

DEUXIEME TEST D'ANALYSE NUMERIQUE

20 JUIN 2001

EXERCICE 1 (barème : 5)

On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- 1) Peut-on appliquer la méthode du gradient conjugué pour résoudre numériquement ce système?
- 2) En partant des conditions initiales $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ calculer numériquement deux itérations de la méthode du gradient conjugué. On détaillera et on présentera soigneusement les différents calculs nécessaires, les résultats numériques seront donnés avec 6 décimales.
- 3) Conclure en justifiant.

EXERCICE 2 (barème : 3)

On considère un nombre réel $\alpha > 0$, une fonction $f \in C^0(]0, 1[)$ et le problème : Trouver $u \in C^2(]0, 1[)$ vérifiant l'équation :

$$-u''(x) + \alpha u(x) = f(x) \quad \text{dans }]0, 1[$$

ainsi que les conditions aux limites :

$$u'(0) = -1 \quad \text{et} \quad u(1) = 0$$

- 1) Etablir la formulation variationnelle (PV) de ce problème
- 2) (PV) admet-il une solution et une seule?

EXERCICE 3 (barème : 3)

On considère le problème de Cauchy :

$$y'(t) = f(y(t), t) \quad \text{avec} \quad y(0) = y_0$$

où f est une fonction continue vérifiant une condition de Lipschitz sur la variable y .

Pour résoudre numériquement ce problème, on introduit un pas de temps constant h et on utilise le schéma :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3} f(y_i, t_i) + \frac{2h}{3} f(y_i + hf(y_i, t_i), t_i + h)$$

où y_i est l'approximation de $y(t_i)$.

- 1) Démontrer que ce schéma est convergent.
- 2) Calculer son ordre.

→ à calculer $\frac{dy}{dt}$

EXERCICE 4 (barème : 9)

On considère le problème de Cauchy :

$$y'(t) = 1 + y(t) + y^2(t) \quad \text{avec } y(0) = 0$$

Pour résoudre numériquement ce problème, on utilise le schéma d'Euler implicite avec un pas de temps constant $h > 0$. On notera ici encore, y_i l'approximation de $y(t_i)$.

- 1) Ecrire ce schéma implicite et montrer que h ne peut pas dépasser une borne supérieure dont on donnera l'expression en fonction de y_i .
- 2) Calculer explicitement y_{i+1} en fonction de y_i et de h .
- 3) En utilisant la valeur $h = 0.1$ calculer y_2 , y_5 et y_8 et comparer ces résultats aux valeurs exactes $y(0.2)$, $y(0.5)$ et $y(0.8)$.
- 4) Avec cette valeur du pas et ce schéma peut-on calculer l'approximation y_{10} de $y(1)$?

*1/3 h est
1/3 h est
1/3 h est*

partir de 0, on trouve un effet

$$y' = 1 + y + y^2$$

$$-0.4 - \frac{0.1}{3}$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

Handwritten scribbles and calculations on the right side of the page.



Analyse numérique

exercice 1.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. A est une matrice réelle;
symétrique et définie positive.
On a l'équation $Ax = b$ avec
 \bar{x} solution du système linéaire.

A admet 3 valeurs propres
distinctes Max 2.

donc la méthode du gradient
conjugué est applicable et elle
converge en 3 itérations vers la
solution de $Ax = b$.

0,5

$$2. \quad x_0 = y_0 = r_0 = 0 \quad \Lambda_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\rightarrow \pi_0 - A x_0 = b = - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow d_0 = -\pi_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \alpha_0 = \frac{\|\pi_0\|^2}{(x_0; A d_0)} = \frac{14}{44} = \frac{7}{22} \approx 0,318182$$

$$\rightarrow x_1 = x_0 + \alpha_0 d_0$$

$$x_1 = \alpha_0 d_0 = \begin{pmatrix} 0,636364 \\ 0,318182 \\ 0,954545 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \pi_1 = \pi_0 + \alpha_0 A d_0$$

