DEUXIEME TEST DE CALCUL SCIENTIFIQUE

2 JUIN 2004

Les deux parties de ce sujet sont indépendantes

ENONCE (barème : 1+2+1+2+2+1+1+2+2+2+1+3)

Dans ce problème, on notera X le vecteur dont les coordonnées x et y sont deux fonctions du temps solutions du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & \epsilon\,(\,xy + 2\,) \\ y' & = & xy^2 + xy - y + 4 \end{array} \right.$$

où ϵ est un paramètre réel.

PARTIE A

Dans cette première partie on suppose $\epsilon \neq 0$ et on s'intéresse aux solutions stationnaires du système différentiel, c'est-à-dire aux solutions indépendantes du temps.

1) Ecrire l'équation $F(X) = 0$ que doivent vérifier ces solutions stationnaires, et calculer la Jacobienne $DF(X)$. 1

2) Afin de déterminer numériquement ces solutions stationnaires on construit une suite de vecteurs à l'aide de la méthode de Newton avec les conditions initiales $X_0 = (x_0, y_0)$. Exprimer les coordonnées de X_{n+1} en fonction de celles de X_n. 2

3) Peut-on calculer une solution stationnaire en utilisant la condition initiale $X_0 = (0, 1)$? Pourquoi? 1

4) On part de $X_0 = (-4, 1)$, calculer numériquement avec 6 chiffres significatifs $F(X_{n-1})$, $DF^{-1}(X_{n-1})$ et X_n pour n prenant les valeurs 1, 2 et 3. 2

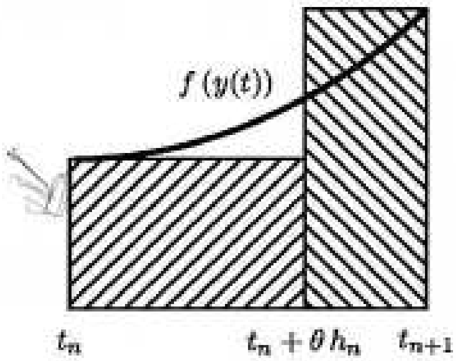
5) Démontrer que $F(X) = 0$ admet une unique solution qu'on notera X_s et calculer numériquement la norme euclidienne $\| X_3 - X_s \|_2$. Conclusion? 2

PARTIE B

Dans cette seconde partie, on supposera pour simplifier que $\epsilon = 0$ et on s'intéresse aux solutions du système différentiel vérifiant les conditions initiales $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$.

6) Déterminer x pour $t \geq 0$ ainsi que l'équation différentielle $y' = f(y)$ dont y est solution.

7) Pour déterminer numériquement y sur l'intervalle $[0\,;1]$, on utilise un schéma numérique dans lequel on notera y_n l'approximation de $y(t_n)$ et $h_n = t_{n+1} - t_n$. Déterminer ce schéma en intégrant l'équation différentielle vérifiée par y sur $[t_n\,; t_{n+1}]$, et en approximant l'aire sous la courbe $f(y(t))$ par l'aire hachurée sur la figure. Le paramètre θ est supposé constant et sera déterminé dans la suite du problème.



8) Montrer que le choix du pas h_n est soumis à une contrainte que l'on établira.

9) Calculer explicitement y_{n+1} en fonction de y_n et de h_n et de θ.

10) Peut-on choisir θ pour que le schéma numérique soit d'ordre deux?

11) On suppose que $h_n = 0.1$ et que $\theta = 0.1$. Peut-on calculer numériquement y_5?

12) On suppose que $h_n = 0.1$ et que $\theta = 0.5$. Calculer numériquement y_5 et en déduire l'erreur $e_5 = |y(t_5) - y_5|$.