Premier exercice : dénombrement

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes. Pour chacune d'entre elles, l'on décrira avec précision le modèle probabiliste retenu.

1. Une course de voiliers oppose un équipage grec, deux équipages italiens, trois équipages espagnols et quatre équipages portugais. On suppose que ces équipages ont les mêmes chances de gagner, et terminent la course à des instants différents. Quelle est alors la probabilité que l'équipage grec l'emporte, et que l'un des équipages italiens arrive en dernière position ?

   L'univers Ω est équipotent à l'ensemble des arrangements avec répétition de longeur 10 (le nombre de voiliers participant à la course) et d'ordre $(1,2,3,4)$ (le quadruplet des nombres de voiliers de chaque nationalité participant à la course) d'éléments de l'ensemble $[\![1,4]\!]$ (le nombre de nationalités), de cardinal $\frac{10!}{1!2!3!4!} = 12600$. L'on munit cet univers de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme P. L'ensemble des réalisations élémentaires impliquant l'événement « l'équipage grec l'emporte et l'un des équipages italiens arrive en dernière position » est quant à lui équipotent à celui des arrangements avec répétition de longeur 8 (le nombre de voiliers n'arrivant ni en tête ni en dernière position) et d'ordre $(1,3,4)$ (le triplet des nombres de voiliers n'arrivant ni en tête ni en dernière position) d'éléments de l'ensemble $[\![1,3]\!]$ (le nombre de nationalités des voiliers n'arrivant ni en tête ni en dernière position), de cardinal $\frac{8!}{1!3!4!} = 280$, de sorte que la probabilité de cet événement vaut $\frac{280}{12600} = \frac{1}{45} \approx 0,022$.

2. Un marchand d'articles de fête possède un stock de boules pour arbre de Noël de couleurs rouge, bleu, vert et jaune. Il décide de les vendre par sachets de 10, sans accorder d'importance à la répartition des coloris dans ces sachets. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un de ces quatre coloris soit absent du premier sachet ainsi confectionné ?

   L'univers Ω est ici équipotent à l'ensemble des combinaisons avec répétition de longeur 10 (le nombre de boules dans le sachet) d'éléments de l'ensemble $[\![1,4]\!]$ (le nombre de couleurs), de cardinal $C_{10+4-1}^{4-1} = C_{13}^{3} = 286$. L'on munit cet univers de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme P. Ayant numéroté de 1 à 4 chacune des couleurs, soit alors, pour chaque entier i compris entre 1 et 4, A_i l'événement « il n'y a pas de boules de couleur i dans le sachet », et soit A lévénement « l'un de ces quatre coloris est absent du premier sachet confectionné ». Cet événement est alors la disjonction des événements $(A_i)_{1\leq i\leq 4}$, si bien que l'on a, en vertu de la formule du crible de Poincaré,

   $$P(A) = \sum_{1\leq i\leq 4} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq 4} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq 4} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

   L'ensemble des réalisations élémentaires impliquant chacun des événements $(A_i)_{1\leq i\leq 4}$ est alors équipotent à celui des combinaisons avec répétition de longeur 10 (le nombre de boules dans le sachet) d'éléments de l'ensemble $[\![1,3]\!]$ (le nombre de couleurs autres que la couleurs i), de cardinal $C_{10+3-1}^{3-1} = C_{12}^{2} = 66$ de sorte que pour chaque entier i compris entre 1 et 4 l'on a $P(A_i) = \frac{66}{286}$. L'ensemble des réalisations élémentaires impliquant chacun des événements $(A_i \cap A_j)_{1\leq i<j\leq 4}$ étant pour sa part équipotent à celui des combinaisons avec répétition de longeur 10 (le nombre de boules dans le sachet) d'éléments de l'ensemble $[\![1,2]\!]$ (le nombre de couleurs autres que les couleurs i et j), de cardinal $C_{10+2-1}^{2-1} = C_{11}^{1} = 11$ de sorte que pour chaque couple d'entiers i et j, distincts et compris entre 1 et 4, l'on a $P(A_i \cap A_j) = \frac{11}{286}$. Maintenant, comme chacun des événements

