# Transfert de chaleur par conduction

Séances n°7-8

# Plan des séances n°7-8

- Transfert de chaleur par conduction
  - Caractéristiques fondamentales
  - Equation de la chaleur
  - Transmission de la chaleur en régime permanent

- Exercices d’application
  - Mur multicouche
  - Chauffage par plancher chauffant
  - Tuyauterie isolée
  - Ailette de refroidissement

# Rappel

- Quels sont les trois modes de transfert thermique?

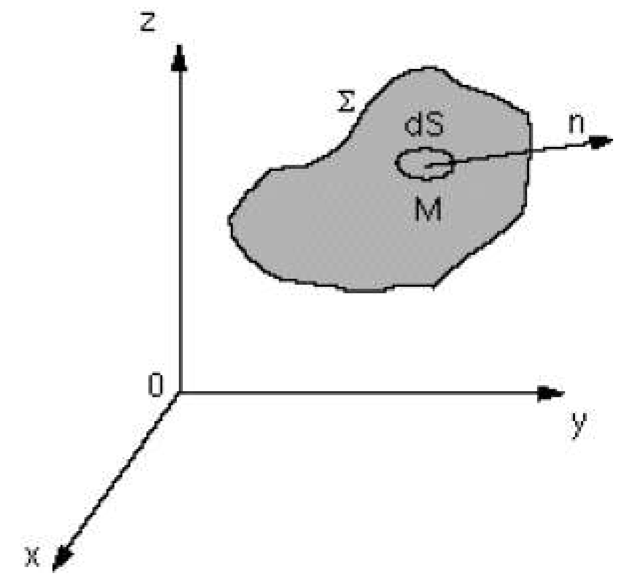
# La conduction

- L'énergie se propage par contact direct sans déplacement de molécules
  →Egalisation des températures dans les matériaux

- Si les températures sont imposées en différents points par apport ou évacuation de l'énergie
  →Ecoulement continu de la chaleur du chaud vers le froid

# Loi de Fourrier

- Considérons un milieu solide D dans lequel une surface $dS$ est orientée par sa normale unitaire $\vec{n}$
- **La quantité de chaleur d²Q** qui traverse la surface $dS$ pendant l'intervalle de temps $dt$ dans le sens de la normale $\vec{n}$ est donnée par la **loi de Fourrier**:




$$\boldsymbol{d^2Q = -\lambda.\overrightarrow{gradT}.\vec{n}.dS.dt}$$

**Flux de chaleur (W) :** $\boldsymbol{d\Phi = \frac{d^2Q}{dt} = -\lambda.\overrightarrow{gradT}.\vec{n}.dS}$

**Densité de flux de chaleur (W/m²) :** $\boldsymbol{\varphi = \frac{d\Phi}{dS} = -\lambda.\overrightarrow{gradT}.\vec{n}}$

**$\lambda$ : conductivité thermique du matériau**

# Conductivité thermique

- Propriété thermophysique des matériaux
  - J/(s.m.K) ou W/(m.K)
- λ Dépend de la direction (corps anisotrope), de la température, de la pression interstitielle de gaz ou vapeurs occlus dans des matériaux poreux…

| Substances | λ [$W.m^{-1}.°C^{-1}$] |
|---|---|
| Gaz à la pression atmosphérique | 0,006 - 0,15 |
| Matériaux solides isolants (laine de verre, liège…) | 0,025 - 0,18 |
| Liquides non métalliques | 0,075 - 0,60 |
| Matériaux non métalliques (brique, pierre à bâtir, béton, bois…) | 0,10 - 2,2 |
| Alliages métalliques | 12 - 100 |
| Métaux purs | 45 - 350 |

# Equation générale de la chaleur

- L'expression de l'équation de la chaleur:

$$\boldsymbol{\lambda}.\Delta \boldsymbol{T} + \overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\boldsymbol{\lambda}.\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{p} = \boldsymbol{\rho}.\boldsymbol{c_v}.\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{t}}$$

- $\Delta T$ le laplacien de la température
  - En coordonnées cartésiennes $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$
  - En coordonnées cylindriques $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

    Si symétrie axiale $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$

# Equation générale de la chaleur
*Cas particuliers*

- $\lambda$ ne dépend que de la température :

$$\lambda.\Delta T + \frac{\partial y}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2\right] + p = \rho.c_v.\frac{\partial T}{\partial t}$$

