Premier test de Calcul Scientifique - 2h Promo A

Exercice 1

Dans le plan réel muni d'un repère orthonormé xOy on considère les points : $A(1;0)$, $B(1;2/3)$, $C(4/3;4/3)$ $D(-\frac{1}{3};4/3)$, $E(-1;2/3)$ et $F(-1;0)$.

On note Ω l'intérieur et $\partial\Omega$ la frontière du polygone ABCDEF. On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega & (f \text{ non prolongeable sur }]DC[) \\ u = x \text{ sur } \partial\Omega \setminus]DC[\\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = y \text{ sur }]DC[\end{cases}$$

Écrire le problème linéaire obtenu par discrétisation avec le pas $h = h_x = h_y = \frac{1}{3}$. On numérotera les points utiles par ligne de gauche à droite et de haut en bas.

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Peut-on résoudre $Ax = b$ avec les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel ?

.../...

Exercice 3

Pour tout réel $\alpha \neq 0$, on peut caractériser l'inverse de α comme étant le zéro unique de la fonction f défini par $f(x) = \alpha - \frac{1}{x}$ ou encore la fonction g défini par $g(x) = \alpha^3 - \frac{1}{x^3}$

1) Expliciter la fonction F de l'itération de Newton pour la résolution de $f(x) = 0$.

2) On considère la suite défini par $\begin{cases} x_0 \\ x_{k+1} = F(x_k) \quad k \geq 0 \end{cases}$

Etudier la convergence de cette suite selon la valeur de x_0.
On pourra utiliser $r_k = 1 - \alpha x_k$

3) Expliciter la fonction G de l'itération de Newton appliquée à $g(x) = 0$

4) On considère la suite défini par $\begin{cases} x_0 \\ x_{k+1} = G(x_k) \quad k \geq 0 \end{cases}$

Etudier la convergence de cette suite selon la valeur de x_0

5) Lorsqu'elles convergent simultanément, laquelle de ces deux méthodes est la plus rapide?

6) On considère $\alpha = 3{,}141592$ et $x_0 = 0{,}1$

Calculer α^{-1} à 10^{-6} près avec les 2 méthodes précédentes. On donnera le résultat de chaque itération à 10^{-6} près.

Hucher
Ludovick
TPEC

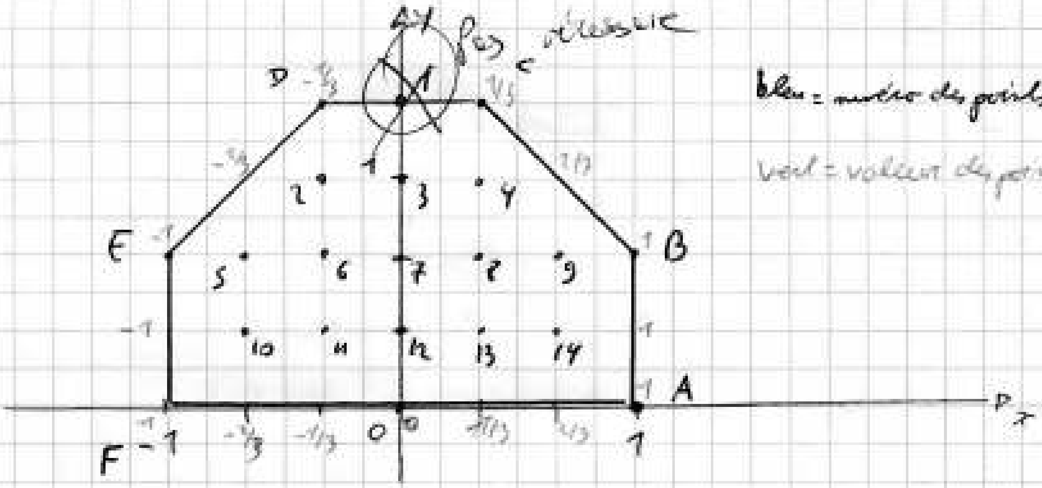
1/5

21/3/2007

17

Calcul scientifique : test 1

Exercice 1

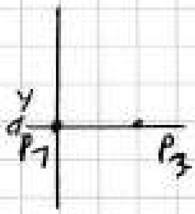


* Pour les points "intérieurs" on a :

$$-\Delta u(P) = \frac{1}{h^2}\left(4u_i(P) - \sum_{i=1}^{4} u_i\right)$$

$$\Rightarrow h^2 f_i = 4u_i - \sum_{\substack{4\text{ voisins}\\ \text{de } i}} u_i$$

* Pour le point 1 on a :



$$u(P_1) = u(P_3) + \cancel{h\frac{\partial u}{\partial y}(P_3) + o(h)}$$

$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial n}(P_3)} = y(P_3)$$

$$= \frac{4}{3}$$

Attention passage → erreur !

