DEUXIEME TEST D'ANALYSE NUMERIQUE

18 JUIN 2003

PROBLEME (barème : 1+3+2+3+3+3)

On considère le problème de Cauchy :

$$y'(t) = f(y(t)) \quad \text{avec} \quad y(0) = 0$$

Pour résoudre numériquement ce problème sur l'intervalle $[0\,;1]$, on utilise le schéma implicite suivant :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2}[f(y_n) + f(y_{n+1})]$$

où y_n est l'approximation de $y(t_n)$ et $h_n = t_{n+1} - t_n > 0$.

1) En intégrant l'équation différentielle sur $[t_n\,;t_{n+1}]$, quelle approximation géométrique simple de l'intégrale doit on utiliser pour retrouver le schéma?

2) Dans toute la suite du problème on considère la fonction f définie pour tout réel y par $f(y) = y^2 - \alpha$ avec $\alpha > 0$. Montrer que suivant les valeurs de y_n, le choix du pas h_n est soit libre soit soumis à une contrainte que l'on établira.

3) Calculer explicitement y_{n+1} en fonction de y_n de α et de h_n.

4) Dans cette question on suppose que $h_n = h = 0.1$ et que $\alpha = 2$. En utilisant la formule de la question précédente, calculer numériquement, avec au moins 6 décimales, $y_1, y_2, \ldots, y_{10}$.

5) Montrer que la solution exacte du problème est $y(t) = -\sqrt{\alpha}\; th(\sqrt{\alpha}\; t)$. Si $h_n = h = 0.1$ et $\alpha = 2$, calculer numériquement la suite des erreurs $e_n = |y(t_n) - y_n|$. Conclusions?

6) Quel schéma obtient-on en effectuant un développement de Taylor de la formule de la question 3), à l'ordre un en h_n? En utilisant le schéma obtenu, avec $h_n = h = 0.1$ et $\alpha = 2$, peut-on calculer y_{10} sans jamais dépasser l'erreur maximum rencontrée en utilisant le schéma précédent? On explicitera les calculs justifiant la réponse.

voir p.22 du polycop

EXERCICE (barème : 2+2) (Juin 2003)

On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta^2 & \beta \\ \alpha & \beta & 2+\gamma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur les trois paramètres α, β et γ pour que l'on puisse résoudre numériquement ce système en appliquant la méthode du gradient conjugué.

2) En supposant ces conditions vérifiées, montrer qu'en partant des conditions initiales $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, la méthode du gradient conjugué donne $x_1 = y_1 = z_1 = f(\alpha, \beta, \gamma)$. Donner l'expression de f.

FIN ENONCÉ 2003

EXERCICE 1 (barème : 5) (Juin 2001)

On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1) Peut-on appliquer la méthode du gradient conjugué pour résoudre numériquement ce système?
2) En partant des conditions initiales $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, calculer numériquement deux itérations de la méthode du gradient conjugué. On détaillera et on présentera soigneusement les différents calculs nécessaires, les résultats numériques seront donnés avec 6 décimales.
3) Conclure en justifiant.

2003

ATHANASE Matthieu
1Ag5

17/20

Test d'Ananum

Exercice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta^2 & \beta \\ \alpha & \beta & 2+\gamma^2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

① Afin de résoudre le système $Ax=b$ par la méthode du gradient conjugué, A doit être symétrique définie positive.

1

- ${}^tA = A$ donc A est symétrique.

- $$\begin{aligned} P_A(X) &= (\alpha^2-X)\left[(\beta^2-X)(2+\gamma^2-X)-\beta^2\right] + \alpha(-\alpha\beta^2) \\ &= (\alpha^2-X)\left(\beta^2+\beta^2\gamma^2-\beta^2X-(2+\gamma^2)X+X^2\right)-\alpha^2\beta^2 \\ &= \alpha^2\beta^2\gamma^2-\alpha^2(\beta^2+2+\gamma^2)X+\alpha^2X^2-(\beta^2+\beta^2\gamma^2)X \\ &\quad +(\beta^2+2+\gamma^2)X^2-X^3 \\ &= -X^3+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2)X^2-\left(\alpha^2\beta^2+2\alpha^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2+\beta^2\gamma^2\right)X \\ &\quad +\alpha^2\beta^2\gamma^2 \\ &= \text{blablabla}\ldots \text{(ça mène nulle part)} \end{aligned}$$

