

Cours de

MÉCANIQUE DES SOLS

RÉSUMÉ - AIDE-MÉMOIRE

Introduction

1. Paramètres et classification
2. Contraintes
3. Hydraulique des sols
4. Calcul des tassements
5. Consolidation
6. Résistance au cisaillement
7. Poussée et butée
8. Portance

Jean-Pierre MAGNAN
2017

INTRODUCTION

Ce document regroupe quelques définitions, formules et abaques utiles pour le cours de mécanique des sols de l'École Nationale des Travaux Publics de l'État.

C'est un extrait du cours écrit, dont la lecture reste indispensable pour comprendre les phénomènes physiques, le comportement mécanique des massifs de sols et de roches dans la nature et les outils développés par les ingénieurs pour caractériser, modéliser et prévoir ce comportement.

1. PARAMÈTRES ET CLASSIFICATION DES SOLS

1. Constituants des sols

1.a Nature

Les sols contiennent dans le cas général une phase solide, une phase liquide et une phase gazeuse :

- la phase solide est divisée en particules minérales ou organiques de dimensions diverses. Les particules minérales proviennent de la désagrégation ou transformation des roches. Les plus grossières sont surtout des agrégats polyminéraux, aux arêtes plus ou moins usées. Les particules fines sont en général argileuses et ont une affinité particulière pour l'eau. Les particules organiques proviennent de la décomposition de végétaux ou d'êtres vivants ;

- la phase liquide partage avec la phase gazeuse les vides laissés par l'empilement des particules solides. Il s'agit d'eau dans le plus souvent, avec de nombreuses substances en solution. L'eau peut geler lorsque les températures sont assez basses, ce qui modifie sensiblement le comportement du sol ;

- la phase gazeuse est en général constituée d'air, parfois de gaz d'origine organique.

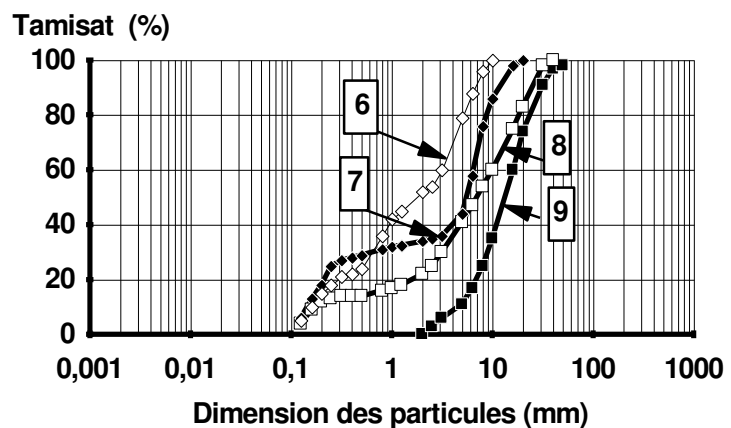
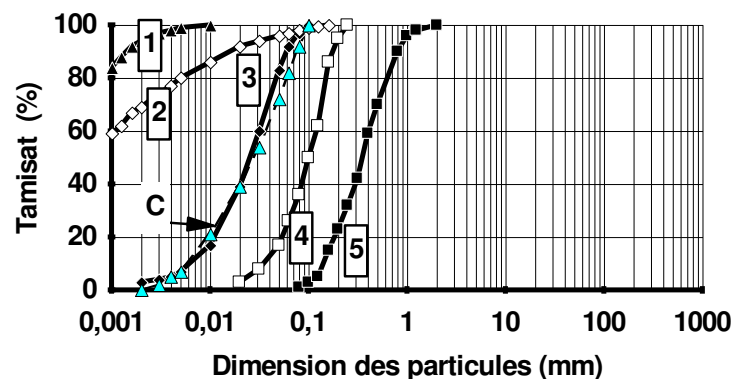
1.b Granulométrie

Les courbes granulométriques représentent le pourcentage cumulé des masses des particules de dimension inférieure à d (le « tamisat » ou « passant ») en fonction du logarithme de la dimension d . Les dimensions et la masse des particules sont déterminées au moyen de tamis (particules de dimensions supérieures à 0,06 mm) ou par sédimentométrie (particules fines).

