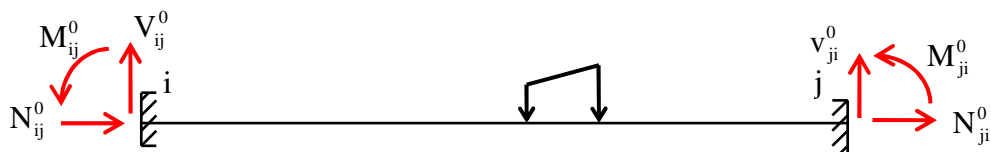
$$M_{ij} = \frac{4EI}{L}\omega_i + \frac{2EI}{L}\omega_j - \frac{6EI}{L^2}(v_j - v_i) + M_{ij}^0$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L}\omega_i + \frac{4EI}{L}\omega_j - \frac{6EI}{L^2}(v_j - v_i) + M_{ji}^0$$

$$k = 4 \frac{EI}{L} \quad \text{Facteur de rigidité}$$

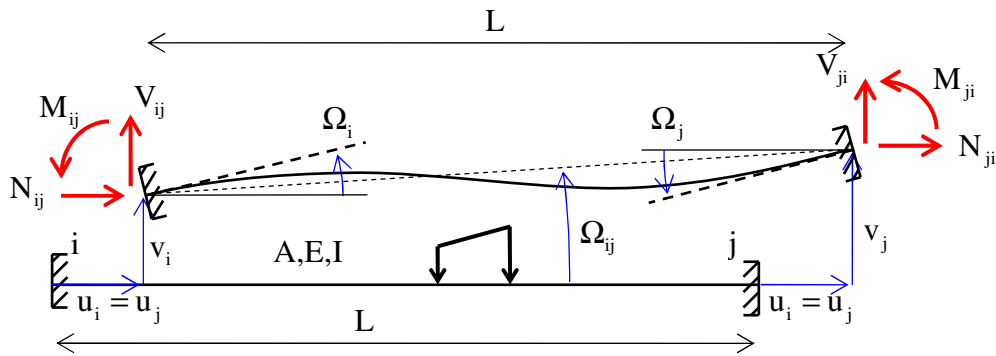
$$\lambda = \frac{1}{2} \quad \text{Facteur de transmission}$$

Poutre bi encastrée :



Méthode des rotations :

On néglige les déformations d'effort normal – hypothèse de longueur des barres invariables :



Expressions des moments aux extrémités de la barre ij en fonction des rotations aux extrémités de la barre ij :

$$M_{ij} = k\Omega_i + k\lambda\Omega_j - k(1+\lambda)\Omega_{ij} + M_{ij}^0$$

$$M_{ij} = \frac{4EI}{L}\Omega_i + \frac{2EI}{L}\Omega_j - \frac{6EI}{L}\Omega_{ij} + M_{ij}^0$$

$$M_{ji} = k\lambda\Omega_i + k\Omega_j - k(1+\lambda)\Omega_{ij} + M_{ji}^0$$

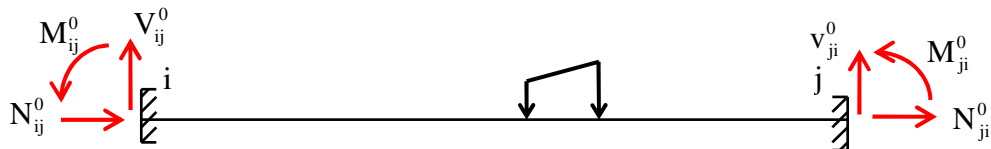
$$M_{ji} = \frac{2EI}{L}\Omega_i + \frac{4EI}{L}\Omega_j - \frac{6EI}{L}\Omega_{ij} + M_{ji}^0$$

$$k = 4 \frac{EI}{L} \text{ Facteur de rigidité}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{v_j - v_i}{L} \text{ Rotation d'ensemble}$$

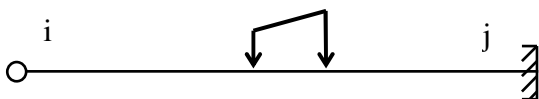
$$\lambda = \frac{1}{2} \text{ Facteur de transmission}$$

Poutre bi encastree



Substitution :

Poutre articulée-encastree

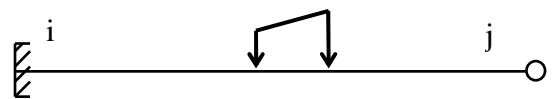


$$M_{ij}=0$$

$$M_{ji} (M_{ij} = 0) = k(1-\lambda^2)\Omega_j - k(1-\lambda^2)\Omega_{ij} - \lambda M_{ij}^0 + M_{ji}^0$$

$$M_{ji} (M_{ij} = 0) = 3 \frac{EI}{L}\Omega_j - 3 \frac{EI}{L}\Omega_{ij} - \frac{1}{2}M_{ij}^0 + M_{ji}^0$$

