

DEUXIEME TEST D'ANALYSE NUMERIQUE

19 JUIN 2002

EXERCICE 1 (barème : 1+2.5+1.5+4+1)

On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1+a \end{pmatrix}$$

où a est un paramètre réel.

- 1) Pour quelles valeurs de a le système admet-il une solution unique? Quelle est alors cette solution?
- 2) Pour quelles valeurs de a peut on appliquer la méthode de plus profonde descente pour résoudre numériquement ce système?
- 3) Dans la suite de l'exercice on prendra $a = 1$. En partant de $X_0 = (1, 0, 0)$, calculer X_1 par la méthode de plus profonde descente.
- 4) Calculer X_5 avec la même méthode. On détaillera et on présentera soigneusement les différents calculs intermédiaires nécessaires. Les résultats numériques seront donnés en écriture avec 6 décimales.
- 5) Comparer le résultat obtenu en 4) avec la solution exacte et conclure.

EXERCICE 2 (barème : 3+2+3+2)

Dans toute la suite, on considère la résolution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

où f est une fonction continue sur $[a, b]$ vérifiant une condition de Lipschitz par rapport à la variable y . On suppose disposer d'un schéma S_1 convergent d'ordre 2 de la forme

$$y_{k+1} = y_k + h \Psi(t_k, y_k, h)$$

avec Ψ continue et Lipschitzienne de constante K_1 par rapport à la seconde variable. On considère alors le schéma S_2

$$y_{k+1} = y_k + h \Phi(t_k, y_k, h)$$

Test n° 2 d'Analyse Numérique

Exercice 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2+a \end{pmatrix} \quad \text{avec } AX = b$$

① Pour que la solution soit unique, il faut $\det A \neq 0$

si $\det A = a$ dans ce cas, il faut donc $a \neq 0$

On résout le système $AX = b$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+2z=1 \\ x+2y+2z+az=1+a \end{cases} \quad \text{②} \rightarrow \begin{cases} z = \frac{1-a}{a} \\ y = \frac{1}{a} \end{cases}$$

ou plus simple $X = A^{-1}b$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{a} & 0 \\ -1 & \frac{1}{a}+1 & -\frac{1}{a} \\ 0 & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} \\ \frac{1}{a}+2 - \frac{1}{a} - 1 \\ -\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + 1 \end{pmatrix}$$

d'où $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ si $a \neq 0$

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ x+2y=-1 \\ x+2y=-1 \end{cases} \quad \text{③} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

② Il faut A symétrique, définie positive

A symétrique : ${}^t A = A$: évident.

A déf positive : polynôme caractéristique.

$$\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 2 \\ 1 & 2 & 2+a-x \end{pmatrix}$$
$$= - \left[\alpha - (2+3a)x + (5+a)x^2 - x^3 \right] = 0$$
$$=$$

③

$$A \text{ sym déf pp} \Leftrightarrow \begin{cases} {}^t X A X = 0 \Leftrightarrow x=0 \\ {}^t X A X > 0 \end{cases}$$

$${}^t X A X = \left[\begin{aligned} & (\alpha(2+a) + 2y + x) \alpha \\ & + (2y + 2y + \alpha) y \\ & + (\alpha + y + y) \alpha \end{aligned} \right]$$
$$= \underbrace{x^2}_{>0} + 2x(\alpha + y) + \underbrace{2y^2}_{>0} + 4\alpha y + \underbrace{(2+a)\alpha}_{>0}$$

il n'est connu que des carrés. (forme quadratique).

$$= \cancel{\alpha^2 + 2\alpha y + y^2} + \cancel{y^2} + \cancel{\alpha^2}$$

$$= (\alpha + y + \alpha)^2 + (y + y)^2 + \alpha \alpha^2$$

$${}^t X A X = 0 \Leftrightarrow \forall a, \text{ il faut}$$

$$\textcircled{2} a = 1$$

$$x_0 = (1, 0, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2+a \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ a z^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (\forall a)$$

et $KXAX > 0$ pour $a > 0$ 25

A est sym, déf pos avec $a > 0$.