Courbes granulométriques types de sols de divers pays :

1. bentonite du Wyoming,
 2. argile du delta du Nil,
 3. loess de Dunaujvaros,
 4. sable du lac Balaton,
 5. sable du Sahara,
 6. grave de la vallée de la Drave (Hongrie),
 7. grave du Danube à Györ (Hongrie)
 8. grave du Danube à Budapest,
 9. grave du Danube à Vienne,
- C. ciment.

(Données de Kezdi, 1974)



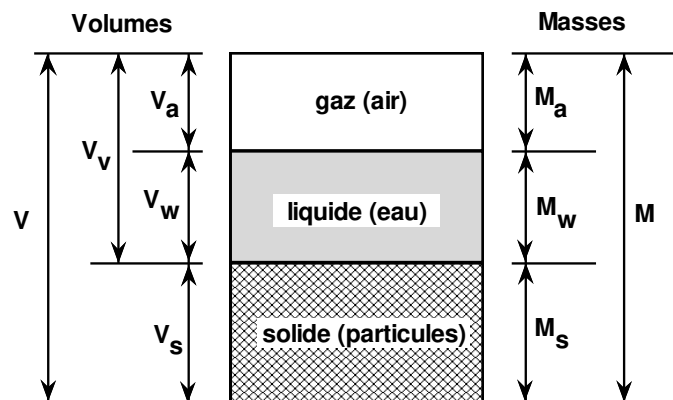
Sur une courbe granulométrique, on peut déterminer les dimensions caractéristiques d_{10} , d_{30} et d_{60} (dimensions auxquelles sont inférieurs 10%, 30% et 60% de la masse totale des particules) et les coefficients de courbure C_C et d'uniformité C_U , égaux à :

$$C_C = \frac{d_{30}^2}{d_{10}d_{60}} \quad \text{et} \quad C_U = \frac{d_{60}}{d_{10}} .$$

2. Paramètres d'identification des sols

2.a Diagramme des phases

V	Volume total du sol
V_a	Volume de l'air
V_w	Volume de l'eau
V_s	Volume des particules solides
V_v	Volume des vides (pores)
M	Masse totale du sol
M_a	Masse de l'air
M_w	Masse de l'eau
M_s	Masse des particules solides



Relations

$$V = V_v + V_s$$

$$V = V_a + V_w + V_s$$

$$M = M_s + M_w$$

Paramètres dimensionnels (masses volumiques en t/m^3)

Masse volumique (du sol)	$\rho = \frac{M}{V}$	Masse volumique des particules	$\rho_s = \frac{M_s}{V_s}$
Masse volumique de l'eau	$\rho_w = \frac{M_w}{V_w}$	Masse volumique de l'air	$\rho_a = \frac{M_a}{V_a}$
Masse volumique du sol sec	$\rho_d = \frac{M_s}{V}$	Masse volumique déjaugée du sol	$\rho' = \rho - \rho_w$
Masse volumique du sol saturé	$\rho_{sat} = \frac{M_s + M_w(V_v / V_w)}{V}$		

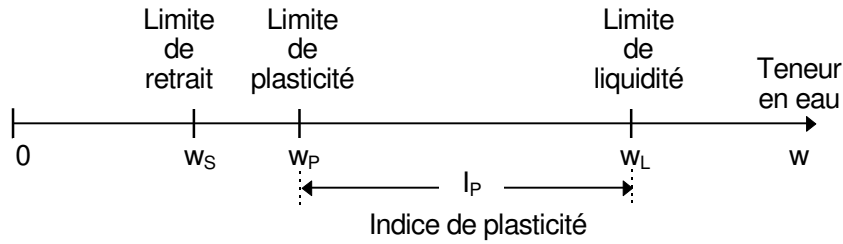
Paramètres sans dimensions

Porosité	$n = \frac{V_v}{V}$	Indice des vides	$e = \frac{V_v}{V_s}$
Teneur en eau (massique)	$w = \frac{M_w}{M_s}$	Teneur en eau volumique	$\theta = \frac{V_w}{V}$
Degré de saturation	$S_r = \frac{V_w}{V_v}$		

On utilise aussi des poids volumiques, notés γ , γ_w , γ_a , γ_d , γ_s , γ_{sat} , γ' et égaux au produit de la masse volumique correspondante par l'accélération de la pesanteur g (souvent prise égal à $10m/s^2$ en mécanique des sols). Les densités G , G_w , G_a , G_d , G_s , G_{sat} et G' sont pour leur part égales au quotient des masses volumiques correspondantes par la masse volumique de l'eau.

