Questions de cours

1) Il s'agit d'une liste non ordonnée de p éléments pris dans un ensemble de n éléments, tous distincts.

ex. tirage de 3 ~~~~ nombres distincts entre 1 et 10.
On peut obtenir $(1-2-8)$ ou $(\cancel{3}-\cancel{6}-\cancel{7})$
$=(2-1-8)$

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} \quad \text{où} \quad A_n^p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

nombre de possibilité du tirage n° 1 — n° 2 — possibilité du dernier tirage

Donc $C_n^p = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

A.N. $C_{102}^{100} = \dfrac{102!}{100!\,2!} = \dfrac{\left(\frac{102!}{100!}\right)}{2!} = \dfrac{102 \times 101}{2 \times 1} = \dfrac{10302}{2} = 5151$

2) Formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$ car (A_k) disjoints et forment un système complet d'événement

$$= \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B) \times P(A_k)$$

Or $P(B \cap A_1) = P_B(A_1) \times P(B) = P_{A_1}(B) \times P(A_1)$

Donc $P_B(A_1) = \dfrac{P_{A_1}(B) \times P(A_1)}{P(B)} = \dfrac{P_{A_1}(B) \times P(A_1)}{\sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B) \times P(A_k)}$

Cette formule sert à inverser les problème : calculer les P_B en fonction des $P_{A_k}(B)$.

3) ~~Le théorème de transfert dit~~ :

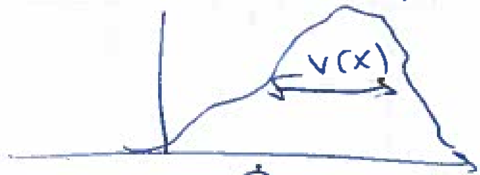
Par definition $E(X^m)$ est le moment d'ordre m.

Le théorème de transfert dit :

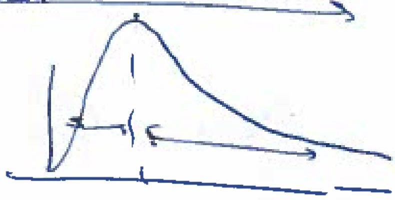
$$E(X^m) = \int_{\mathbb{R}} x^m \cdot f_X(x)\,dx \quad \text{si} \quad \int_{\mathbb{R}} |x^m| \cdot f_X(x)\,dx < +\infty$$

- Le moment d'ordre 1 est l'espérance : il donne la moyenne théorique

- Les moment centré réduit d'ordre 2 est la variance : il donne la dispersion



~~Le m~~ ———— 3 est l'asymétrie, qui donne l'asymétrie de la variable

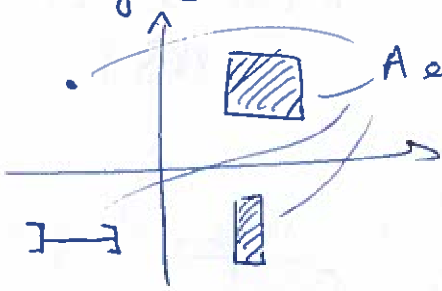


- ———— 4 est le kurtosis (normalisé) il donne la courbure de la variable

4). Ω est l'univers des possibles # résultats de l'expérience.
T est la tribu = l'ensemble de tous les événements que l'on peut obtenir à partir de l'expérience.
P est la ~~Probabi~~ mesure de probabilité qui associe à un événement de T une valeur de probabilité entre 0 et 1.

. Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$, $T = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ est la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$, et P est la mesure de Lebesgue.

ex. $A \in T = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$



A est la réunion d'un ensemble d'ouverts et de fermés de $\mathbb{R}^2$.

5) Notons f_X et f_Y les densités de X et Y, $f_{X,Y}$ leur loi conjointe.
Si X et Y sont indépendantes, alors :
$\forall (x,y) \in (X(\Omega), Y(\Omega))$, $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)$.

$$E(XY) = \int_{\mathbb{R}^2} x \cdot y \cdot f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} x \cdot f_X(x) \cdot y\, f_Y(y) \cdot dx \cdot dy$$
$$= \left(\int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\, dx\right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} y\, f_Y(y)\, dy\right)$$
$$= E(X) \cdot E(Y)$$

Donc $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y) = 0$
X et Y sont alors décorrélées.