- $\lambda$ ne varie pas avec la température :

$$\lambda.\Delta T + p = \rho.c_v.\frac{\partial T}{\partial t}$$

- $\lambda$ ne varie pas avec la température et pas de dégagement de chaleur interne:

$$\lambda.\Delta T = \rho.c_v.\frac{\partial T}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad a.\Delta T = \frac{\partial T}{\partial t}$$

**Diffusivité thermique (m²/s)** : $a = \frac{\lambda}{\rho.c_v}$

# Equation générale de la chaleur
## *Cas particuliers*

- $T$ ne dépend plus du temps :

$$\lambda . \Delta T + p = 0$$

- $T$ ne dépend plus du temps et pas de dégagement de chaleur interne:

$$\Delta T = 0$$

# Conditions aux limites spatio-temporelles

- Equation aux dérivées partielles, linéaire, du $2^{nd}$ ordre avec une infinité de solutions T=f(x,y,z,t); nécessité de connaître:
  - **Condition initiale**
    - à $l'instant\ t = 0,\ T_0 = f(x, y, z, 0)$

# Conditions aux limites spatio-temporelles

- **Conditions aux limites**
  - La température imposée sur la surface S, **Problème de DIRCHLET**:

$$T_s = f(M_S, t)$$

  - La densité imposée sur le pourtour S, **Problème de NEUMANN**:

$$\varphi = -\lambda \left(\frac{dT}{dn}\right)_S = f(m_S, t)$$

  - Transfert linéaire à la surface S, **Problème mixte ou de FOURRIER**:

$$\varphi_c = (h_c + h_r)(T_S - T_m)$$

$$avec\ :\ T_m = \frac{h_c.T_f + h_r.T_p}{h_c + h_r}$$

*$h_c$ : coefficient d'échange superficiel par convection [W/(m². °C)]*

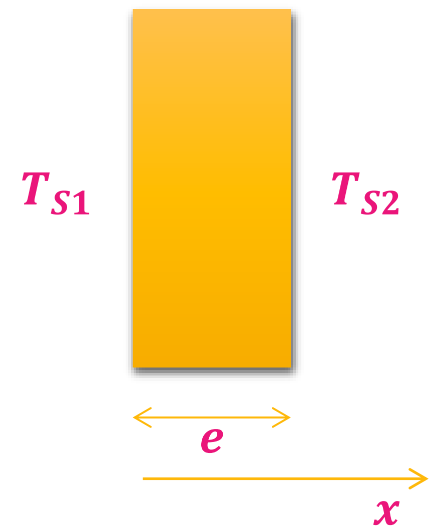
*$h_r$ : coefficient d'échange superficiel par rayonnement [W/(m². °C)]*

*$T_m$ : Température moyenne pondérée de la température du fluide environnant $T_f$ et de la température moyenne $T_p$ des surfaces environnantes [°C]*

# Cas particulier: le mur

- Matériaux homogène et isotrope en régime permanant sans source internet
  - Conditions aux limites de type Dirichlet ($T_{S1}$ et $T_{S2}$ constants)
  - Epaisseur e
  - Surface infinie ⇔ Problème unidimensionnel ⇔ On néglige les effets de bord
- Equation de la chaleur
  - $\Delta T = 0 = \frac{d^2T}{dx^2}$
  - $T = ax + b \Rightarrow T = \frac{T_{S2} - T_{S1}}{e} + T_{S1}$

  ⇒ Répartition de température indépendante du matériau
- Flux surfacique dans le matériau
  - $\varphi = -\lambda.\overrightarrow{grad}T.\vec{n}$
  - $\varphi = -\lambda\frac{d\mathrm{T}}{dx} = -\lambda\frac{T_{S2} - T_{S1}}{e}$
  - $R_{th} = \frac{e}{\lambda}$



# Cas particulier: le cylindre

- Sans puissance interne, en régime permanant et matériau homogène

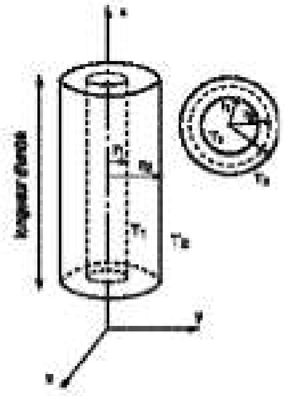


Figure 4.13

- Sans puissance interne, en régime permanant et matériau homogène

$$\Delta T = 0 \text{ et } \qquad \Delta T = \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

$$\Delta T = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)$$

$$T = \alpha \ln r + \beta.$$

$$\boxed{T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln\frac{r_1}{r_2}} \ln\frac{r}{r_1}}$$