2.b État des sols fins

* *Limites d'Atterberg*



* *États de consistance des sols fins*

Consistance des sols fins

Valeur de I_L	Valeur de I_C	Dénomination
< 0	> 1	consistance dure (sol très consistant)
0 à 0,25	0,75 à 1	consistance très ferme (sol consistant)
0,25 à 0,5	0,75 à 0,5	consistance moyenne (sol mi-consistant)
0,5 à 0,75	0,5 à 0,25	consistance molle
0,75 à 1	0,25 à 0	consistance très molle ou pâteuse
> 1	< 0	consistance liquide

* *Valeur de bleu*

Mesure de l'activité des particules argileuses par adsorption de bleu de méthylène. La valeur de bleu V_B s'exprime en grammes de bleu pour 100 grammes de sol (g/100g)

2.c État des sols grenus

* *Indice de densité*

$$I_D = \frac{e_{\max} - e}{e_{\max} - e_{\min}}$$

avec

e_{\min} et e_{\max} indices des vides extrêmes du sol testé,
 e indice des vides actuel.

* *États de compacité des sols grenus*

États de compacité des sols grenus

Valeur de I_D	État de compacité
0 à 15	très lâche
15 à 35	lâche
35 à 65	moyen
65 à 85	dense ou serré
85 à 100	très dense (serré)

3. Classifications des sols

Classification USCS/LCPC des sols

d_{50}	fraction > 80 μm	fraction < 80 μm		nom LCPC	symbole USCS
SOLS GRENUS	GRAVES majorité > 2 mm	0 à 5%	$C_U > 4$ et $1 < C_C < 3$	Gb grave propre bien graduée	GW
			sinon	Gm grave propre mal graduée	GP
		5 à 12 %	diagramme de plasticité : au-dessus de la ligne A	GA grave argileuse	GC
			diagramme de plasticité : au-dessous de la ligne A	GL grave limoneuse	GM
		> 12 %	double classement et double symbole	GA/GL - Lp/Lt/Ap/At	
	SABLES majorité < 2 mm	< 5 %	$C_U > 6$ et $1 < C_C < 3$	Sb sable propre bien gradué	SW
			sinon	Sm sable propre mal gradué	SP
		5 à 12 %	diagramme de plasticité : au-dessus de la ligne A	SA sable argileux	SC
			diagramme de plasticité : au-dessous de la ligne A	SL sable limoneux	SM
		> 12 %	double classement et double symbole	SA/SL - Lp/Lt/Ap/At	
SOLS FINS	Détermination des limites de consistance sur la fraction < 0,42 mm 				At = CH Ap = CL Lt = MH Lp = ML Ot = OH Op = OL
Les dénominations dépendent de la position du point sur le diagramme : argile au-dessus de la ligne A, limon au-dessous de la ligne A ; peu plastique si $w_L < 50$; très plastique si $w_L > 50$. Les sols organiques O ont plus de 10% de matières organiques.					

Classification des sols LCPC (1974/1980)

(Cette classification précise la place des sols organiques)

a. Principe général [Notations : C_{80} = teneur en particules fines < 0,08 mm]