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + 0,318182 \begin{pmatrix} 200 \\ 031 \\ 013 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} -0,727273 \\ 0,909091 \\ 0,181818 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \beta_0 = \frac{\|\pi_1\|^2}{\|\pi_0\|^2} = \frac{0,093270}{0,099174}$$

$$\rightarrow d_1 = -\pi_1 + \beta_0 d_0$$

~~$$d_1 = \begin{pmatrix} 1,095632 \\ -0,543092 \\ 0,552540 \end{pmatrix}$$~~

$$d_1 = \begin{pmatrix} 0,925620 \\ -0,809917 \\ 0,115702 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \alpha_1 = \frac{\|r_1\|^2}{(d_1, Ad_1)} = 0,392857 \quad (3)$$

$$\rightarrow X_2 = X_1 + \alpha_1 d_1$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0,999999 \approx 1,000000 \\ 5,681817 \cdot 10^{-8} \approx 0,000001 \\ 0,999999 \approx 1,000000 \end{pmatrix}$$

3

3. On remarque que la méthode converge vers $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est solution du système. Le résultat montre bien que l'on a 3 valeurs propres.



exercice 2.

$$\begin{cases} -u''(x) + \alpha u(x) = f(x) & \text{dans }]0, 1[\\ u'(0) = -1 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

1. $-u'' + \alpha u = f \quad \forall x \in]0, 1[$
 $-u''(x)v(x) + \alpha u(x)v(x) = f(x)v(x) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$

$$u \in C^2(]0, 1[) \Rightarrow u \in H^2(]0, 1[)$$

*

On utilise la formule de Green, et on obtient :

$$-[uv]'_0^1 + \int_0^1 (\alpha u(x)v(x) + u'(x)v'(x)) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx$$

$$* \quad u'(0)v(0) - u'(1)v(1) = -v(0) - u'(1)v(1)$$

$$u \in H^2(]0, 1[) \Rightarrow u' \in H^1(]0, 1[)$$

$$u' \in V = \{ \xi \in H^1(]0, 1[) \mid \xi(1) = 0 \}$$

$$\Rightarrow v \in V$$

$$[uv]'_0^1 = -v(0)$$

du

 Nouvelle formulation :

Trouver $u \in V \mid a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V.$

$$y'(t) = f(y(t), t) \text{ avec } y(0) = y_0$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3} f(y_i, t_i) + \frac{2h}{3} f(y_i + h f(y_i, t_i), t_i + h)$$

1. consistance:

$$\Phi(y_i, t_i, h_i) = \frac{1}{3} f(y_i, t_i) + \frac{2}{3} f(y_i + h f(y_i, t_i), t_i + h)$$

$$\Phi(y_i, t_i, 0) = \frac{1}{3} f(y_i, t_i) + \frac{2}{3} f(y_i, t_i) = f(y_i, t_i)$$

d'où le schéma est consistant

stabilité:

$$\begin{aligned} \|\Phi(y, t, h) - \Phi(\tilde{y}, t, h)\| &= \left\| \frac{1}{3} f(y, t) + \frac{2}{3} f(y + h f(y, t), t + h) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} f(\tilde{y}, t) + \frac{2}{3} f(\tilde{y} + h f(\tilde{y}, t), t + h) \right\| \end{aligned}$$

ou f vérifie une condition de Lipschitz sur y .

$$\begin{aligned} \|\Phi(y, t, h) - \Phi(\tilde{y}, t, h)\| &\leq \frac{1}{3} \|f(y, t) - f(\tilde{y}, t)\| \\ &\quad + \frac{2}{3} \|f(\underbrace{y + h f(y, t)}_{c_1}, t + h) - f(\underbrace{\tilde{y} + h f(\tilde{y}, t)}_{c_2}, t + h)\| \\ &\leq \frac{1}{3} M \|y - \tilde{y}\| + \frac{2}{3} M (\|y + h f(y, t) - \tilde{y} + h f(\tilde{y}, t)\|) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{3} M \|y - \tilde{y}\| + \frac{2}{3} M (\|y - \tilde{y}\| + h \|f(y, t) - f(\tilde{y}, t)\|)$$

$$\leq \left(\frac{1}{3} M + \frac{2}{3} M (1 + h M) \right) \|y - \tilde{y}\|$$

d'où la stabilité

(6)

donc comme un schéma explicite a Δt pas stable et constant est convergent.

on a bien un schéma convergent.