$(A_i \cap A_j \cap A_k)_{1 \leq i<j<k \leq 4}$ est une réalisation élémentaire, l'on a, pour chaque triplet d'entiers i j et k, deux à deux distincts et compris entre 1 et 4, $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{286}$. Enfin, l'événement $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$, impossible, est de probabilité nulle.
En remarquant ensuite que l'ensemble des événements $(A_i)_{1 \leq i \leq 4}$, équipotent à celui des combinaisons d'un élément d'un ensemble qui en comporte 4, a pour cardinal $C_4^1 = 4$, que l'ensemble des événements $(A_i \cap A_j)_{1 \leq i<j \leq 4}$, pour sa part équipotent à celui des combinaisons de deux éléments d'un ensemble qui en compte 4, a pour cardinal $C_4^2 = 6$, et que l'ensemble des événements $(A_i \cap A_j \cap A_k)_{1 \leq i<j \leq 4}$, quant à lui équipotent à celui des combinaisons de trois éléments d'un ensemble qui en dénombre 4, a pour cardinal $C_4^3 = 4$, l'on obtient finalement

$$P(A) = 4\frac{66}{286} - 6\frac{11}{286} + 4\frac{1}{286} = \frac{202}{286} = \frac{101}{143} \approx 0,706$$

Deuxième exercice : marche aléatoire sur un triangle

Un mobile effectue une suite de déplacements sur les sommets d'un triangle, numérotés 1, 2 et 3. Pour chaque entier naturel n non nul, l'on désigne par p_n la probabilité qu'à la fin de la n-ième étape du processus, ce mobile occupe le sommet numéro 1.

1. Soit n un entier naturel non nul. L'on suppose que lors du passage de l'étape n du processus à l'étape $n+1$, le mobile change de sommet pour occuper, avec une égale probabilité, l'un des deux sommets adjacents. Relier p_{n+1} à p_n. Quelle est la limite de la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ lorsque n tend vers $+\infty$?
2. Soit p un réel compris entre 0 et 1, et soit n un entier naturel non nul. L'on suppose que lors du passage de l'étape n du processus à l'étape $n+1$, le mobile peut, avec la probabilité p, rester sur le sommet qu'il occupe, ou changer de sommet pour occuper, avec une égale probabilité, l'un des deux sommets adjacents. Relier p_{n+1} à p_n. Quelle est la limite de la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ lorsque n tend vers $+\infty$? Dans quel cas cette suite est-elle constante ?

Pour chaque entier naturel n non nul, désignons par A_n l'événement « à la fin de la n-ième étape du processus, le mobile occupe le sommet numéro 1 ».

1. Comme pour chaque entier naturel n, $\{A_n, \overline{A_n}\}$ est un système complet dévénements l'on a
$$\underbrace{P(A_{n+1})}_{p_{n+1}} = \underbrace{P(A_n)}_{p_n}\underbrace{P(A_{n+1}/A_n)}_{0} + \underbrace{P(\overline{A_n})}_{1-p_n}\underbrace{P(A_{n+1}/\overline{A_n})}_{\frac{1}{2}}$$
et donc, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n = \frac{1}{2}$. Cette récurrence affine du premier ordre ayant pour solution générale $p_n = \frac{1}{3} + \alpha(\frac{-1}{2})^n$, avec α une constante arbitraire, la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ a pour limite $\frac{1}{3}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Comme pour chaque entier naturel n, $\{A_n, \overline{A_n}\}$ est un système complet dévénements l'on a cette fois
$$\underbrace{P(A_{n+1})}_{p_{n+1}} = \underbrace{P(A_n)}_{p_n}\underbrace{P(A_{n+1}/A_n)}_{p} + \underbrace{P(\overline{A_n})}_{1-p_n}\underbrace{P(A_{n+1}/\overline{A_n})}_{\frac{1-p}{2}}$$
de sorte que pour tout entier naturel n non nul, l'on a $p_{n+1} + \frac{1-3p}{2}p_n = \frac{1-p}{2}$. Comme cette récurrence affine du premier ordre a pour solution générale $p_n = \frac{1}{3} + \alpha(\frac{3p-1}{2})^n$, avec α une constante arbitraire, si p est différent de 1 la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ a encore pour limite $\frac{1}{3}$ lorsque