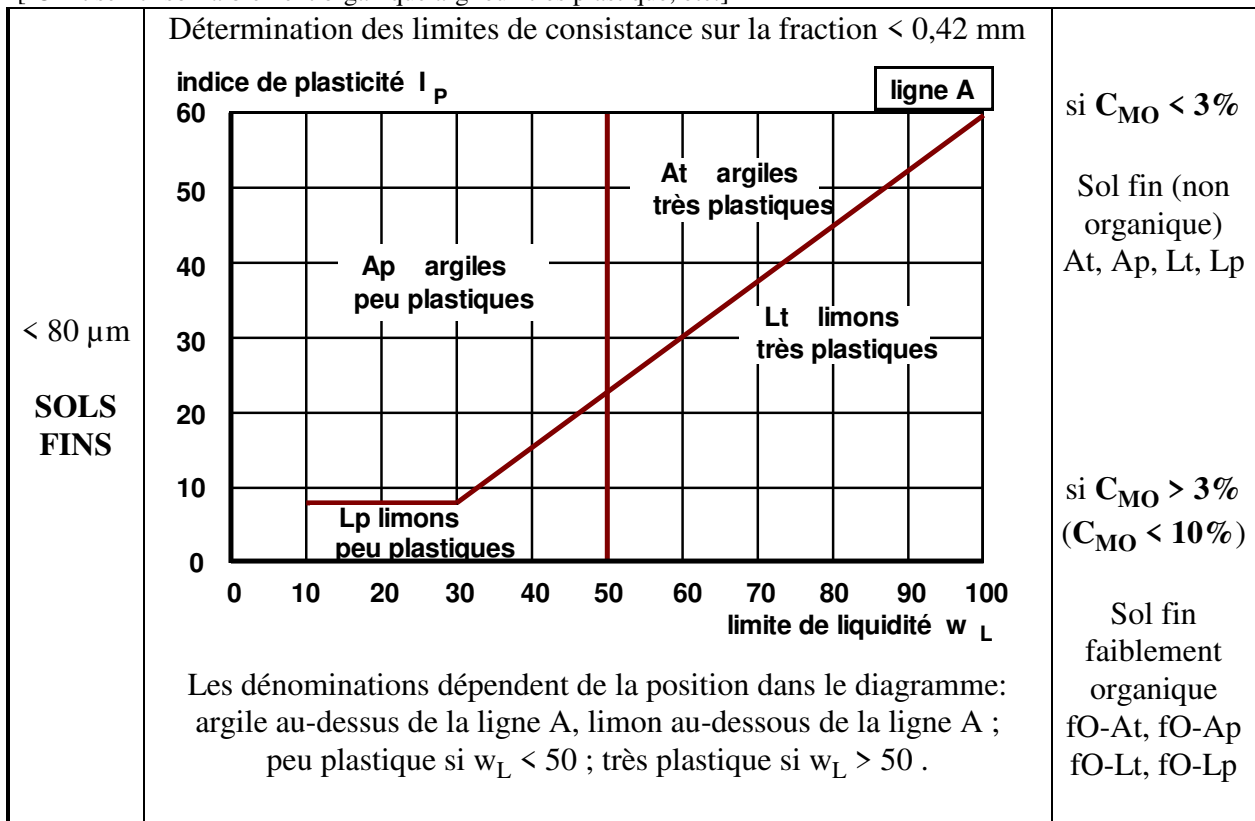
d_{50}	C_{MO}	C_{80}	diagramme de plasticité	forme courbe granulométrique	test de von Post	Dénominations
> 80 μ m Sols grenus		< 5%		oui		Graves ou sables propres bien ou mal gradués (Gb, Gm, Sb, Sm)
		5 à 12%		oui		Graves ou sables argileux (GA, GL, SA, SL)
		> 12%	oui	oui		Double classement et double symbole
< 80 μ m Sols fins Sols organiques	< 3%		oui			Sols fins (At, Ap, Lt, Lp)
	3 à 10%		oui			Sols faiblement organiques (fO-At/Ap/Lt/Lp))
	10 à 30%					oui
	> 30%		oui		Sols très organiques (tO-a/sf/f)	

b. Classification des sols grenus

d_{50}	fraction > 80 μ m	fraction < 80 μ m		nom LCPC (USCS)
> 80 μ m SOLS GRENUS	GRAVES majorité > 2 mm	0 à 5%	$C_U > 4$ et $1 < C_C < 3$	Gb (GW) grave propre bien graduée
			sinon	Gm (GP) grave propre mal graduée
		5 à 12 %	diagramme de plasticité : au-dessus de la ligne A	GA (GC) grave argileuse
			diagramme de plasticité : au-dessous de la ligne A	GL (GM) grave limoneuse
		> 12 %	double classement et double symbole	GA/GL - Lp/Lt/Ap/At
		SABLES majorité < 2 mm	< 5%	$C_U > 6$ et $1 < C_C < 3$
	sinon			Sm (SP) sable propre mal gradué
	5 à 12 %		diagramme de plasticité : au-dessus de la ligne A	SA (SC) sable argileux
			diagramme de plasticité : au-dessous de la ligne A	SL (SM) sable limoneux
	> 12 %	double classement et double symbole	SA/SL - Lp/Lt/Ap/At	

c. Classification des sols fins (non organiques ou faiblement organiques)

