DEUXIEME TEST D'ANALYSE NUMERIQUE

8 JUIN 2000

EXERCICE 1

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) = y(t)^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

1) En utilisant le pas constant $h = 0.1$ calculer par le schéma d'Euler explicite les approximations y_i de $y(ih)$ pour $i = 1$ à $i = 10$.

2) Déterminer la solution exacte de (1). Tracer sur un même graphique la courbe représentative de la fonction y, les points y_i pour $i = 1 \ldots 10$ et conclure.

3) On considère une suite de pas variables h_n positifs et on pose $t_{n+1} = t_n + h_n$ et $y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n)$. Montrer que si $y_n \leq \dfrac{1}{1-t_n}$ et $t_{n+1} < 1$ alors on a $y_{n+1} \leq \dfrac{1}{1-t_{n+1}}$.

4) Soit α un réel positif (petit) et h_n une suite de pas variables positifs tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2} h_n \mid f(t_{n+1}, y_{n+1}) - f(t_n, y_n) \mid < \alpha^2$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$

a) $h_n \mid y_n \mid < \alpha$

b) montrer par exemple par récurrence que $t_n < 1 + \alpha$ et $y_n \geq \dfrac{1+\alpha}{1+\alpha-t_n}$

5) Expliquer l'intérêt de la méthode en examinant le comportement de y_n pour t_n voisin de 1.

6) Déduire de ce qui précède un algorithme permettant de mettre en oeuvre le schéma défini en 3).

EXERCICE 2

Pour x et y dans $\mathbb{R}^n$ on note $(x \mid y)$ leur produit scalaire canonique. Soit A une matrice carrée d'ordre n, réelle, symétrique et définie positive. On applique la méthode du gradient conjugué au système linéaire $Ax = b$ où b est un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On rappelle que cette méthode consiste à minimiser la quantité positive $E(x) = (A(x - \bar{x}) \mid x - \bar{x})$ où $\bar{x}$ est la solution du système linéaire, à l'aide de la suite :

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \end{cases}$$

où $d_k \neq 0$ est la direction de descente.

On note $r_k = Ax_k - b$, $e_k = x_k - \bar{x}$, $H_{k-1} = vect(d_0, d_1, \ldots, d_{k-1})$ ainsi que $M = x_0 + H_{k-1} = \{y \mid y = x_0 + z \text{ avec } z \in H_{k-1}\}$. Dans la suite du problème on admettra les relations :

$$\forall i \leq k-1 \quad (r_k \mid r_i) = 0$$

$$H_{k-1} = vect(d_0, d_1, \ldots, d_{k-1}) = vect(r_0, r_1, \ldots, r_{k-1}) = vect(r_0, Ar_0, \ldots, A^{k-1} r_0)$$

1) Montrer que $\forall x \in M$ on a $E(x_k) \leq E(x)$.

2) $\mathcal{P}_{k-1}$ étant l'espace des polynômes de degré au plus $k-1$, montrer que $x \in M$ si et seulement si $\exists P \in \mathcal{P}_{k-1}$ tel que $x = x_0 + P(A)r_0$.

3) En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}$ on a :

$$E(x_k) = \min_{P \in \mathcal{P}_{k-1}} (A(I + AP(A))e_0 \mid (I + AP(A))e_0)$$

4) On note λ_i les valeurs propres de A. Montrer que $\forall P \in \mathcal{P}_{k-1}$:

$$E(x_k) \leq \{\max_{1 \leq i \leq n} [1 + \lambda_i P(\lambda_i)]^2\} E(x_0)$$

Corrigé du deuxième test d'Analyse Numérique

Pierre WERNY

8 Juin 2000

EXERCICE 1 : Equations différentielles ordinaires (11 pts)

Méthode d'Euler explicite et solution exacte (3.5 pts)

La méthode d'Euler explicite s'écrit pour $i > 0$

$$y_{i+1} = y_i + hf(y_i, t_i)$$
$$\text{soit} \quad y_{i+1} = y_i + hy_i^2$$

L'équation différentielle s'intègre sans difficulté (équation à variables séparables) et l'on obtient avec la condition initiale $y(0) = 1$ la solution $y(t) = \dfrac{1}{1-t}$ définie sur $[0,1[$.

