Loi binomiale négative

Mathis Boukhellouf, Mélanie Denis,
Jean Pruvost, Mehdi Vannier

groupe B5

27 février 2018

- Épreuves de Bernoulli indépendantes, de paramètre p
- X : « nombre d'échecs essuyés avant d'obtenir n succès »

- Épreuves de Bernoulli indépendantes, de paramètre p
- X : « nombre d'échecs essuyés avant d'obtenir n succès »
- $X(\Omega) = \mathbb{N}$

- Épreuves de Bernoulli indépendantes, de paramètre p
- X : « nombre d'échecs essuyés avant d'obtenir n succès »
- $X(\Omega) = \mathbb{N}$

$$X \rightsquigarrow \mathscr{B}^-(n,p) \iff \boxed{\mathrm{p}(X=k) := \binom{k+n-1}{k} p^n (1-p)^k}$$

- Épreuves de Bernoulli indépendantes, de paramètre p
- X : « nombre d'échecs essuyés avant d'obtenir n succès »
- $X(\Omega) = \mathbb{N}$

$$X \rightsquigarrow \mathscr{B}^{-}(n,p) \iff \boxed{\mathrm{p}(X=k) := \binom{k+n-1}{k} p^n (1-p)^k}$$

On peut montrer que $\binom{k+n-1}{k} = (-1)^k \binom{-n}{k}$, d'où le nom de la loi.

- Épreuves de Bernoulli indépendantes, de paramètre p
- X : « nombre d'échecs essuyés avant d'obtenir n succès »
- $X(\Omega) = \mathbb{N}$

$$X \rightsquigarrow \mathscr{B}^{-}(n,p) \iff \boxed{\mathrm{p}(X=k) := \binom{k+n-1}{k} p^n (1-p)^k}$$

On peut montrer que $\binom{k+n-1}{k} = (-1)^k \binom{-n}{k}$, d'où le nom de la loi.

- **Espérance et variance** :

$$\boxed{\mathrm{E}(X) = \frac{n(1-p)}{p}} \qquad \boxed{\mathrm{V}(X) = \frac{n(1-p)}{p^2}}$$

- **Additivité** : si les X_i sont des v.a.i.i.d.,

$$X_i \rightsquigarrow \mathscr{B}^-(n_i,p) \Longrightarrow \sum_i X_i \rightsquigarrow \mathscr{B}^-\left(\sum_i n_i,p\right)$$

- **Additivité** : si les X_i sont des v.a.i.i.d.,

$$X_i \rightsquigarrow \mathscr{B}^-(n_i,p) \Longrightarrow \sum_i X_i \rightsquigarrow \mathscr{B}^-\left(\sum_i n_i, p\right)$$

- **Comportement asymptotique** :

$$\boxed{\mathscr{P}(\lambda) = \lim_{n\to+\infty} \mathscr{B}^-\left(n, \frac{n}{\lambda+n}\right)}$$

- **Mélange de Poisson exponentiel** :
  si $N \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$ où $\lambda \rightsquigarrow \mathscr{E}(\theta)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}(N=n) &= \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{p}(N=n \mid \lambda = x) f_{\mathscr{E}}(\lambda = x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-x} \frac{x^n}{n!} \times \theta \mathrm{e}^{-\theta x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

- **Mélange de Poisson exponentiel** :
  si $N \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$ où $\lambda \rightsquigarrow \mathscr{E}(\theta)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}(N=n) &= \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{p}\,(N=n \mid \lambda = x) f_{\mathscr{E}}(\lambda = x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-x}\frac{x^n}{n!} \times \theta \mathrm{e}^{-\theta x}\,\mathrm{d}x \underset{y=(1+\theta)x}{=} \frac{\theta}{(1+\theta)n!}\int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-y}\frac{y^n}{(1+\theta)^n}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\theta}{(1+\theta)^{n+1}\cancel{n!}}\cancel{\Gamma(n+1)} = \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n
\end{aligned}$$

- **Mélange de Poisson exponentiel** :
  si $N \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$ où $\lambda \rightsquigarrow \mathscr{E}(\theta)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}(N=n) &= \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{p}(N=n \mid \lambda = x) f_{\mathscr{E}}(\lambda = x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-x}\frac{x^n}{n!} \times \theta \mathrm{e}^{-\theta x}\,\mathrm{d}x \underset{y=(1+\theta)x}{=} \frac{\theta}{(1+\theta)n!}\int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-y}\frac{y^n}{(1+\theta)^n}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\theta}{(1+\theta)^{n+1}\cancel{n!}}\cancel{\Gamma(n+1)} = \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{N \rightsquigarrow \mathscr{B}^-\left(1, \frac{1}{1+\theta}\right) = \mathscr{G}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)}$$

