DS 2 - 2016-2017 - Probabilités

Questions de cours

1) Soit $X \sim \mathcal{B}i(n,p)$. On sait que X est le nombre de succès de n expériences de Bernoulli B_i identiques et indépendantes, de probabilité de succès p.

On a donc $X = \sum_{i=1}^{n} B_i$ où $P(B_i = 0) = 1-p$, $P(B_i = 1) = p$, avec $E(B_i^m) = p$ $= 0^m \times 1-p + 1^m \times p$

Donc $V(B_i) = p(1-p)$.

$E(X) = E(\sum_{i=1}^{n} B_i) = \sum_{i=1}^{n} E(B_i) = \underline{np}$ par linéarité de l'espérance

$V(X) = V(\sum_{i=1}^{n} B_i) = \sum_{i=1}^{n} V(B_i) = \underline{np(1-p)}$ car les B_i sont indépendants.

2) a- Une loi exponentielle mesure des durées de vie = durées de phénomènes aléatoire.

b- Une loi de Poisson compte le nombre d'occurrences d'un phénomène aléatoire.

c- Une loi de Pascal donne le rang de r ième succès dans un schéma de Bernoulli

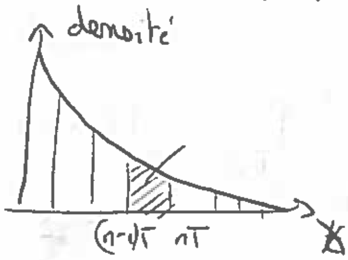
d- Une loi binomiale compte le nombre de succès dans n expériences de Bernoulli

e- Une loi Gamma mesure la durée de vie d'un phénomène aléatoire complexe ($\sum \mathcal{E}(\lambda)$)

f- Une loi du Khi-2 à n degrés de liberté permet de donner la variabilité de la variance empirique, c'est aussi la somme de n variables au carré suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

3) Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. On discrétise le temps en pas de durée T.

On a $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ pour $t > 0$



Soit N la variable aléatoire donnant le rang du pas de temps où le phénomène se produit. On a $\{N = n\} = \{X \in](n-1)T, nT]\}$

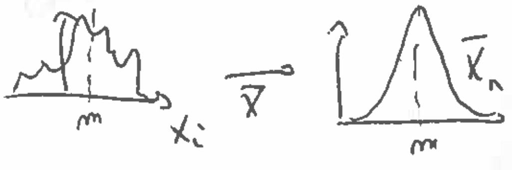
Donc $P(N=n) = P(X \in](n-1)T, nT]) = F_X(nT) - F_X((n-1)T) = 1 - e^{-nT\lambda} - 1 + e^{-(n-1)T\lambda}$

$= (e^{-\lambda T})^{n-1}(1 - e^{-\lambda T}) = q^{n-1} p$ en notant $p = e^{-\lambda T}$ et $q = 1-p \in [0,1]$

Ainsi, $N \sim \mathcal{G}(p)$.

4) TCL : Soit $(X_i)_{i \geq 0}$ une suite de v.a.r indep, identi. distribuées de même moyenne m et variance σ^2, alors $\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{Loi} \mathcal{N}(0,1)$ où $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Concrètement, X_i peut être quelconque, lorsque l'on aura une moyenne calculée avec un grand échantillon, $\overline{X}_n$ suivra une loi normale.



5) Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, λ inconnu de $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un échantillon observé.

a. Méthode des moments pour estimer λ.

On a $E(X) = \lambda$ et $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est un bon estimateur de $E(X)$.

Donc λ est bien estimé par $\boxed{\lambda_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$

b. Méthode du maximum de vraisemblance.

$$L(\vec{x}, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \times \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!}$$

$$\ln(L(\vec{x}, \lambda)) = -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(\lambda) + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{x_i!}\right)$$

$$\frac{\partial \ln(L(\vec{x}, \lambda))}{\partial \lambda} = -n + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{\lambda} + 0$$

Cette expression vaut 0 lorsque $n = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$

c. les deux expressions sont bien identiques.

Exercice 3

1) $P(T > 24) = P\left(\frac{T-20}{\sqrt{4}} > \frac{24-20}{2}\right) = P\left(\frac{T-20}{2} > 2\right)$ où $\frac{T-20}{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$= 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}9772$ d'après la table

$= 22{,}8$ % de la population.