Application numérique (représentation graphique voir figure 1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1.000	1.100	1.221	1.370	1.558	1.800	2.124	2.576	3.239	4.289	6.129
$y(t_i)$	1.000	1.111	1.250	1.428	1.666	2.000	2.500	3.333	5.000	10.00	$+\infty$

Inégalités (2 pts + 1 pts + 2.5 pts)

On peut procéder de multiples façons pour démontrer les inégalités proposées, par exemple :

Première inégalité :

$$\begin{aligned} y_{n+1}(1-t_{n+1}) &= y_n(1-t_n) - y_n h_n + h_n y_n^2 (1 - t_n - h_n) \\ &= \underbrace{y_n(1-t_n)}_{\leq 1} - y_n h_n \underbrace{(1 - y_n(1-t_n))}_{\geq 0} - \underbrace{y_n^2 h_n^2}_{\geq 0} \leq 1 \end{aligned}$$

$$\text{soit} \qquad y_{n+1} \leq \frac{1}{1-t_{n+1}}$$

Seconde inégalité :

On suppose $\varepsilon_n = \dfrac{1}{2} h_n \left(f(y_{n+1}, t_{n+1}) - f(y_n, t_n)\right) < \alpha^2$

alors

$$\frac{1}{2} h_n \left(y_{n+1}^2 - y_n^2\right) < \alpha^2$$

$$\frac{1}{2} h_n \left(y_{n+1} - y_n\right)\left(y_{n+1} + y_n\right) < \alpha^2$$

$$h_n^2 y_n^2 \frac{y_{n+1} + y_n}{2} < \alpha^2$$

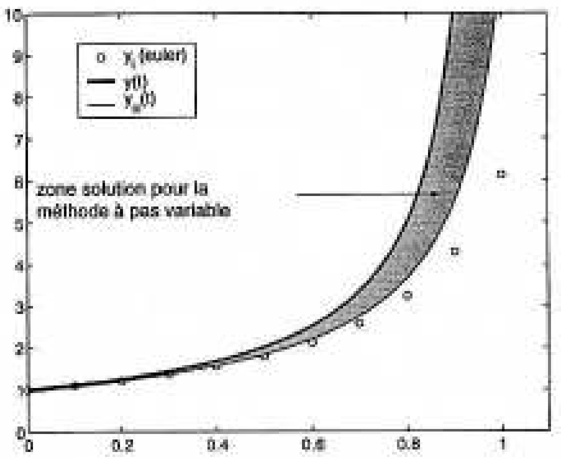

Figure 1: Tracé de $y(t)$, $y_\alpha(t)$ et y_i

or $\dfrac{y_{n+1} + y_n}{2} > \dfrac{2y_n}{2} > 1$, on en déduit $h_n y_n < \alpha$

Troisième inégalité : On démontre la propriété $\left\{ t_n < 1 + \alpha, y_n \geq y_\alpha(t_n) = \dfrac{1+\alpha}{1+\alpha-t_n} \right\}$ par récurrence.

Elle évidente au rang 0; pour $n \geq 0$

$$\begin{aligned} y_{n+1}(1+\alpha-t_{n+1}) &= \underbrace{y_n(1+\alpha-t_n)}_{\geq 1+\alpha} - y_n h_n + h_n y_n \underbrace{y_n(1+\alpha-t_n)}_{\geq 1+\alpha} - h_n^2 y_n^2 \\ &\geq (1+\alpha) + h_n y_n (1+\alpha) - y_n h_n \underbrace{(1 + y_n h_n)}_{< 1+\alpha} \\ &\geq (1+\alpha) > 0 \end{aligned}$$

or $y_{n+1} > 0$ donc $1 + \alpha - t_{n+1} > 0$ cad $t_{n+1} < 1 + \alpha$ et ensuite $y_{n+1} \geq \dfrac{1+\alpha}{1+\alpha-t_{n+1}}$.