OK sur principe

$$u(P_1) = u(P_3) + \frac{4}{3}h \quad !$$

(suite exercice 1)

On a déduit :

$$u_1 - u_3 = \frac{4}{3}h = \frac{4}{9}$$ → à réinjecter dans le point 3 !

2/1

$$4u_2 - u_3 - u_6 = h^2 f_2 + u(0) + u(-1/3, 1) = \frac{f_2}{9} - 1$$

Principe non compris ici

$\vdots$

On écrit le problème sous forme matricielle $AU = B$ avec

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{14} \end{pmatrix}$$

5

$$A = \begin{array}{c c}
\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{array} & \\
\left[\begin{array}{cccccccccccccc}
\cancel{1} & & \cancel{-1} & & & & & & & & & & & \\
 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & & & \\
-1 & -1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & & \\
 & & -1 & 4 & & & & -1 & & & & & & \\
 & & & & 4 & -1 & & & & -1 & & & & \\
 & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & & -1 & & & \\
 & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & & -1 & & \\
 & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & & -1 & \\
 & & & & & & & -1 & 4 & & & & & -1 \\
 & & & & -1 & & & & & 4 & -1 & & & \\
 & & & & & -1 & & & & -1 & 4 & -1 & & \\
 & & & & & & -1 & & & & -1 & 4 & -1 & \\
 & & & & & & & -1 & & & & -1 & 4 & -1 \\
 & & & & & & & & -1 & & & & -1 & 4
\end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{array}
\end{array}$$

ok

OK en principe

Les cases vides sont à 0

$${}^tB = \left[\frac{1}{3},\ \frac{f_2}{9} - 1,\ \frac{f_3}{9},\ \frac{f_4}{9} + 1,\ \frac{f_5}{9} - 5/3,\ \frac{f_6}{9},\ \frac{f_7}{9},\ \frac{f_8}{9},\ \frac{f_9}{9} + 5/3,\ \frac{f_{10}}{9} - 5/3,\right.$$

$$\left.\frac{f_{11}}{9} - \frac{1}{3},\ \frac{f_{12}}{9} - 0,\ \frac{f_{13}}{9} + \frac{1}{3},\ \frac{f_{14}}{9} + 5/3\right]$$

avec $f_i = f(u_i)$

5/5

Exercice 2

Les méthodes itératives de Jacobi et Gauss-Seidel dominent des matrices utilisées dans l'itération. Elles convergent selon la valeur de $\rho(B)$ où B est la matrice multipliée par x^0.

*** Jacobi**

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

On recherche des valeurs propres : (on développe par rapport à la 1ère colonne)

$$\chi_J(\lambda) = \det(J - \lambda I) = (-\lambda)(\lambda^2 - 2) - (-1)(2\lambda + 4) + (-2)(2 + 2\lambda)$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda + 2\lambda + 4 - 4 - 4\lambda = -\lambda^3$$

3

$\rho(J) = 0 \Rightarrow \rho(J) < 1 \Rightarrow$ La méthode de Jacobi est utilisable.

*** Gauss-Seidel** (avec la notation du cours)

$$M^{-1}N = (D-E)^{-1}F$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -2 & +2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erreurs de multiplication

1

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -2 & +2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & +2 & -3 \\ 0 & \cancel{-1}\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Attention aux erreurs de calculs.

On note G cette matrice

$$\chi_G(\lambda) = \det(G - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & -4 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda)\left[(-2-\lambda)(2-\lambda) - 1(-4)\right]$$

$$= (-\lambda)\left(-4 - 2\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 4\right)$$

$$= (-\lambda)(\lambda^2) = -\lambda^3$$

calculs justes avec la matrice B trouvée

$$\Rightarrow \rho(G) = 0 \Rightarrow \rho_G(G) < 1$$

$\Rightarrow$ La méthode de Gauss-Seidel est applicable.