Exercice 1

1) a) il y a $\binom{10}{4} = C_{10}^4$ possibilités

b) Soit ils viennent, soit ils ne viennent pas.
$\hookrightarrow \binom{8}{2}$ restant $\qquad \hookrightarrow \binom{8}{4}$

Il y a donc $\binom{8}{2} + \binom{8}{4}$ possibilités

c) Soit l'un vient, soit l'autre, soit aucun des deux.

Il y a donc $\binom{8}{3} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4}$
pas lui ni l'autre !

2) $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

$Card(\Omega) = \binom{10}{4}$

$P(X=0) = \dfrac{Card(X=0)}{Card(\Omega)} = \dfrac{\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}}$ 7 filles

$$P(X=1) = \frac{\binom{7}{3} \times \binom{3}{1}}{\binom{10}{4}}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{7}{2} \times \binom{3}{2}}{\binom{10}{4}}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{7}{1} \times \binom{3}{3}}{\binom{10}{4}}$$

k	$P(X=k)$
0	$\binom{7}{4} / \binom{10}{4}$
1	$\binom{7}{3} \times 3 / \binom{10}{4}$
2	$\binom{7}{2} \times 6 / \binom{10}{4}$
3	$7 \times 1 / \binom{10}{4}$

Exercice 2

1) Formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1}) . P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}) \times P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1}) . P(C_n)$$

$$a_{n+1} = \frac{2}{3} \times a_n + \frac{1}{6} \times b_n + \frac{1}{6} \times c_n$$

De même :

$$b_{n+1} = \frac{1}{6} a_n + \frac{2}{3} b_n + \frac{1}{6} c_n$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{6} a_n + \frac{1}{6} b_n + \frac{2}{3} c_n$$

2) $$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix}}_{M \text{ = matrice "stochastique"}} . \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M . \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Par récurrence immédiate $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.

On accepte l'expression de M^n donnée par le sujet (L'erratum a été donné au début du test).

3) $\cancel{M^n = \frac{1}{2^n} I + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) J \xrightarrow[n \infty]{} 0 \times I + \frac{1}{3} \times J = \frac{1}{3} \cdot J}$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2^n} a_0 + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \times (a_0 + b_0 + c_0) \xrightarrow[n \infty]{} \dfrac{a_0+b_0+c_0}{3} \\ b_n = \frac{1}{2^n} b_0 + \text{———} \xrightarrow[n \infty]{} \text{''} \\ c_n = \frac{1}{2^n} c_0 + \text{———} \xrightarrow[n \infty]{} \text{''} \end{cases}$$

Cela signifie que, quelle que soit la position initiale du mobile, il a la même probabilité d'être sur chaque sommet après de nombreux instants.

Exercice 3

1) Pour que l'appareil fonctionne plus que une durée t $(Y \geq t)$, il faut que le composant 1 fonctionne plus que t $(X_1 \geq t)$, et le composant 2 aussi $(X_2 \geq t)$.

On a donc $(Y \geq t) = (X_1 \geq t) \cap (X_2 \geq t)$

2) ~~Soit~~ Soit $t > 0$. $P(Y \geq t)$ car loi continue.