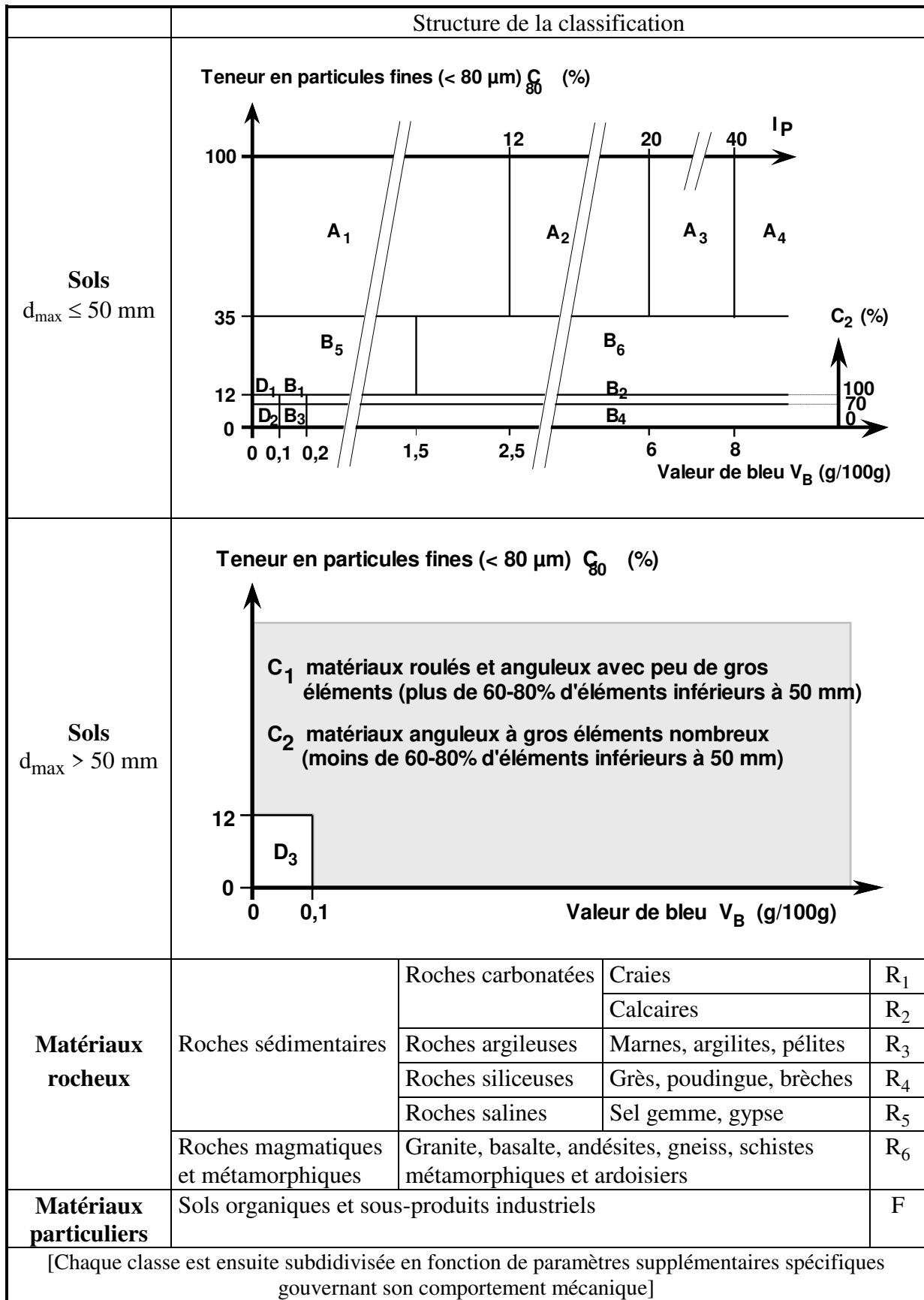
[fO-At se lit "sol faiblement organique argileux très plastique, etc.]



d Classification des sols organiques

<p>$C_{MO} > 10\%$</p> <p>SOLS ORGANIQUES</p>	<p>Pratiquer le test d'humification de von Post</p> <ul style="list-style-type: none"> - H1 à H3 : matière organique amorphe (a) - H4 à H6 : matière organique semi-fibreuse (sf) - H7 à H10: matière organique fibreuse (f) 	<p>si $C_{MO} < 30\%$</p> <p>Sol moyennement organique</p> <ul style="list-style-type: none"> - à matière organique amorphe (mO-a) - à matière organique semi-fibreuse (mO-sf) - à matière organique fibreuse (mO-f) <p>si $C_{MO} > 30\%$</p> <p>Sol très organique</p> <ul style="list-style-type: none"> - à matière organique amorphe (tO-a) - à matière organique semi-fibreuse (tO-sf) - à matière organique fibreuse (tO-f)
--	---	--