**=> Equation de Fourier:**

$$\boxed{\Phi = -2\pi\lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln\frac{r_1}{r_2}} = 2\pi\lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln\frac{r_2}{r_1}}}$$

$$R_{th} = \frac{1}{2\pi\lambda} Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

# Résistance thermique

- Géométrie plane : la résistance thermique d'une couche plane d'épaisseur e:

$$R_{th} = \frac{e}{\lambda}$$

- Géométrie cylindrique : la résistance thermique d'un cylindre délimitée par les isothermes de rayons $r_1$ et $r_2$:

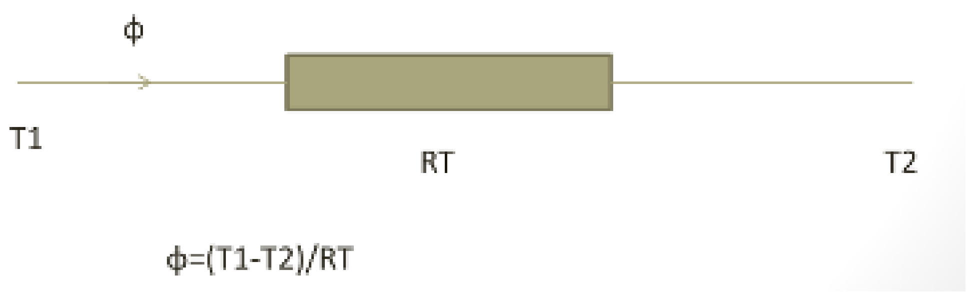
$$R_{th} = \frac{1}{2\pi\lambda} Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

- Géométrie Sphérique : la résistance thermique d'une sphère délimitée par les isothermes de rayons $r_1$ et $r_2$:

$$R_{th} = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

# Analogie électrique

| **Electricité** | **Conduction** |
|---|---|
| Différence de potentiel en Volt | Différence de température |
| Courant électrique en Amper | Flux énergétique en W |
| Résistance en Ohm | Résistance thermique en K/W |
| Capacité électrique | Capacité électrique en J/K |



# Exercices d’application

Mur multicouche

Chauffage par plancher chauffant

Tuyauterie isolée

Ailette de refroidissement

# Mur multicouche

A. Une paroi de bâtiment est constituée de 4 couches. Le régime permanent est établi. Le problème est 1D. Les matériaux sont homogènes et isotropes. Conditions aux limites de type Dirichlet.

B. $T_{ext} = -10$ ° C. $T_{int} = +20$ ° C

C. Calculez la résistance thermique surfacique et la densité de flux

D. Calculez à nouveau ces valeurs en considérant les coefficients d'échanges surfaciques $h_{int} = 10$ W.m$^{-2}$.° C$^{-1}$ et $h_{ext} = 15$ W.m$^{-2}$.° C$^{-1}$.

E. Calculez à nouveau ces valeurs en considérant la paroi non isolée.

| | Épaisseur [cm] | Conductivité thermique [W.m$^{-1}$.K$^{-1}$] |
|---|---|---|
| Extérieur | | |
| 1. Enduit mortier de ciment | 1 | 1,15 |
| 2. Béton lourd de granulats | 20 | 1,75 |
| 3. Laine de verre | 10 | 0,04 |
| 4. Enduit plâtre | 1 | 0,35 |
| Intérieur | | |

# Mur multicouche

A. Conduction « pure » (sans coefficients surfaciques) :

$$R=\sum_{i=1}^{4}\frac{e_i}{\lambda_i}=2{,}65\ \ m^2.°C.W^{-1}$$

$$\varphi=\frac{\Delta T}{R}=11{,}3\ \ W.m^{-2}\qquad U=0{,}38W.m^{-2}.°C^{-1}$$

B. Grandeurs globales (avec coefficients surfaciques) :

$$R=\sum_{i=1}^{4}\frac{e_i}{\lambda_i}+\frac{1}{h_{int}}+\frac{1}{h_{ext}}=2{,}82\ \ m^2.°C.W^{-1}$$