$$(AX, X) = \begin{pmatrix} \alpha^2 x + \alpha z \\ \beta^2 y + \beta z \\ \alpha x + \beta y + (2+\gamma^2) z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \alpha^2 x^2 + \alpha z x + \beta^2 y^2 + \beta y z + \alpha x z + \beta y z + (2+\gamma^2) z^2$$

$$= \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + (2+\gamma^2) z^2 + 2\beta y z + 2\alpha x z$$

$$= (\alpha x + z)^2 + (\beta y + z)^2 + \gamma^2 z^2 \geqslant 0$$

2

donc A est symétrique définie positive ssi
$\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq 0$

② $r_0 = A X_0 - b = -b = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d_0 = -r_0 = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\alpha_0 = \frac{\|r_0\|^2}{(d_0, A d_0)} = \frac{3}{(\alpha+1)^2 + (\beta+1)^2 + \gamma^2}$$

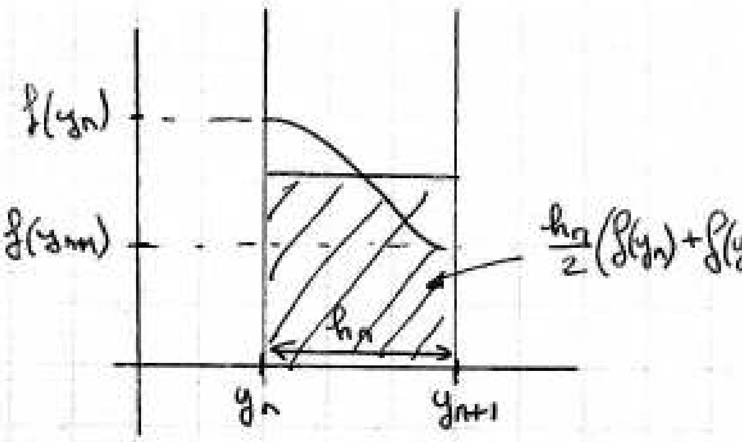
$X_1 = X_0 + \alpha_k d_k$

2

donc $x_1 = y_1 = z_1 = \dfrac{3}{(\alpha+1)^2 + (\beta+1)^2 + \gamma^2} = f(\alpha, \beta, \gamma)$

Problème

①



L'intégrale est approximée par la méthode des rectangles en prenant pour hauteur la valeur moyenne des valeurs $f(y_n)$ et $f(y_{n+1})$.

② $f(y) = y^2 - \alpha$ avec $\alpha \geq 0$ $\quad\left(\begin{array}{c}\forall n,\ h_n \neq 0 \\ \text{sinon } y_{n+1} = y_n\end{array}\right)$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2}\left(y_n^2 - \alpha + y_{n+1}^2 - \alpha\right)$$

$$y_{n+1}^2 - \frac{2}{h_n} y_{n+1} + \frac{2}{h_n} y_n - 2\alpha + y_n^2 = 0$$

$$\Delta^{(a)} = \left(\frac{2}{h_n}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{h_n} y_n - 2\alpha + y_n^2\right)$$

On veut $\Delta^{(a)} \geq 0$ sinon on ne pourra pas utiliser cette méthode.

$$\frac{1}{4} h_n^2 \Delta^{(a)} = 1 - 2 y_n h_n + (2\alpha - y_n^2) h_n^2 = g(h_n)$$

$$\Delta^{(b)} = (2y_n)^2 - 4(2\alpha - y_n^2) = 8(y_n^2 - \alpha)$$

cas 1 : si $y_n^2 - \alpha \leq 0$ alors comme $g(0) = 1$
$\Delta^{(a)} \geq 0$. → pas libe