2) $$P_{E \in [-5,5]}(E < 0) = \frac{P(E \in [-5, 0])}{P(E \in [-5,5])} = \frac{P\left(\frac{E-5}{3} \in \left[-\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}\right]\right)}{P\left(\frac{E-5}{3} \in \left[-\frac{10}{3}, 0\right]\right)}$$ où $\frac{E-5}{3} \sim \mathcal{N}(0,1)$

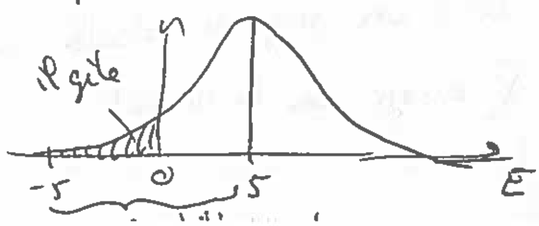
$$= \frac{\Phi(-\frac{5}{3}) - \Phi(-\frac{10}{3})}{\Phi(0) - \Phi(-\frac{10}{3})}$$ où $\Phi(-\frac{10}{3}) = 1 - \Phi(\frac{10}{3})$ et $\Phi(-\frac{5}{3}) = 1 - \Phi(\frac{5}{3})$

0,2586

avec $\Phi(0) = 0{,}5$ et $\Phi(\frac{10}{3}) \approx 1$ d'après la table

$\Phi(\frac{5}{3}) = 0{,}9515$

$$= \frac{1 - \Phi(\frac{5}{3}) - 1 + \Phi(\frac{10}{3})}{0{,}5 - 1 + \Phi(\frac{10}{3})} = \frac{\overset{\approx 1}{\Phi(\frac{10}{3})} - \Phi(\frac{5}{3})}{\underset{\approx 1}{\Phi(\frac{10}{3})} - 0{,}5} = \frac{0{,}0485}{0{,}5} = 0{,}097 \simeq 10\%$$



3) $T-E \sim \mathcal{N}(20-5, 4+9)$ par la propriété de stabilité par somme de la loi normale $\mathcal{N}(15, 13)$. Soit $c \in \mathbb{R}^+$

$$P(C<c) = F_C(c) = P(ke^{T-E} < c) = P\left(e^{T-E} < \frac{c}{k}\right) = P\left(T-E < \ln\frac{c}{k}\right)$$

$$= P\left(\frac{T-E-15}{\sqrt{13}} < \frac{\ln\frac{c}{k}-15}{\sqrt{13}}\right) \text{ où } \frac{T-E-15}{\sqrt{13}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$= \phi\left(\left(\ln\frac{c}{k}-15\right)/\sqrt{13}\right)$$

$$f_C(c) = \frac{\partial}{\partial c}F_C(c) = \frac{1}{c\sqrt{13}} \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln\frac{c}{k}-15}{\sqrt{13}}\right]^2}}_{\phi' = \mathcal{N}(0,1)}$$

C ~~suit~~ une loi log-normale

4) On veut k tq $P(C<10) = 0{,}95 = \phi\left(\frac{\ln\frac{10}{k}-15}{\sqrt{13}}\right)$ d'après la q.3.

Donc d'après la table, $\frac{\ln\frac{10}{k}-15}{\sqrt{13}} = 1{,}65$

Donc $\ln 10 - \ln k = 15 + 1{,}65\sqrt{13}$

$\Rightarrow k = \exp(\ln 10 - 15 - 1{,}65\sqrt{13}) \approx 8.10^{-9}$ = faible valeur, mais c'est une constante... ça arrive.

5) D'après le TCL : $\overline{T} \sim \mathcal{N}(\underset{E(T)}{\underset{\shortparallel}{20}}, \underset{\frac{V(T)}{n}}{\underset{\shortparallel}{\frac{4}{100}}})$

Donc $P(\overline{T} < 19{,}4) + P(\overline{T} > 20{,}6) = P\left(\frac{\overline{T}-20}{\sqrt{4/100}} < \frac{19{,}4-20}{\sqrt{4/100}}\right) + P\left(\frac{\overline{T}+20}{\sqrt{4/100}} > \frac{20{,}6-20}{\sqrt{4/100}}\right)$

$= \phi(-3) + (1-\phi(3)) = = 2 - 2\phi(3)$ où $\phi(3) = 0{,}9986$

$= \approx 0{,}0028 = \underline{0{,}28\ \%}$: très faible

Exercice 4

1). $E(U_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{0}$. $E(U_n^2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$V(U_n) = E(U_n^2) - E(U_n)^2 = \boxed{\frac{1}{2}}$

· $U_1 + \dots + U_n$ représente Y_n, la position sur les ordonnées de la grenouille après n pas de temps.