$$\varphi=\frac{\Delta T}{R}=10{,}6\ \ W.m^{-2}\qquad U=0{,}35W.m^{-2}.°C^{-1}$$

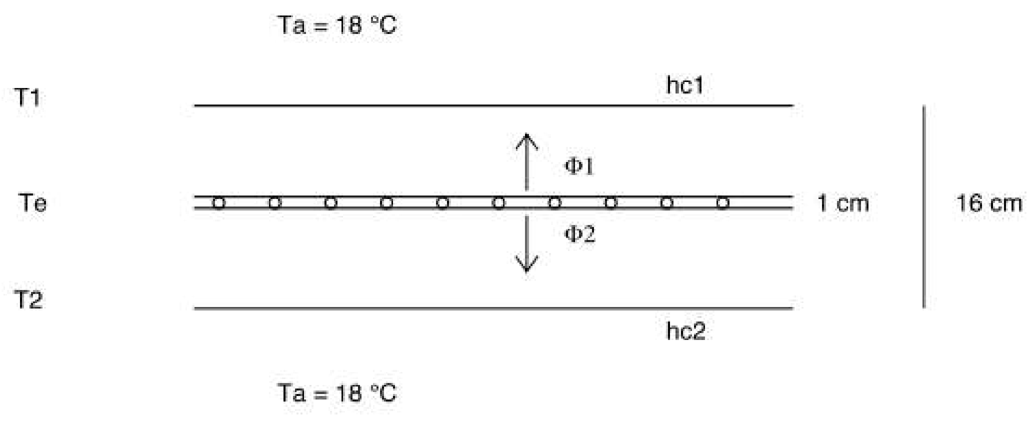
C. Paroi non isolée :

$$R=0{,}32\ \ m^2.°C.W^{-1}$$

$$\varphi=94{,}0\ \ W.m^{-2}\qquad U=3{,}13\ \ W.m^{-2}.°C^{-1}$$

# Chauffage par plancher chauffant

A. Un système de chauffage électrique par plancher est constitué de câbles électriques chauffants (assimilésà une plaque de 1 cm d'épaisseur) noyés dans une dalle de béton (d'une épaisseur totale de 16 cm) de conductivité thermique 1,2 W/m.° C. La nappe électrique chauffante est à égale distance de la surface supérieure et de la surface inférieure.



# Chauffage par plancher chauffant

A. Le flux de chaleur, par unité de surface, créé par le câble électrique est de 100 $W/m^2$. Ce flux se partage entre un flux ascendant (chauffage par le plancher) et un flux descendant (chauffage par le plafond). Les coefficients d'échange superficiel par convection et sont respectivement $hc_1 = 5{,}6\ W/m^2.°C$ pour la surface supérieure et $hc_2 = 3{,}6\ W/m^2.°C$ pour la surface inférieure. La température ambiante $T_a$ de l'air de chaque côté du plancher est égale à 18 °C. De plus, la température de l'élément chauffant $T_e$ est supposée uniforme.

A. Calculez :
   1. Les conductances globales $U_1$ (partie supérieure) et $U_2$ (partie inférieure) de la zone comprise entre la nappe chauffante et l'ambiance
   2. La température de la nappe chauffante Te
   3. Le flux ascendant et le flux descendant (par unité de surface)
   4. Les températures superficielles $T_1$ et $T_2$

# Chauffage par plancher chauffant

$$\frac{1}{U_1} = \frac{1}{h_{c1}} + \frac{x_1}{\lambda_1} \qquad U_1 = 4{,}15 \ \ W.m^{-2}.°C^{-1} \qquad U_2 = 2{,}94 \ \ W.m^{-2}.°C^{-1}$$

$$T_e = T_a + \frac{\Phi}{U_1 + U_2} = 32{,}1°C$$

$$\Phi_1 = U_1(T_e - T_a) = 58{,}5 W.m^{-2}$$

$$\Phi_2 = 41{,}5 W.m^{-2}$$

$$\Phi_1 = h_{c1}(T_1 - T_a) \qquad T_1 = 28{,}5°C$$

$$T_2 = 29{,}5°C$$

# Chauffage par plancher chauffant

A. La nappe électrique chauffante est maintenant à une distance $x_1$ de la surface supérieure, $x_2$ de la surface inférieure. Les coefficients d'échange superficiel globaux (convection et rayonnement) sont respectivement $h_1 = 10{,}6\ W/m^2.°C$ pour la surface supérieure et $h_2 = 8{,}6\ W/m^2.°C$ pour la surface inférieure. La température superficielle du sol est égale à $T_1 = 24\ °C$.