Classification française des sols pour les terrassements routiers



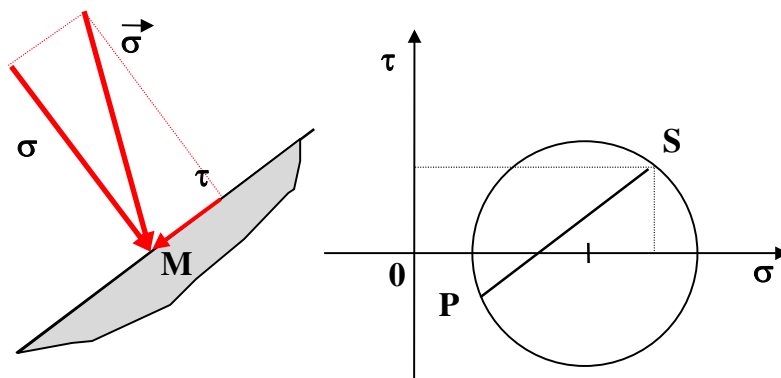
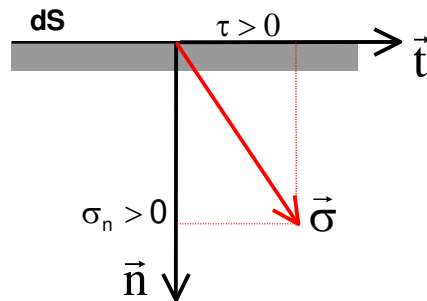
2. CONTRAINTES

On peut définir des champs de contraintes lorsque les sols ou les roches sont assimilables à des milieux continus. Dans ce cas, on définit :

- un champ de contraintes totales (sans distinguer les phases dans le matériau), noté $\underline{\underline{\sigma}}$,
- un champ de pressions dans chacune des phases fluides capables de transmettre des pressions dans le massif :
 - * la pression de l'eau interstitielle ou pression interstitielle, notée u (u_w lorsqu'il faut distinguer les pressions de l'eau et du gaz) ;
 - * la pression du gaz interstitiel, notée u_a .

Les conventions de signe de la mécanique des sols sont adaptées au comportement usuel des sols qui ne peuvent être chargés qu'en compression : les contraintes de compression et les diminutions de volume sont positives.

Convention de signe pour les contraintes
(conventions de la mécanique des sols)



Position du pôle P du cercle de Mohr
(conventions de signe de la mécanique des sols).

Pour les sols saturés, on définit des contraintes effectives $\underline{\underline{\sigma'}} = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{1}} \cdot u$.

Le principe des contraintes effectives affirme que le comportement mécanique des sols saturés (déformations, stabilité) est contrôlé par les contraintes effectives.

Les contraintes totales vérifient les équations d'équilibre de la mécanique des milieux continus :

$$\text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \vec{f} = \vec{0},$$

où \vec{f} représente les forces volumiques externes appliquées au milieu continu.

Les contraintes existant dans un massif naturel de sol ou de roches (contraintes « initiales ») ne peuvent être calculées que si l'on connaît l'histoire du matériau et ses lois de comportement. Ce n'est en général pas le cas.

Pour les massifs de sols à surface horizontale, on admet que

- la contrainte totale verticale augmente avec la profondeur z en fonction du poids volumique γ du sol :

$$\sigma_{vo} = \int \gamma dz \quad ,$$

- le rapport des contraintes effectives horizontale σ'_{ho} et verticale σ'_{vo} est égal à une constante K_o (coefficient de pression des terres au repos), dépendant notamment de la résistance au cisaillement et de la surconsolidation du sol :

$$K_o = \frac{\sigma'_{ho}}{\sigma'_{vo}} \quad .$$

Il est recommandé de toujours calculer les contraintes totales, puis les pressions interstitielles et de déterminer les contraintes effectives par différence.

Toutes les contraintes sont calculées par rapport à la pression atmosphérique, supposée nulle.

3. HYDRAULIQUE DES SOLS

Dans les sols, l'eau peut soit se déplacer librement entre les particules (eau libre ou eau gravitaire), soit être liée plus ou moins fortement aux particules (eau liée, eau adsorbée), soit entrer dans la structure des minéraux. Dans les sols non saturés, une partie de l'eau libre peut être temporairement immobilisée par les forces de tension superficielle dans les pores du sol. Les forces capillaires, liées à la tension superficielle, peuvent faire monter l'eau au-dessus du « toit de la nappe » (niveau où la pression de l'eau est égale à la pression atmosphérique). L'hydraulique des sols s'intéresse aux mouvements de l'eau libre à travers les pores du sol.