n tend vers $+\infty$, tandis que si $p = 1$ elle est constante et a donc pour limite p_1 lorsque n tend vers $+\infty$. Enfin, elle est constante à partir du rang $n = 2$ et égale à $\frac{1}{3}$ si $\frac{3p-1}{2} = 0$, c'est à dire si $p = \frac{1}{3}$

Troisième exercice : les victimes de la veuve noire d'Amérique du Nord

Le nombre de personnes mordues chaque année par des veuves noires d'amérique du nord est une variable aléatoire X obéissant à la loi de Poisson de paramètre λ, avec λ un réel strictement positif. Une personne mordue meurt alors avec une probabilité p. On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de personnes mortes chaque année des suites d'une morsure de veuve noire d'Amérique du Nord.

1. Soit n un entier naturel. Quelle est la loi de Y sachant $\{X = n\}$?

   La loi de Y sachant $\{X = n\}$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Ainsi, l'on a
   $$P\{Y = m/X = n\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$$
   si l'entier naturel m est compris entre 0 et n, et $P\{Y = m/X = n\} = 0$ dans le cas contraire.

2. Déterminer la loi de Y.

   Comme les événements $\{X = n\}$, où n parcourt l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, forment un système complet l'on a, pour tout entier naturel m et en tirant parti du théorème des probabilités totales,
   $$\begin{aligned} P\{Y = m\} &= \sum_{n=0}^{+\infty} P\{X = n\} P\{Y = m/X = n\} \\ &= \sum_{n=m}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^m}{m!} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-m}}{(n-m)!} (1-p)^{n-m} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^m}{m!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^n}{n!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^m}{m!} \mathrm{e}^{\lambda(1-p)} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^m}{m!} \end{aligned}$$
   Ainsi, Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.

Quatrième exercice : tirage d'un nombre conditionné par le lancé d'un dé

Soit n est un entier naturel non nul, et soit p un réel compris entre 0 et 1. On lance un dé honnête à six faces, numérotées de 1 à 6. Si le résultat obtenu est pair, l'on tire ensuite, au hasard, un entier compris entre 1 et n. Dans le cas contraire, l'on choisit une réalisation d'une variable aléatoire obéissant à la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, de paramètres n et p. L'on désigne alors par X la variable aléatoire égale au nombre obtenu à la fin du processus.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

   Désignons par A lévénement « le dé amène un nombre pair ». L'on a alors, pour tout entier naturel m,

$$P\{X=m\} = \underbrace{P(A)}_{\frac{1}{2}}\,P(\{X=m\}/A)\,\underbrace{P(\overline{A})}_{\frac{1}{2}}\,P(\{X=m\}/\overline{A})$$

   Comme $P(\{X=m\}/A)$ est égal à $\frac{1}{n}$ si m est compris entre 1 et n et nul dans le cas contraire, comme $P(\{X=m\}/\overline{A})$ vaut, en posant $q=1-p$, $C_n^m p^m q^{n-m}$ si m est compris entre 0 et n, la loi de la variable aléatoire X est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{d}\mu_X(x) = \left(\frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{n}\delta_m(x) + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}\delta_m(x)\right)\mathrm{d}x$$