B. Calculez :
   1. Le flux ascendant et le flux descendant (par unité de surface)
   2. La température superficielle $T_2$
   3. La température de la nappe chauffante $T_e$
   4. La valeur de la distance $x_1$

# Chauffage par plancher chauffant

$\Phi_1 = h_1(T_1 - T_a)$ $\Phi_1 = 63{,}8 W.m^{-2}$ $\Phi_2 = 36{,}2 W.m^{-2}$

$\Phi_2 = h_2(T_2 - T_a)$ $T_2 = 22{,}2°C$

$$\Phi_1 = \frac{\lambda}{x_1}(T_e - T_1) \qquad \Phi_2 = \frac{\lambda}{0{,}15 - x_2}(T_e - T_2)$$

$T_e = 25{,}7°C$ $x_1 = 3{,}3 cm$

# Chauffage par plancher chauffant

A. L'alimentation électrique de la nappe est interrompue. Calculez l'énergie calorifique (par m2 de dalle) restituée à l'ambiance au bout d'un temps infini.

# Chauffage par plancher chauffant

A. L'alimentation électrique de la nappe est interrompue. Calculez l'énergie calorifique (par m2 de dalle) restituée à l'ambiance au bout d'un temps infini.

$$Q = \rho c \int_0^{x_1} (T_1(x) - T_a)\,dx + \rho c \int_0^{x_2} (T_2(x) - T_a)\,dx$$

$$T_1(x) = T_e - \Phi_1 \frac{x}{\lambda} \qquad T_2(x) = T_e - \Phi_2 \frac{x}{\lambda}$$

$$Q = 1{,}95 MJ.m^{-2}$$

# Tuyauterie isolée

A. Une canalisation est constituée d'une tuyauterie (de rayons $r_i$ et $r_e$) entourée d'un isolant (de rayon r). Le contact est parfait entre la tuyauterie et l'isolant. Les matériaux sont homogènes et isotropes. Aux bornes du systèmes, les coefficients surfaciques d'échange sont $h_i$ et $h_e$.

B. Déterminez l'expression de la résistance thermique par unité de longueur.

C. Évaluez la variation de la résistance thermique avec r.

D. Calculez la valeur de r correspondant à l'extremum de R.

# Tuyauterie isolée

$$R=\frac{1}{2\pi r_i h_i}+\frac{1}{2\pi\lambda_t}Ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)+\frac{1}{2\pi\lambda_i}Ln\left(\frac{r}{r_e}\right)+\frac{1}{2\pi r h_e}$$

$$\frac{dR}{dr}=\frac{1}{2\pi r}\left(\frac{1}{\lambda_i}-\frac{1}{h_e r}\right)$$

Valeur minimale de la résistance si : $r_e \leq \frac{\lambda_i}{h_e}$

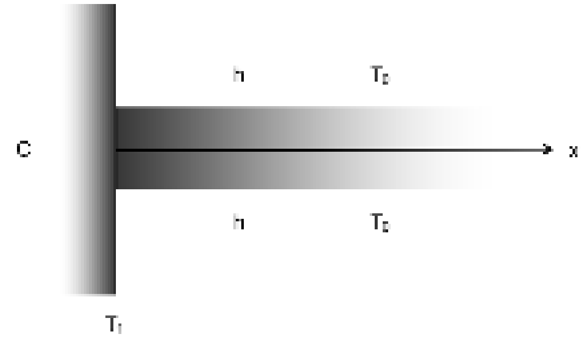
Dans le cas d'un isolant de mauvaise qualité, la résistance décroît avant d'augmenter en fonction de l'épaisseur d'isolant

# Ailette de refroidissement

A. Un corps C à température uniforme constante $T_1$ est refroidi par une ailette placée dans un milieu ambiant à température constante $T_0$, avec lequel elle échange de la chaleur (coefficient d'échange h). À l'intérieur de l'ailette, la température est uniforme dans une section S (isothermes planes perpendiculaires à l'axe Ox).

B. L'ailette est caractérisée par la conductivité de son matériau, son périmètre p, et sa section droite S. L'ailette est de longueur infinie.