4/5

Exercice 3

1) La méthode de Newton est la méthode de la tangente.

$$f'(x^k) = \frac{f(x^k)}{x^{(k)} - x^{(k+1)}} \Rightarrow F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{a - \frac{1}{x}}{0 + \frac{1}{x^2}} = x - x^2\left(a - \frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{F(x) = -x^2 a + 2x}$$

On a bien $F(\frac{1}{a}) = \frac{1}{a}$

à justifier

2) On calcule $(x_k \neq \frac{1}{a})$ le ratio suivant et on le compare à 1.

et pourquoi ?

$$\left|\frac{F(x_k) - \frac{1}{a}}{x_k - \frac{1}{a}}\right| = \left|\frac{\left(-x_k^2 a + 2x_k - \frac{1}{a}\right)}{\left(x_k - \frac{1}{a}\right)}\right| = \left|\frac{-x_k a\left(x_k - \frac{1}{a}\right) + \left(x_k - \frac{1}{a}\right)}{\left(x_k - \frac{1}{a}\right)}\right|$$

$$= \left|-x_k a + 1\right| = \left|r_k\right|$$

Go

Pour $|r_n| < 1$ on se rapproche de la solution.

$|r_n| < 1 \Rightarrow -1 < r_n < 1$

$\Rightarrow -1 < 1 - a x_n < 1$

$\Rightarrow -2 < -a x_n < 0$

$\Rightarrow 2 > a x_n > 0$

ok

si $a > 0$

$x_n \in]0, \frac{2}{a}[$

$\Rightarrow F(x_n) \in F]0, \frac{2}{a}[$

$\Rightarrow F'(x) = -2xa + 2 = 2a(x + \frac{1}{a})$

$\hookrightarrow$ F décroissante sur $]\frac{1}{a}, +\infty[$

F croissante sur $]-\infty, \frac{1}{a}[$

ok

$\Rightarrow F(x_n) = x_{n+1} \in]0, \frac{2}{a}[$

si $a > 0$

$x_n \in]\frac{2}{a}, 0[$

$\hookrightarrow F(x_n) \in F]\frac{2}{a}, 0[\Rightarrow F(x_n) = x_{n+1} \in]?, \frac{2}{a}[$

$\boxed{\text{La suite converge si } x_0 \in]0, \tfrac{2}{a}[\text{ (ou }]\tfrac{2}{a}, 0[\text{ si } a < 0)}$

ok

et pourquoi ??

sur principe

tu n'es pas vraiment fait le lien avec la suite x_k

et

Exercice 3 (suite)

5/5

3) Pour G, on procède comme pour F en III.1 :

$$g'(x^n) = \frac{g(x^n)}{x^n - x^{(n+1)}} \Rightarrow G(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$$

$$G(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)} = x - \frac{a^3 - \frac{1}{x^3}}{0 + 3\frac{1}{x^4}} = x - \frac{1}{3}x^4\left(a^3 - \frac{1}{x^3}\right)$$

$$\boxed{G(x) = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^4 a^3}$$

On a bien $G\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{4}{3}\frac{1}{a} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}\right)^4 a^3 = \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}$

4) On emploie la même méthode qu'à la question 2

5) Pour estimer la vitesse de convergence on compare les ordres des deux méthodes

$F'(x) = -2xa + 2 \qquad F'\left(\frac{1}{a}\right) = 0$

$F''(x) = -2a \qquad F''\left(\frac{1}{a}\right) = 0$

$F'''(x) = 0$

$G'(x) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x^3a^3 \qquad G'\left(\frac{1}{a}\right) = 0$

$G''(x) = -4x^2a^3 \qquad G''\left(\frac{1}{a}\right) = -4a \neq 0$

F est d'ordre infini, G est d'ordre 2.

Bien que F et G soient toutes deux superlinéaires, l'ordre de F est plus élevé, sa vitesse de convergence est plus élevée.

8

6)

itération	F	G
0	0,1	0,1
1	0,168 584	0,132 799
2	0,247 882	0,173 237
3	0,302 727	0,221 669
4	0,317 547	0,270 604
5	0,318 308	0,305 386
6	$\boxed{0,318\ 309}$	0,317 788
7		0,318 307
8		$\boxed{0,318\ 309}$
9		
10		
11		
12		
13		