2. Calculer l'espérance puis la variance de la variable aléatoire X.

   L'on a

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{2n}\underbrace{\sum_{m=1}^{n} m}_{\frac{n(n+1)}{2}} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m=0}^{n} mC_n^m p^m q^{n-m}}_{np} = \frac{n+1}{4} + \frac{np}{2}$$

   ainsi que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X(X-1)) &= \frac{1}{2n}\underbrace{\sum_{m=1}^{n} m(m-1)}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m=0}^{n} m(m-1)C_n^m p^m q^{n-m}}_{n(n-1)p^2} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n+1}{4} + \frac{n(n-1)p^2}{2}
\end{aligned}$$

   et l'on en déduit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X^2 &= \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}X \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n+1}{4} + \frac{n(n-1)p^2}{2} + \frac{n+1}{4} + \frac{np}{2} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n^2p^2 + np(1-p)}{2}
\end{aligned}$$

   puis

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n^2p^2 + np(1-p)}{2} - \left(\frac{n+1}{4} + \frac{np}{2}\right)^2 \\
&= \frac{(n+1)(5n+1)}{48} + \frac{np(np+2(1-p))}{4} - \frac{(n+1)np}{4} \\
&= \frac{(n+1)(5n+1)}{48} + \frac{np((n-2)p+1-n)}{4}
\end{aligned}$$

3. Donner l'expression de la fonction caractéristique de la variable aléatoire X.

L'on a, pour tout réel t

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \mathbb{E}e^{itX} \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{n} e^{itm} + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n} e^{itm} C_n^m p^m q^{n-m} \\ &= \frac{e^{it}}{2n}\underbrace{\sum_{m=0}^{n-1} e^{itm}}_{\frac{1-e^{itn}}{1-e^{it}}} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m=0}^{n} C_n^m (pe^{it})^m q^{n-m}}_{(q+pe^{it})^n} \\ &= \frac{e^{it}}{2n}\frac{1-e^{itn}}{1-e^{it}} + \frac{1}{2}(1-p+pe^{it})^n\end{aligned}$$

Cinquième exercice : processus de Bernoulli

L'on répète indéfiniment, de façon indépendante, une même épreuve de Bernoulli. Le succès attaché à cette épreuve ayant la probabilité p, avec p un réel strictement compris entre 0 et 1, l'on désigne par $X = (X_1, X_2)$ le couple de variables aléatoires discrètes respectivement égales aux rangs des premier et second succès.

1. Donner la loi du vecteur aléatoire X.

   Pour tout entier naturel m non nul et pour tout entier n strictement supérieur à m, l'événement $\{X_1 = m, X_2 = n\}$ est clairement la conjonction indépendante de $m-1$ échecs, de probabilités $q = 1-p$, du premier succès de probabilité p, suivis de $n-m-1$ nouveaux échecs, puis du second succès, si bien que sa probabilité vaut $q^{m-1}pq^{n-m-1}p = q^{n-2}p^2$ et que la loi du vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2)$ est donnée par

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad d\mu_X(x_1, x_2) = \left(\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=m+1}^{+\infty} q^{n-2}p^2\delta_m(x_1)\delta_n(x_2)\right) dx_1\, dx_2$$

2. Déterminer les lois des variables aléatoires X_1 et X_2.

   Pour tout entier naturel m non nul l'on a

$$P\{X_1 = m\} = \sum_{n=1}^{+\infty} P\{X_1 = m, X_2 = n\} = \sum_{n=m+1}^{+\infty} q^{n-2}p^2 = q^{m-1}p^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n}_{\frac{1}{1-q}=\frac{1}{p}} = q^{m-1}p$$

   ce qui montre que la variable aléatoire X_1 obéit à la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre p. L'on a ensuite, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$P\{X_2 = n\} = \sum_{m=1}^{+\infty} P\{X_1 = m, X_2 = n\} = \sum_{m=1}^{n-1} q^{n-2}p^2 = (n-1)q^{n-2}p^2 = C_{n-1}^{2-1}q^{n-2}p^2$$

   ce qui montre que la variable aléatoire X_2 suit la loi de Pascal $\mathcal{P}(r, p)$ de paramètres $r = 2$ et p.