1. En considérant une tranche dx de l'ailette, définissez les différents flux $d\Phi_i$ intervenant dans le bilan de cette tranche dx.
2. De ce bilan, tirez le profil de température T(x) dans l'ailette
3. Déterminez l'efficacité E de l'ailette, définie comme le rapport entre le flux évacué par l'ailette et le flux évacué en l'absence d'ailette (mêmes conditions d'échange h).



# Ailette de refroidissement

$$d\Phi_1 = -\lambda S \left(\frac{dT}{dx}\right)_x \qquad d\Phi_2 = -\lambda S \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} \qquad d\Phi_3 = hp(T(x) - T_0)\,.dx$$

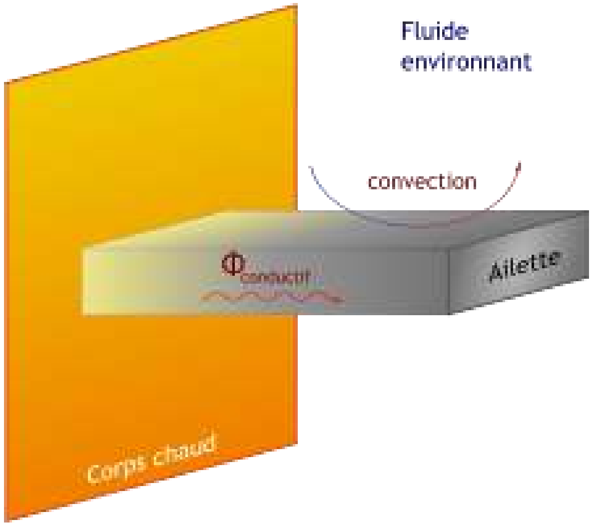
$$\lambda S\left(\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} - \left(\frac{dT}{dx}\right)_x\right) = hp(T(x) - T_0)\,.dx$$

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)\, e^{-\sqrt{\frac{hp}{\lambda S}}\,x}$$

$$\Phi_{ail} = -\lambda S \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = \sqrt{hp\lambda S}\,(T_1 - T_0)$$

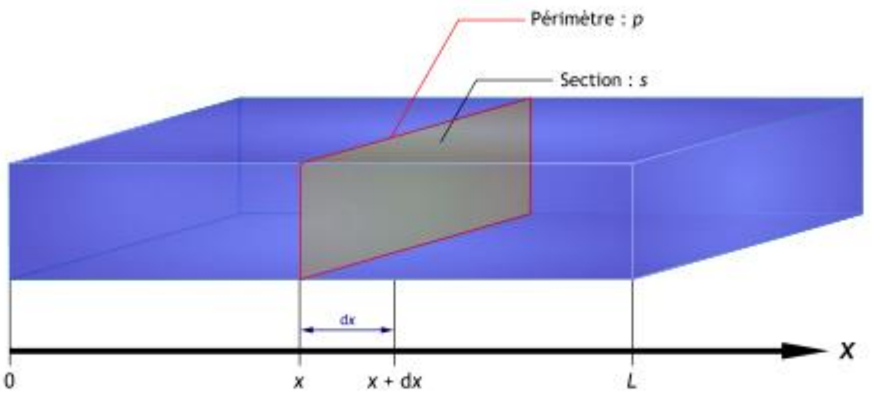
$$\Phi_{abs} = hS(T_1 - T_0)$$

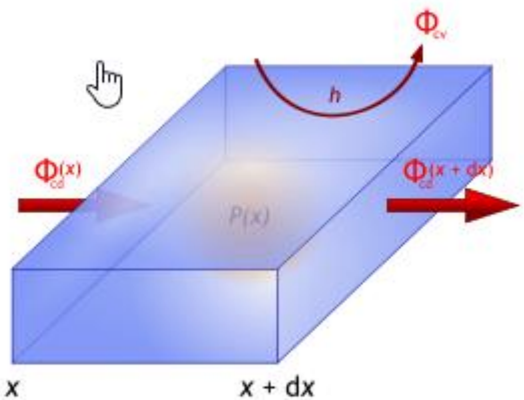
$$E_{ff} = \frac{\Phi_{ail}}{\Phi_{abs}} = \sqrt{\frac{\lambda p}{hs}}$$



# Ailette de refroidissement

*https://fr.wikiversity.org/wiki/Conduction_thermique/Annexe/Ailette*




On réalise le bilan énergétique d'une section dx.

