E.N.T.P.E
Probabilités - 1ère année
DS2 - 10 Juin 2014

Durée : 2h

Documents autorisés : *Une feuille de notes recto-verso au format A4. Les calculatrices et autres dispositifs électroniques ne sont pas autorisés.*

Exercice 1 *(3 points)*
La taille d'un homme âgé de 25 ans suit une loi normale de moyenne 175cm et d'écart-type 6cm. **(1,5 points)**

1. Quel est le pourcentage d'hommes ayant une taille supérieure à 1m85 ?
   Soit ϕ la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et $Y = \dfrac{X-175}{6}$ la variable qui suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

$$P(X > 185) = P\left(\frac{X-175}{6} > \frac{185-175}{6}\right) = P(y > 5/3) = 1 - \phi(5/3) \approx 0,05$$

2. Parmi les hommes mesurant plus de 1m80, quelle proportion mesure plus de 1m92 ?**(1,5 points)**

$$\begin{aligned} P(X > 192 | X > 180) = &\ \frac{P(X > 192 \cap X > 180)}{P(X > 180} \\ &= \frac{P(X > 192)}{P(X > 180} \\ &= \frac{1-\phi(17/6)}{1-\phi(5/3)} \approx 0,01 \end{aligned}$$

Exercice 2 *(5 points)*
Le fonctionnement d'une machine est perturbé par des pannes. On considère les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 définies par : X_1 est le temps, exprimé en heures, écoulé entre la mise en route de la machine et la première panne. X_2 (resp. X_3), est le temps, en heures, écoulé entre la remise en route de la machine après la première (resp. la deuxième) panne et la panne suivante. On suppose que les variables aléatoires X_1,X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi exponentielle de paramètre $1/2$.

1. Quelle est la durée moyenne de fonctionnement entre deux pannes consécutives ? **(1 points)**
   espérance commune des varibales aléatoires X_1, X_2, X_3 *soit* $1/0,5 = 2$.
2. Soit E l'évènement : "chacune des 3 périodes de fonctionnement de la machine dure plus de 2 heures". Calculer $P(E)$. **(2 points)**
   $E = (X_1 \geq 2) \cap (X_2 \geq 2) \cap (X_3 \geq 2)$.. *Par indépendance des variables, on a*
   $$P(E) = P(X_1 \geq 2)P(X_2 \geq 2)P(X_3 \geq 2).$$
   De plus, $P(X_i \geq 2) = e^{-1}$ *d'après la densité de la loi exponentielle donc* $P(E) = e^{-3}$.
3. Soit Y la variable aléatoire égale à la plus grande des 3 durées de fonctionnement de la machine sans interruption.
   (a) Calculer $P(Y \leq t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. **(1 point)**
   $Y = max(X_1, X_2, X_3)$ *donc* $(Y \leq t) = (X_1 \geq t) \cap (X_2 \geq t) \cap (X_3 \geq t)$ *et par indépendance* $P(Y \leq t) = P(X_1 \geq t)P(X_2 \geq t)P(X_3 \geq t)$. *Ainsi, si* $t \leq 0$, $P(Y \leq t) = 0$. *Si* $t > 0$, *alors* $P(Y \leq t) = (1 - e^{-t/2})^3$.
   (b) Déterminer la densité de Y. **(1 point)**
   En dérivant la fonction de répartition calculée à la question précédente, on obtient :
   $$f_Y(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ \frac{3}{2}e^{-t/2}(1 - e^{-t/2})^2 \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

Exercice 3 *(3 points)*
Une entreprise compte 100 employés. Chacun d'eux téléphone en moyenne 12 minutes par heures. Soit X le nombre d'employés qui téléphonent à l'instant t.

1. Les appels des employés étant supposés indépendants, justifier que X suit une loi binomiale ? **(1 points)**
   La probabilité pour qu'un employé téléphone à l'instant t est $12/60$. *Les appels des employés étant supposés indépendants,* X *suit une loi binomiale* $\mathcal{B}(100, 1/5)$, *d'espérance* 20 *et d'écart-type* 4.
2. Quel est le nombre de lignes N que l'entreprise doit installer pour que la probabilité que toutes les lignes soient utilisées au même instant soit au plus égale à $0,025$?**(2 points)**
   Soit N *le nombre de lignes installées et soit* $Z = \frac{X-20}{/}4$. *D'après le théorème central limite, on peut considérer que* Z *suit une loi normale centrée réduite. On a donc :*
   $$\begin{aligned} P(X \geq N) \leq 0,025 &\iff P(Z \geq \tfrac{N-20}{4}) \leq 0,025 \\ &\iff 1 - \phi(\tfrac{N-20}{4}) \leq 0,025 \\ &\iff \phi(\tfrac{N-20}{4}) \geq 0,975 \\ &\iff N \geq 28. \end{aligned}$$

Exercice 4 *(5 points)*
Théo fait du tir à l'arc sur une cible circulaire de rayon 1. On suppose que le point d'impact M de coordonnées (X, Y) est uniformément distribué sur la cible.