$$\textcircled{3} a = 1$$

algorithme:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} d_0 = -g(x_0) \\ \alpha_0 = -\frac{K d_0 g(x_0)}{K d_0 A d_0} \\ x_{10} = x_0 + \alpha_0 d_0 \end{cases}$$

$$d_0 = -g(x_0) = -[Ax_0 - b] = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_0 = -\frac{K d_0 \cdot g(x_0)}{K d_0 A d_0} = \frac{2}{2} = 1 \quad g(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D'au

$$x_1 = x_0 + 1 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 15$$

Etape 2

$$x_1$$

$$g(x_1) = Ax_1 - b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 0,214286$$

$$x_2 = x_1 + \alpha_1 d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{14} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} -0,214286 \\ -0,214286 \\ 0,785714 \end{pmatrix} /$$

$$d_2 = -g(x_2) = -(Ax_2 - b) = \begin{pmatrix} -0,357142 \\ 0,071429 \\ 0,285714 \end{pmatrix} /$$

$$\alpha_2 = 1,024377$$

$$x_3 = x_2 + \alpha_2 d_2 = \begin{pmatrix} -0,580136 \\ -0,141115 \\ 1,078395 \end{pmatrix} /$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} -0,580136 \\ -0,141115 \\ 1,078395 \end{pmatrix} /$$

$$d_3 = \begin{pmatrix} -0,357146 \\ -0,294426 \\ -0,372821 \end{pmatrix} / \quad \alpha_3 = 0,216232$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} -0,657360(5) \\ -0,204779 \\ 0,997779 \end{pmatrix} /$$

$$d_4 = \begin{pmatrix} -0,135639(5) \\ 0,071360(4) \\ 0,023581 \end{pmatrix} / \quad \alpha_4 = 1,090374$$

$$X_5 = \begin{pmatrix} -0,805258 \\ -0,126969 \\ 1,078010 \end{pmatrix}$$

4

⑤ Solution exacte: $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On voit que le résultat approche, mais la convergence ne donne pas encore vraiment les bonnes valeurs.

il faut continuer les itérations un peu plus loin.

(5 itérations: on est à environ 0,2 de l'exacte!)

0,5

Exercice 2

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & f \in C^0(a, b) \\ y(a) = y_0 & f \text{ lips en } y. \end{cases}$$

$$S_1 \text{ ordre } p=2 \quad y_{l+2} = y_l + h \Psi(x_l, y_l, h)$$

$\Psi \in C^1$ lips par rapport à y

$$S_2: \quad y_{l+2} = y_l + h \Phi(x_l, y_l, h)$$

④ Il faut montrer la consistance et la stabilité de S_2 .

- Consistance: $\Phi(x, y, h) = \frac{1}{4} f(x, y) + \frac{3}{4} f(x, y)$
 $= f(x, y) \quad \text{OK}$

→ méthode consistante

1,5

Stabilité: il suffit que ϕ soit lip en y .

$$|\phi(k, y_1, h) - \phi(k, y_2, h)|$$

~~$$= \left| \phi(k, y_1, h) + \phi(k, y_2, h) \right|$$~~

$$= \left| \frac{1}{4} f(k, y_1) + \frac{3}{4} f\left(k + \frac{2}{3}h, y_1 + \frac{2}{3}h, \psi\left(k, y_1, \frac{2}{3}h\right)\right) - \frac{1}{4} f(k, y_2) + \frac{3}{4} f\left(k + \frac{2}{3}h, y_2 + \frac{2}{3}h, \psi\left(k, y_2, \frac{2}{3}h\right)\right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{4} \left[f(k, y_1) - f(k, y_2) \right] + \frac{3}{4} \left[f\left(k + \frac{2}{3}h, y_1 + \frac{2}{3}h, \psi\left(k, y_1, \frac{2}{3}h\right)\right) - f\left(k + \frac{2}{3}h, y_2 + \frac{2}{3}h, \psi\left(k, y_2, \frac{2}{3}h\right)\right) \right] \right|$$

$$\leq \left| \frac{1}{4} \right| \underbrace{|f(k, y_1) - f(k, y_2)|}_{\leq K|y_1 - y_2|} + \left| \alpha \right|$$

K coeff lip de f .

$$\leq \frac{K}{4} |y_1 - y_2| + |\alpha|$$

et $|\alpha| \leq \frac{3}{4} K \left| y_1 + \frac{2}{3}h, \psi\left(k, y_1, \frac{2}{3}h\right) - \left(y_2 + \frac{2}{3}h, \psi\left(k, y_2, \frac{2}{3}h\right) \right) \right|$