2. ordre de ce schéma:

$$\begin{aligned}\Phi(y, t, h) &= \frac{1}{3} f(y, t) + \frac{2}{3} f(y + h f(y, t), t + h) \\ &= \frac{1}{3} f(y, t) + \frac{2}{3} \left[f(y, t) + h \frac{\partial f}{\partial t}(y, t) + h f(y, t) \frac{\partial f}{\partial y}(y, t) + \dots \right] \\ &= f(y, t) + \frac{2h}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(y, t) + f(y, t) \frac{\partial f}{\partial y}(y, t) + O(h^2) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{y(t+h) - y(t)}{h} &= \frac{y(t) + h y'(t) + \frac{h^2}{2} y''(t) - y(t) + O(h^3)}{h} \\ &= y'(t) + \frac{h}{2} y''(t) + O(h^2)\end{aligned}$$

$$y'(t) = f(y, t)$$

$$y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(y, t) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(y, t)$$

$$\Rightarrow \left| \left(-\frac{2}{3} h + \frac{h}{2} \right) y''(t) \right| = \left| \frac{1}{6} h y''(t) \right|$$

d'où

on a un schéma d'ordre 2.

Order 2

$$y'(t) = 1 + y(t) + y^2(t)$$

$$y(0) = 0$$

1. $y_{i+1} = y_i + h(1 + y_i^2 + y_i)$

$$h y_{i+1}^2 + (h-1) y_{i+1} + y_i + h = 0$$

1

$$\Delta = (h-1)^2 - 4h(y_i + h)$$

$$\Delta = h^2 + 1 - 2h - 4h^2 - 4h y_i$$

$$\Delta = -3h^2 - 2h + 1 - 4h y_i$$

$$\Delta = h(-3h - 2 - 4y_i) + 1$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow -3h^2 - (2 + 4y_i)h + 1 > 0$$

$$\Delta_2 = (2 + 4y_i)^2 + 4 \times 3 = 12 + (2 + 4y_i)^2$$

$$\Delta_2 > 0$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{-(2 + 4y_i) + \sqrt{12 + (2 + 4y_i)^2}}{6}$$

$$h_2 = \frac{-(2 + 4y_i) - \sqrt{12 + (2 + 4y_i)^2}}{6}$$

or $h > 0$ donc unique solution p 2 equation (1) vérifié si $h < h_2$

d'où

2

h ne peut pas dépasser la borne

$$h = \frac{-(2 + 4y_i) + \sqrt{12 + (2 + 4y_i)^2}}{6}$$

2.

On a alors $\Delta > 0$

⑧

donc

$$(y_{i+1})_2 = \frac{-(h-1) \pm \sqrt{(h-1)^2 - 4h(y_i+h)}}{2h}$$

d'où comme on doit avoir quand $h \rightarrow 0$
 $y_{i+1} \rightarrow y_i$

on a en faisant un développement limité

$$(y_{i+1})_2 = \frac{-(h-1) \pm (1 - \frac{3}{2}h^2 - h - 2hy_i + o(h^2))}{2h}$$

Pour que l'on ait la condition souhaitée,
 il faut que y_{i+1} égal :

$$y_{i+1} = \frac{-(h-1) - \sqrt{(h-1)^2 - 4h(y_i+h)}}{2h}$$

si $h=0,1$

$h_0 = 0,11952$

$h_1 = 0,11952$

$h_2 = 0,11952$

$h_3 = 0,11952$

$h_4 = 0,11952$

$h_5 = 0,11952$

$h_6 = 0,11952$

$h_7 = 0,11952$