- $\Phi_x$ : flux conductif en x ;
- $\Phi_{x+\mathrm{d}x}$ : flux conductif en x + dx ;
- $\Phi_{cv}$ : perte convective entre x et x + dx ;
- *h* : coefficient d'échange convectif ;
- *s* : section de l'ailette ;
- *p* : périmètre de l'ailette .

$$\overbrace{\Phi_x - \Phi_{x+\mathrm{d}x}}^{\text{Bilan conductif}} + \overbrace{P(x) s\,\mathrm{d}x}^{\text{Puissance générée}} = \overbrace{hp\,\mathrm{d}x\,[T(x) - T_f]}^{\text{Perte convective}}$$

Le bilan conductif s'exprime grâce à la loi de Fourier:

$$\left[-k\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_x s\right] - \left[-k\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x+\mathrm{d}x} s\right] + P(x) s\,\mathrm{d}x = hp\,\mathrm{d}x\,[T(x) - T_f]$$

$$ks\frac{\left.\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x+\mathrm{d}x} - \left.\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}\right|_x}{\mathrm{d}x} + P(x)s = hp\,[T(x) - T_f]$$

La section dx est infiniment petite donc : $\mathrm{d}x \to 0$

$$\frac{\mathrm{d}^2T(x)}{\mathrm{d}x^2} - \frac{hp}{ks}[T(x) - T_f] = -\frac{P(x)}{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2T(x)}{\mathrm{d}x^2} - \frac{hp}{ks}[T(x) - T_f] = 0$$

On définit *m* le paramètre de l'ailette : $m^2 = \frac{hp}{ks}$

# Ailette de refroidissement

*https://fr.wikiversity.org/wiki/Conduction_thermique/Annexe/Ailette*

### Équation de l'ailette

$\dfrac{d^2T(x)}{dx^2} - m^2\,(T(x) - T_f) = 0$ où :

- $m$ le paramètre de l'ailette : $m^2 = \dfrac{hp}{ks}$
- $T_f$ est la température du fluide environnant

L'hypothèse de flux mono-dimensionnel faite au début du calcul est valide si le nombre de Biot est petit devant 1 (par exemple <0,1).

Le nombre de Biot est ici défini par: $Bi = \dfrac{hs}{kp}$

On pose un changement de variable : $\theta(x) = T(x) - T_f$

L'équation devient :

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} - m^2\theta(x) = 0$$

Solution de la forme :

$$\theta(x) = Ae^{-mx} + Be^{mx}$$

*A* et *B* sont deux constantes d'intégration qui sont identifiées avec deux conditions aux limites.

# Ailette de refroidissement

*https://fr.wikiversity.org/wiki/Conduction_thermique/Annexe/Ailette*

## Efficacité et rendement d'une ailette

- Efficacité d'une ailette :

$$\eta_{\text{eff}} = \frac{\text{flux evacué par l'ailette}}{\text{flux qui serait evacué sans l'ailette}}$$

- Rendement d'une ailette :

$$\eta_{\text{rd}} = \frac{\text{flux evacué par l'ailette}}{\text{flux qui serait evacué par une ailette parfaite}}$$

# Ailette de refroidissement

*https://fr.wikiversity.org/wiki/Conduction_thermique/Annexe/Ailette*

## Cas d'une ailette thermiquement infinie

Une ailette est dite *thermiquement infinie* quand la température au bout de l'ailette est considérée comme égale à la température du fluide qui entoure l'ailette. (Condition aux limites de première espèce)

Conditions aux limites :

- en x = 0 : $T(x) = T_0$
- en x = L : $T(x) = T_f$

Avec le changement de variable $\theta(x) = T(x) - T_f$ les conditions aux limites deviennent :

- en x = 0 : $\theta(x) = \theta_0 = T_0 - T_f$
- en x = L : $\theta(x) = 0$

Résolution avec : $\theta(x) = Ae^{-mx} + Be^{mx}$

en x = L : $Ae^{-mL} + Be^{mL} = 0$

Thermiquement infinie donc $e^{-mL} \to 0$

Ainsi: $B = 0$

et $A = T_0 - T_f$

On obtient: $\theta(x) = (T_0 - T_f)e^{-mx}$

En résolvant l'équation du second degrés avec la nouvelle solution ( $\theta(x) = (T_0 - T_f)e^{-mx}$ )

On peut obtenir la Résistance thermique de l'ailette de longueur *infini*:

qui est: $Ra = \dfrac{1}{\sqrt{hp.ks}}$