- **Mélange de Poisson exponentiel** :
  si $N \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$ où $\lambda \rightsquigarrow \mathscr{E}(\theta)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}(N=n) &= \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{p}(N=n \mid \lambda=x) f_{\mathscr{E}}(\lambda=x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-x}\frac{x^n}{n!} \times \theta \mathrm{e}^{-\theta x}\,\mathrm{d}x \underset{y=(1+\theta)x}{=} \frac{\theta}{(1+\theta)n!}\int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-y}\frac{y^n}{(1+\theta)^n}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\theta}{(1+\theta)^{n+1}\cancel{n!}}\cancel{\Gamma(n+1)} = \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{N \rightsquigarrow \mathscr{B}^-\left(1, \frac{1}{1+\theta}\right) = \mathscr{G}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)}$$

- **Mélange de Gamma-Poisson** :

$$N \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda),\ \lambda \rightsquigarrow \Gamma(\alpha,\theta) \Longrightarrow N \rightsquigarrow \mathscr{B}^-\left(\alpha, \frac{1}{1+\theta}\right)$$

- Nombre de voyageurs qui attendent à un arrêt
- Temps d'attente d'un bus
- Temps d'attente du 1$^{\text{er}}$ succès : $\mathscr{B}^{-}(1,p) = \mathscr{G}(p)$
- Temps d'attente (succès + échecs) du $n^{\text{ème}}$ succès : $\mathscr{B}^{-}(n,p) = \text{Pascal}(n,p) - n$

- Comportement asymptotique
- Modélisation du remplissage d'un bus de 75 places sur une ligne de 5 arrêts, personne ne descend avant le terminus : saturation ou pas ?
  - $N_i \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda_i)$ avec $\lambda_i \rightsquigarrow \Gamma(i,5)$: Gamma-Poisson
  - $\underset{\text{additivité}}{\Longrightarrow} N = \sum_{i=1}^{5} N_i \rightsquigarrow \mathscr{B}^{-}(15, 1/6)$
  - Calcul de $\mathrm{p}(N > 75) = 1 - \mathrm{p}(N \leq 75)$.

Code Python correspondant à la diapo précédente :

```
import numpy as np
import scipy as sc
import scipy.special as sp
import random as rd
import matplotlib as plt
import matplotlib.pyplot as pp
import pylab as py
import math

## Outils de base
def BinNeg(p,n,k): # probabilité
    return sp.binom(k+n-1, k)*(p**n)*((1-p)**k)

def Espérance(p,n):
    return n*(1-p)/p

def Poisson(l,n):
    return math.exp(-l)*(l**n)/math.factorial(n)

def GraphiqueBinNeg(p,n,maxi):
    Nombres = [k for k in range(0,maxi)]
    Probas = [BinNeg(p,n,k) for k in Nombres]
    pp.xlabel("k", fontsize=20)
    pp.ylabel("p(X=k)", fontsize= 20)
    pp.title("Fonction de masse de la loi binomiale négative, pour {} succès".format(n))
    pp.scatter(Nombres,Probas,color=[1,.2,.2])
    pp.grid(True)

## Comportement asymptotique
def ComportementAsymptotique(l):
    maxi = 35
    Nombres = [k for k in range(0,maxi)]
    ProbasP = [Poisson(l,k) for k in Nombres]
    pp.xlabel("k", fontsize=20)
    pp.ylabel("p(X=k)", fontsize= 20)
    py.scatter(Nombres,ProbasP,color=[.2,.4,.54])
    pp.grid(True)
    pp.show()
    for i in [1,2,5,10,25,50, 100, 500]:
    ProbasB = [BinNeg(i/(l+i),i,k) for k in Nombres]
    pp.title("Fonction de masse de la loi binomiale négative, pour {} succès".format(i))
    py.scatter(Nombres,ProbasB,color=[1,.47,.2],marker='.')
    pp.show()
    pp.pause(1.8)
```

```
## Nombre de personnes dans un bus : probabilité que le bus soit plein ?
# 5 arrêts de bus, personne ne descend
# Mélange de Gamma-Poisson : lambda_i suit Gamma(i, 5) => N suit B-(15,1/6) par additivité
# Capacité initiale : 75 places

def ProbaBusSaturé(Capacité, r, theta):
    Probas = [BinNeg(1/(1+theta), r, k) for k in range(0,Capacité+1)]
    rep = 1 - sum(Probas)
    Nombres1 = [k for k in range(0,Capacité+1)]
    Nombres2 = [k for k in range(Capacité+1,2*Capacité+1)]
    Probas1 = [BinNeg(1/(1+theta),r,k) for k in Nombres1]
    Probas2 = [BinNeg(1/(1+theta),r,k) for k in Nombres2]
    pp.text(1.5*Capacité, 0.01, r'proba ~= {}'.format(rep))
    py.scatter(Nombres1,Probas1,color=[.2,.4,.54])
    py.scatter(Nombres2,Probas2,color=[1,.47,.2])
    pp.grid(True)
    pp.show()
```