cas 2 : si $y_n^2 - \alpha > 0$ alors

$$h_1 = \frac{y_n + \sqrt{2(y_n^2 - \alpha)}}{2\alpha - y_n^2}$$

$$h_2 = \frac{y_n - \sqrt{2(y_n^2 - \alpha)}}{2\alpha - y_n^2}$$

① $2\alpha - y_n^2 > 0$
alors $h_n \in]0; h_2] \cup [h_1; 1[$

② $2\alpha - y_n^2 < 0$
alors $h_n \in [h_2; h_1]$

③ $2\alpha - y_n^2 = 0$
alors $h_n \leq \frac{1}{2y_n}$

③ $$y_{n+1} = \frac{\frac{2}{h_n} \pm 2\sqrt{\frac{1}{h_n^2} - \frac{2}{h_n}y_n + 2\alpha - y_n^2}}{2}$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{h_n} \pm \sqrt{\frac{1}{h_n^2} - \frac{2}{h_n}y_n + 2\alpha - y_n^2}$$
?

$$= \frac{1}{h_n}\left(1 \pm \sqrt{1 - 2h_n y_n + 2h_n^2\alpha - y_n^2 h_n^2}\right)$$

$$\underset{0}{=} \frac{1}{h_n}\left(1 \pm \left(1 - h_n y_n + o(h_n)\right)\right)$$

si $\oplus \Rightarrow \frac{2}{h_n} \xrightarrow[h_n \to 0]{} +\infty$ (impossible).

si $\ominus \Rightarrow \frac{1}{h_n}\left(1 - (1 - h_n y_n) + o(h_n)\right) \xrightarrow[h_n \to 0]{} y_n$

donc $$y_{n+1} = \frac{1}{h_n}\left(1 - \sqrt{1 - 2h_n y_n + (2\alpha - y_n^2)h_n^2}\right)$$

④ si $\alpha = 2$

$y_0 = 0$ $(y_0^2 - \alpha < 0)$
$y_1 = -0,198039$ $(y_1^2 - \alpha < 0)$
$y_2 = -0,381530$ $(y_2^2 - \alpha < 0)$
$y_3 = -0,565020$ $(y_3^2 - \alpha < 0)$
$y_4 = -0,722126$ $(y_4^2 - \alpha < 0)$

$y_5 = -0,859830$ $(y_5^2 - \alpha < 0)$
$y_6 = -0,$[illegible] $(y_6^2 - \alpha < 0)$
$y_7 = -1,07045$ $(y_7^2 - \alpha < 0)$
$y_8 = -1,14734$ $(y_8^2 - \alpha < 0)$
$y_9 = -1,20850$ $(y_9^2 - \alpha < 0)$

3

$y_{10} = -1,25650$

⑤ $y' = y^2 - \alpha$

$$\frac{y'}{y^2-\alpha} = 1 \rightarrow \frac{1}{\alpha}\left(\frac{y'}{\left(\frac{y}{\sqrt{\alpha}}\right)^2-1}\right) = 1$$

$y(t) = \sqrt{\alpha}\, th(\sqrt{\alpha}$

1

$$\frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha}\coth\left(\frac{y}{\sqrt{\alpha}}\right) = t$$

$e_1 = 0,0006$ | $e_6 = 0,000927$
$e_2 = 0,001134$ | $e_7 = 0,000592$
$e_3 = 0,001396$ | $e_8 = 0,000277$
$e_4 = 0,001411$ | $e_9 = 0,000020$
$e_5 = 0,001227$ | $e_{10} = 0,000133$

2

L'erreur devrait se cumuler mais il semble que les erreurs se compensent, d'où l'amélioration de l'err à partir de e_4. L'erreur maximale sur ces valeurs est de 0,26%.

⑥ $$y_{n+1} = \frac{1}{h_n}\left(1 - \sqrt{1-2h_n y_n + (2\alpha - y_n^2)h_n^2}\right)$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{h_n}\left(\cancel{1} - (\cancel{1} - h_n y_n + \frac{1}{2}(2\alpha - y_n^2)h_n^2 - \frac{1}{3}h_n^2 y_n + o(h_n^2)\right)$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{1}{2}(2\alpha - y_n^2)h_n + \frac{1}{3}y_n h_n + o(h_n)$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + h_n\left(\frac{1}{2}y_n^2 + \frac{1}{3}y_n - \alpha\right)$$

$y_1 = -0,2 \rightarrow e_1 = 0,002$ (1% d'erreur, on a déjà dépassé le max).
$y_2 =$
$y_3 =$
$y_4 =$
$y_5 =$