Poutre encastree-articulée

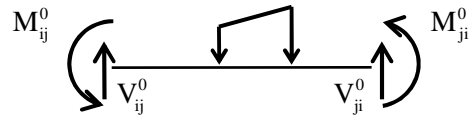
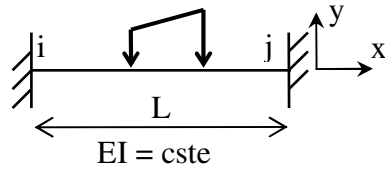


$$M_{ji}=0$$

$$M_{ij} (M_{ji} = 0) = k(1-\lambda^2)\Omega_i - k(1-\lambda^2)\Omega_{ij} + M_{ij}^0 - \lambda M_{ji}^0$$

$$M_{ij} (M_{ji} = 0) = 3 \frac{EI}{L}\Omega_i - 3 \frac{EI}{L}\Omega_{ij} + M_{ij}^0 - \frac{1}{2}M_{ji}^0$$

Poutres bi encastrées :



$$M_{ij}^0 = \frac{PL}{8} \qquad M_{ji}^0 = -\frac{PL}{8}$$

$$V_{ij}^0 = \frac{P}{2} \qquad V_{ji}^0 = \frac{P}{2}$$

$$M_{ij}^0 = \frac{qL^2}{12} \qquad M_{ji}^0 = -\frac{qL^2}{12}$$

$$V_{ij}^0 = \frac{qL}{2} \qquad V_{ji}^0 = \frac{qL}{2}$$

$$M_{ij}^0 = \frac{Pab^2}{L^2} \qquad M_{ji}^0 = -\frac{Pa^2b}{L^2}$$

$$V_{ij}^0 = -\frac{Pab}{L^3}(a-b) + P\frac{b}{L} \qquad V_{ji}^0 = \frac{Pab}{L^3}(a-b) + P\frac{a}{L}$$

$$M_{ij}^0 = \frac{qL^2}{30} \qquad M_{ji}^0 = -\frac{qL^2}{20}$$

$$V_{ij}^0 = \frac{3}{20}qL \qquad V_{ji}^0 = \frac{7}{20}qL$$

$$M_{ij}^0 = \frac{Pa(L-a)}{L} \qquad M_{ji}^0 = -\frac{Pa(L-a)}{L}$$

$$V_{ij}^0 = P \qquad V_{ji}^0 = P$$

$$M_{ij}^0 = -\frac{qL^2}{20} \qquad M_{ji}^0 = -\frac{qL^2}{30}$$

$$V_{ij}^0 = \frac{7}{20}qL \qquad V_{ji}^0 = \frac{3}{20}qL$$

$$M_{ij}^0 = -\frac{b(2a-b)}{L^2}C \qquad M_{ji}^0 = -\frac{a(2b-a)}{L^2}C$$

$$V_{ij}^0 = -\frac{6ab}{L^3} \qquad V_{ji}^0 = \frac{6ab}{L^3}$$

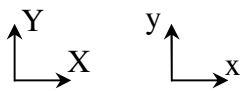
$$M_{ij}^0 = \frac{5qL^2}{96} \qquad M_{ji}^0 = \frac{5qL^2}{96}$$

$$V_{ij}^0 = -\frac{qL}{4} \qquad V_{ji}^0 = -\frac{qL}{4}$$

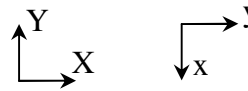
Matrice de rigidité : repère

local 

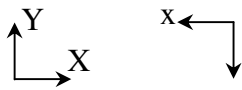
global 




$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$



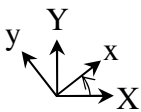
$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$



$\frac{EA}{L} \cos^2 \theta + \frac{12EI}{L^3} \sin^2 \theta$					
$\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right) \sin \theta \cos \theta$	$\frac{EA}{L} \sin^2 \theta + \frac{12EI}{L^3} \cos^2 \theta$			Sym	
$-\frac{6EI}{L^2} \sin \theta$	$\frac{6EI}{L^2} \cos \theta$	$\frac{4EI}{L}$			
$-\frac{EA}{L} \cos^2 \theta - \frac{12EI}{L^3} \sin^2 \theta$	$\left(-\frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3}\right) \sin \theta \cos \theta$	$\frac{6EI}{L^2} \sin \theta$	$\frac{EA}{L} \cos^2 \theta + \frac{12EI}{L^3} \sin^2 \theta$		
$\left(-\frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3}\right) \sin \theta \cos \theta$	$-\frac{EA}{L} \sin^2 \theta - \frac{12EI}{L^3} \cos^2 \theta$	$-\frac{6EI}{L^2} \cos \theta$	$\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right) \sin \theta \cos \theta$	$\frac{EA}{L} \sin^2 \theta + \frac{12EI}{L^3} \cos^2 \theta$	
$-\frac{6EI}{L^2} \sin \theta$	$\frac{6EI}{L^2} \cos \theta$	$\frac{2EI}{L}$	$\frac{6EI}{L^2} \sin \theta$	$-\frac{6EI}{L^2} \cos \theta$	$\frac{4EI}{L}$