2) $P(Y_{25} \in [-a, a]) = P(U_1 + \dots + U_{25} \in [-a, a])$ où les U_i sont i.i.d, de même variance et moyenne, le TCL s'applique

$=$ ~~P(U_1+...+U_{25}~~

$\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} U_i \sim \mathcal{N}\left(E(U_i) ; \frac{V(U_i)}{25}\right)$ donc $\sum_{i=1}^{25} U_i \sim \mathcal{N}(0, \underbrace{25 \times V(U_i)}_{12,5})$

Donc $P(Y \in [-a,a]) = P\Big(\underbrace{\frac{\sum U_i - 0}{\sqrt{12,5}}}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} \in \left[\frac{-a}{\sqrt{12,5}}, +\frac{a}{\sqrt{12,5}}\right]\Big) = \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{12,5}}\right) - \Phi\left(\frac{-a}{\sqrt{12,5}}\right)$

$= 2\,\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{12,5}}\right) - 1$

- $P(Y \in [-a,a]) = 0,9$

$\iff 2\,\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{12,5}}\right) - 1 = 0,9 \iff \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{12,5}}\right) = 0,95$

$\iff \frac{a}{\sqrt{12,5}} = 1,65 \implies a = 1,65 \times \sqrt{12,5} = \underline{5,83 \text{ m}}$

Exercice 2

1) $Y = \sum_{i=1}^{9} X_i$ où $X_i \sim \mathcal{P}(5)$.

Par stabilité par somme de la loi de Poisson, on a $Y \sim \mathcal{P}(\sum_{i=1}^{9} 5) = \mathcal{P}(45)$

2) On peut remarquer qu'il suffit que $Y > 70$ pour qu'un usager ait été empêché de monter avant. On cherche donc :

$P(Y > 70)$ où $Y \sim \mathcal{P}(45)$. Comme $45 > 15$, on peut approcher Y par $\mathcal{N}(45, 45)$

Donc $P(Y > 70) = P\left(\frac{Y-45}{\sqrt{45}} > \frac{70-45}{\sqrt{45}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{25}{\sqrt{45}}\right) = 1 - \Phi(3,72)$
$\approx 1 - 1 = 0$

c'est <u>négligeable</u>.

3) a) $\{Y = n\}$ signifie que n individus sont dans le bus à l'ouverture des portes à Laurent Bonnevay.

$Z | \{Y=n\}$ ~~suit~~ une loi binomiale car représente le nombre de succès dans une répétition de n expé de Bernoulli, toutes identiques et indépendantes, où "succès" = "l'individu i souhaite descendre du bus" avec $p = \frac{1}{3}$.

Donc $Z | \{Y = n\} \sim Bi(n,p)$ où $p = 1/3$.

b) $P(Z = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{P(Z = k \mid Y = n)}_{= 0 \text{ si } n < k} \times P(Y = n)$

$= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ où $\lambda = 45$ d'après q1.

$$P(Z=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\cancel{n!}}{k!(n-k)!} \times \frac{1}{\cancel{n!}} e^{-\lambda} \lambda^k \lambda^{n-k} \times p^k q^{n-k}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!} (\lambda q)^{n-k} \times \frac{e^{-\lambda q}}{e^{-\lambda q}}$$

$$= e^{-\lambda} \times e^{\lambda q} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \underbrace{\boxed{\sum_{m=0}^{+\infty} e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^m}{m!}}}_{=1 \text{ car } \mathcal{P}(\lambda q)}$$

$$= e^{\lambda(q-1)} \frac{(p\lambda)^k}{k!} = \boxed{e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}}$$

Donc $\underline{Z \sim \mathcal{P}(\lambda p)}$

Exercice 4

$n = 90$ invitations ont été envoyées.

Chaque invitation a $\frac{1}{3}$ de chance d'avoir une réponse positive.

X, la v.a.r donnant le nombre de représentants venu à la réunion, est le nombre de succès dans une répétition de n expérience de Bernoulli où le succès est : "le représentant i vient à la réunion".

Donc $X \sim \mathcal{B}i(90, \frac{1}{3})$.

$E(X) = np = 30$, $V(X) = npq = 20$

Comme $n \geq 30$ et $npq \geq 15$, on peut approximer X par $\mathcal{N}(np, npq) = \mathcal{N}(30, 20)$ d'après le TCL.

On veut connaître N ~~pour~~ nombre de places dans la salle de réunion, pour que

$$P(X \leq N) = 0,90$$

$$= P\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} \leq \frac{N-30}{\sqrt{20}}\right) \text{ où } \frac{X-30}{\sqrt{20}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$= \Phi\left(\frac{N-30}{\sqrt{20}}\right)$$

D'après la table, $\frac{N-30}{\sqrt{20}} = 1,28$

$\Rightarrow N = 30 + 1,28 \times \sqrt{20} = \underline{35,7}$. On doit donc prendre la salle de 40 places.