1. Quelle est la densité du couple (X, Y) ? **(1 points)**
   $f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_D(x, y)$
2. Calculer les lois marginales de X et de Y. **(2 points)**
$$f_X(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - x^2}\mathbb{1}_{]-1,1[}(x),\ f_Y(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - y^2}\mathbb{1}_{]-1,1[}(y)$$
3. Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ? **(2 points)**
   Elles ne sont pas indépendantes, par exemple si $I = J = [3/4, 1]$ *alors* $P(X \in I, Y \in J) = 0$ *mais* $P(X \in I, Y \in J) \neq P(X \in I)P(Y \in J)$ *car* $P(X \in I) > 0$ *et* $P(Y \in J) > 0$.

Exercice 5 *(4 points)*
Un producteur de champagne commercialise ses produits en fonction de leur qualité :
- les champagnes "grand cru" vendus 40 euros la bouteille,
- les champagnes "du terroir".

Malgré tout le soin qu'il apporte à la production ainsi qu'à la commercialisation, il subsiste des erreurs d'étiquetage. Ainsi, un acheteur de champagne "grand cru" a une probabilité égale à $(\sqrt{2} - 1)/2\sqrt{2}$ d'avoir en fait acheter une bouteille de champagne "du terroir".

1. Un restaurateur achète 200 bouteilles "grand cru". Soit X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de champagne "du terroir" parmi les 200 achetées. Montrer que X s'écrit comme une somme de variables aléatoires qui suivent une loi de Bernouilli puis déterminer la loi de X, son espérance, sa variance. **(1 points)** *A la ième bouteille "grand cru" achetée, on associe une variable aléatoire* X_i *telle que* $X_i = 1$ *si la ième bouteille achetée est "du terroir" (avec une probabilité* $p = (\sqrt{2} - 1)/2\sqrt{2}$*) et* $X_i = 0$ *sinon (probabilité* $1 - p$*). Le nombre total de bouteilles "du terroir"* X*, parmi les* 200 *bouteilles achetées est égal à la somme des* X_i*. Les* 200 *bouteilles étant tirées au hasard dans l'ensemble des bouteilles de type "grand cru", la variable* X *suit une loi binomiale de paramètres* 200 *et* $(\sqrt{2} - 1)/2\sqrt{2}$. $E(X) = 200 \times p$, $V(X) = 25$
2. Donner en la justifiant une approximation de la loi de X **(1 points)** *conditions d'applications du théorème central limite vérifiées par les valeurs des paramètres donc on peut approcher* X *par une loi normale* $\mathcal{N}(200 \times (\sqrt{2} - 1)/2\sqrt{2}, 5)$.
3. Au fur et à mesure de la consommation des 200 bouteilles, le restaurateur a pu détecter chacune des bouteilles dites "du terroir". Il décide alors de payer uniquement les bouteilles de qualité "grand cru" et refuse de payer celles "du terroir".
   Sachant que pour le producteur une bouteille de qualité " du terroir" a un coût de revient de 12 euros et une bouteille de qualité " grand cru" a un coût de revient de 30 euros, calculez la probabilité d'un bénéfice positif malgré la décision du restaurateur. **(2 points)**
   Les bouteilles de type "du terroir" causent une perte unitaire de 12 *euros alors que les bouteilles "grand cru" au nombre de* $(200 - X)$ *créent un bénéfice unitaire de* 10 *euros donc le bénéfice total* B *est :* $B = 10(200 - X) - 12X$ *et la probabilité pour qu'il soit positif s'écrit*
$$P(B > 0) = P(2000 - 22X > 0) = P(X < 90.91)$$

$$P(B>0)=P(\frac{X-200(\sqrt{2}-1)/2\sqrt{2}}{5}<\frac{90.91-200(\sqrt{2}-1)/2\sqrt{2}}{5})$$

donc malgré les erreurs lors de la livraison et le non paiement des bouteilles ”du terroir” il est quasiment certain que le bénéfice sera positif.