Intérêt et algorithme (2 pts)

Pour t_n voisin de 1, on a l'encadrement $\dfrac{1+\alpha}{1+\alpha-t_n} \leq y_n \leq \dfrac{1}{1-t_n}$ qui constitue une bonne approximation de $y(t_n)$ pour α petit et qui rend compte de la divergence de y en 1. L'algorithme s'écrit alors :

- $y_0 = 1$, choix d'un α petit
- calcul de $h_n = \dfrac{\alpha}{y_n}$ et $t_{n+1} = t_n + h_n$
- calcul de $y_{n+1} = y_n + h_n y_n^2$

EXERCICE 2 : Méthode du gradient conjugué (10 pts)

Question 1 (3 pts)

Soit $x \in M$, alors $x = x0 + \sum_0^{k-1} \beta_i d_i = x0 + \sum_0^{k-1} \alpha_i d_i + \sum_0^{k-1} (\beta_i - \alpha_i) d_i = x_k + y$ avec $y \in H_{k-1}$.
$E(x) = A(x_k + y - \overline{x} | x_k + y - \overline{x}) = E(x_k) + 2\underbrace{(r_k|y)}_{=0} + \underbrace{(Ay|y)}_{\geq 0} \geq E(x_k)$

donc x_k minimise $E(x)$ sur M. (On notera au passage que $x_k \in M$)

Question 2 (facile : 2 pts)

$$\begin{array}{rrll} & x \in & M & \\ \Longleftrightarrow & x = & x0 + y & \text{avec } y \in H_{k-1} = vect(r_0, Ar_0, ..., A^{k-1} r_0) \\ \Longleftrightarrow & x = & x0 + \sum_i^{k-1} (\beta_i A^i r_0) & \\ \Longleftrightarrow & x = & x0 + P(A) r_0 & \text{avec } P = \sum_i^{k-1} \beta_i x^i \in \mathcal{P}_{k-1} \end{array}$$

Question 3 (se déduit facilement de la question précédente : 2 pts)

Soit $x = x0 + P(A) r_0$, alors

$$\left\{ \begin{array}{rl} r0 & = Ax_0 - b = Ax_0 - A\overline{x} = A(x_0 - \overline{x}) = Ae_0 \\ x - \overline{x} & = x_0 + P(A) r_0 - \overline{x} = e_0 + P(A) A e_0 = (I + AP(A)) \\ E(x) & = (A(x - \overline{x}) | x - \overline{x}) = (A(I + AP(A)) e_0 | (I + AP(A)) e_0) \end{array} \right.$$

et donc $E(x_k) = \min_{x \in M} (E(x)) = \min_{P \in \mathcal{P}_{k-1}} (A(I + AP(A)) e_0 | (I + AP(A)) e_0)$

Question 4 (plus difficile : 3 pts)

A est symétrique réelle , il existe donc une base orthonormée de vecteurs propres de A:
soit $(v_i, i = 1..n)$ cette base et $(\lambda_i, i = 1..n)$ les valeurs propres correspondantes $(Av_i = \lambda_i v_i)$.
On note que $(\forall i, \lambda_i > 0)$ car A est définie positive. Dans cette base :

$$e_0 = x_0 - \overline{x} = \sum_i a_i v_i; \quad E(x_0) = (Ae_0 | e_0) = \sum_i a_i^2 \lambda_i; \quad (I + AP(A)) e_0 = \sum_i (1 + \lambda_i P(\lambda_i)) a_i v_i$$

d'où

$$\begin{array}{rll} E(x_k) & \leq \left(A \sum_i (1 + \lambda_i P(\lambda_i)) \, a_i v_i, \sum_j (1 + \lambda_j P(\lambda_j)) \, a_j v_j \right) & \leq \sum_i (1 + \lambda_i P(\lambda_i))^2 a_i^2 \lambda_i \\ & \leq \max_i \left[(1 + \lambda_i P(\lambda_i))^2 \right] \left[\sum_i a_i^2 \lambda_i \right] \text{ (car } \lambda_i > 0) & \leq \max_i \left[(1 + \lambda_i P(\lambda_i))^2 \right] E(x_0) \end{array}$$