~~$$\leq \frac{3}{4} K \left(|y_1 - y_2| + \frac{2}{3}h \right) \left| \psi\left(k, y_1, \frac{2}{3}h\right) - \psi\left(k, y_2, \frac{2}{3}h\right) \right|$$~~

D'où finalement, puisque ψ est K_1 lip.

$$\text{On a } |\phi(k, y_1, h) - \phi(k, y_2, h)| \leq \frac{1}{4}K + \frac{3}{4}K + \frac{h}{2}K_1K$$

$$\leq K \left(1 + \frac{h}{2}K_1 \right) |y_1 - y_2|$$

or cela doit être vrai $\forall h$ (si h assez petit)

Donc on prend h_{max}

$$\text{d'où } \forall h \quad | \phi(t_{n+1}, h) - \phi(t_{n+2}, h) | \leq K \left(1 + \frac{h_{max} K_2}{2} \right) h^2$$

D'où ϕ est lip de class \mathcal{C}^2 * / 200-03

D'où méthode stable.

méthode stable = constante \Leftrightarrow

ϕ converge

1,5

② $y \in C^3(t_0, t_0 + h)$ on utilise Taylor.

$$y(t_0 + \frac{h}{2}) = y(t_0) + \frac{h}{2} y'(t_0) + \frac{h^2}{2} y''(t_0) + \frac{h^3}{3!} y'''(t_0) + O(h^4)$$

ou

③ S_2 est d'ordre 3 si elle est d'ordre $\neq 3$
 mais pas d'ordre $\neq 4$.

$$\text{ordre } \neq 3 \Leftrightarrow \frac{\partial^3 \phi}{\partial h^3} (x, y, 0) = \frac{1}{h+1} f^{(3)}(x, y) \quad \forall h=0,1,2$$

ici $\phi(x, y, h) = \frac{1}{4} f(x, y) + \frac{3}{4} f(x + \frac{2}{3}h, y + \frac{2}{3}h) + \frac{1}{4} f(x + h, y + h)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial h} (x, y, h) = 0 + \frac{3}{4} \left[\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial h} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial h} \right]$$

(On dérive l'expression du (2) par rapport à h ?)

$$= \frac{3}{4} \left[\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{2}{3} + \frac{\partial f}{\partial v} \times \frac{2}{3} \right] f(x, y, \frac{2}{3}h)$$

Erreur de consistance:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= y_2(t_{n+1}) - y_{n+1} \\ &= y_2(t_{n+1}) - y_2(t_n) - h \phi(x_n, y_2(t_n), h) \end{aligned}$$

$$y_2(t_{n+1}) = y_2(t_n) + h \frac{\partial y_2}{\partial t}(t_n)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y_2' = \frac{h}{4} \left[y_2'(t_n) + 3 y_2'(t_n + \frac{2}{3}h) \right] + O(h^4)$$

$$\text{d'où } e_n = \frac{h}{4} \left[y_2'(t_n) + 3 y_2'(t_n + \frac{2}{3}h) \right] - h \phi(x_n, y_2(t_n), h) + O(h^4)$$

$y_2 = y$ ici.

④ La méthode avec les 3 coefficients h_1, h_2, h_3 est une méthode de Runge-Kutta d'ordre 3.

(On avait $y'(t) = f(t, y(t))$)

de sorte que l'ordre soit $= p$ il faut

$$\exists c \text{ tq } |e_n| \leq c h^{p+1} \quad \text{donc il faut trouver} \quad \text{ici } \leq c h^4$$

$$|e_n| = |A| \frac{1}{4} \left(f(t_n, y(t_n)) + 3 f\left(t_n + \frac{2}{3}h, y\left(t_n + \frac{2}{3}h\right)\right) - \phi\left(t_n, y(t_n), h\right) + o(h^4) \right)$$

$$f \text{ lip} \leq |h| \frac{1}{4}$$

etc.

0,5

④ la méthode avec les 3 coefficients k_1, k_2, k_3 est de Runge Kutta d'ordre 3
 Pour montrer qu'il est d'ordre 3 il faut ϕC^3 !

0,5