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = 1 - P(Y \geq t)$$

$$= 1 - P(X_1 \geq t \cap X_2 \geq t)$$

$$= 1 - P(X_1 \geq t) \cdot P(X_2 \geq t) \quad \text{car } X_1, X_2 \text{ indépendants}$$

$$= 1 - (1 - P(X_1 \leq t)) \cdot (1 - P(X_2 \leq t))$$

$$= 1 - [1 - F_{X_{(1)}}(t)] \cdot [1 - F_{X_{(2)}}(t)]$$

$$= 1 - 1 + 2F_X(t) - [F_X(t)]^2 .$$

$$= 2F_X(t) - [F_X(t)]^2$$

$$f_Y(t) = F_Y'(t) = 2f_X(t) - (2f_X(t)) \cdot F_X(t)^1$$

$$= 2f_X(t) \cdot (1 - F_X(t)).$$

On a montré que $f_Y = 2f_X \cdot [1 - F_X]$

3) Soit $t \geq 0$, $F_X(t) = \int_0^t \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} \, dx = \left[-e^{-\frac{1}{5}x}\right]_0^t$

$$= -e^{-\frac{1}{5}t} + e^0 = \boxed{1 - e^{-\frac{1}{5}t}}$$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} \, dx \overset{IPP}{=} \left[x(-1)e^{-\frac{1}{5}x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1 \times (-1) e^{-\frac{1}{5}x} \, dx$$

$$E(X) = 0 + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{5}x}\,dx = \left[-5e^{-\frac{1}{5}x}\right]_0^{+\infty}$$

$$= 0 - (-5)e^0 = \boxed{5.}$$

Les élèves peuvent aussi reconnaître une loi exponentielle s'ils s'en rappellent !

4) $$E(Y) = \int_0^{+\infty} y \times f_Y(y)\,dy = \int_0^{+\infty} y \cdot 2 f_X(y) \cdot [1 - F_X(y)]\,dy$$

$$= \int_0^{+\infty} 2y \cdot \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}y} \times [\cancel{1} - \cancel{1} + e^{-\frac{1}{5}y}]\,dy$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2}{5} y\, e^{-\frac{1}{5}y} e^{-\frac{1}{5}y}\,dy = \int_0^{+\infty} y \left(\frac{2}{5} e^{-\frac{2}{5}y}\right) dy$$

De deux choses l'une. Soit ils font le même calcul que q. 3 pour trouver $\boxed{E(Y) = \frac{5}{2}}$ avec une IPP,

soit ils remarquent que Y suit la même loi que X avec un paramètre $\frac{2}{5}$ au lieu de $\frac{5}{2}$ ...

E(Y) est l'espérance de durée de vie de l'appareil.

Exercice 4.

1) On a $1 = \sum_{i,j} P(X = i \cap Y = j) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}1 + \alpha + 0{,}1$

$$= 0{,}9 + \alpha$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha = 0{,}1}$$

2) * Formule : $P(Y=y) = \sum_{x=0}^{2} P(Y=y \cap X=x)$

On somme les lignes du tableau :

y	-1	0	1
$P(Y=y)$	$0{,}5$	$0{,}3$	$0{,}2$

* $E(Y) = \sum_{y=-1}^{1} y\,P(Y=y) = -1\times 0{,}5 + 0\times 0{,}3 + 1\times 0{,}2$
$= -0{,}5 + 0{,}2 = \boxed{-0{,}3}$

* $E(Y^2) = \sum_{y=-1}^{1} y^2 P(Y=y) = 1\times 0{,}5 + 0\times 0{,}3 + 1\times 0{,}2$
$= 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7.$

$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 0{,}7 - [-0{,}3]^2 = 0{,}7 - 0{,}09$
$\boxed{= 0{,}61}$

3) Elles ne sont pas indépendantes car

Loi de X :

x	$P(X=x)$
0	$0{,}5$
1	$0{,}2$
2	$0{,}3$

$P(Y=0 \cap X=2) = 0$, mais
$P(Y=0)\times P(X=2) = 0{,}3\times 0{,}3 = 0{,}09 \neq 0$

4) Valeurs de Z :

	$Y=-1$	$Y=0$	$Y=1$
$X=0$	-3	-1	1
$X=1$	-2	0	2
$X=2$	-1	1	3

Loi de Z :

z	$P(Z=z)$
-3	$0{,}2$
-2	$0{,}1$
-1	$0{,}4$
0	$0{,}1$
1	$0{,}1$
2	0

$E(Z) = -0{,}6 - 0{,}2 - 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}3 = \boxed{-0{,}8}$