L'eau interstitielle est un liquide visqueux qui s'écoule dans les pores du sol en perdant de l'énergie. L'écoulement dépend aussi de la tortuosité du cheminement de l'eau dans les pores. L'influence de ces deux phénomènes est traduite par le coefficient de perméabilité k , défini ci-après.

Définitions et loi de Darcy

En hydraulique des sols, on utilise une représentation des mouvements de l'eau issue des travaux de Darcy : l'écoulement est décrit en moyenne et en faisant abstraction de la présence des particules solides. On définit :

- les lignes et tubes de courant,
- le débit q à travers dans un tube de courant, [unité : m^3/s]
- la vitesse (moyenne) à travers une section d'un tube de courant élémentaire, \bar{v} , [m/s]
- la vitesse moyenne vraie, égale à $\bar{v}' = \frac{\bar{v}}{n}$,
- la charge hydraulique $h = \frac{u}{\rho_w g} + z$ [m]

(on néglige l'énergie cinétique de l'eau car les vitesses d'écoulement sont toujours très faibles),

- le gradient hydraulique $\vec{i} = -\overline{grad} h$. [sans unité]

La loi (expérimentale) de Darcy relie la vitesse d'écoulement au gradient hydraulique :

$$\bar{v} = \bar{k} \cdot \vec{i}$$

Le tenseur des coefficients de perméabilité \bar{k} est en général diagonal dans un système d'axes liés aux directions d'anisotropie du site (souvent verticale et horizontales) :

$$\bar{k} = \begin{pmatrix} k_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz} \end{pmatrix}$$

Ordres de grandeur du coefficient de perméabilité des sols homogènes

k (m/s)	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}
Sol	Gravier		Sable			Limon			Argile

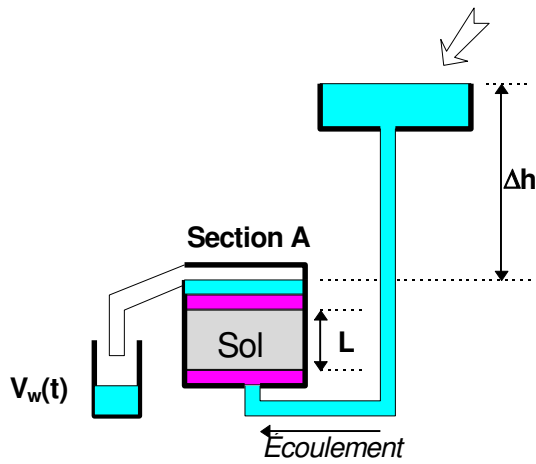
La mesure des coefficients de perméabilité en laboratoire s'effectue soit par un essai de perméabilité à charge constante, soit par un essai à charge variable :

- dans le premier cas, le coefficient de perméabilité vaut :

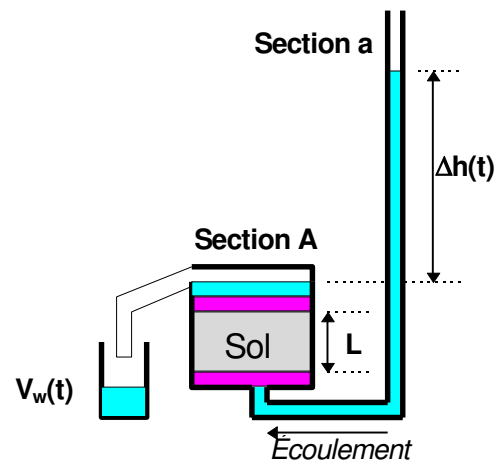
$$k = \frac{\text{débit}}{\text{gradient}} = \frac{V_w(t_2) - V_w(t_1)}{A(t_2 - t_1)} \cdot \frac{L}{\Delta h}$$

- dans le second cas, on le déduit de deux mesures de Δh aux temps t_0 et t_1 :

$$k = \frac{aL}{A} \cdot \frac{1}{t_1 - t_0} \ln \frac{\Delta h_0}{\Delta h_1} = 2,3 \frac{aL}{A} \cdot \frac{1}{t_1 - t_0} \lg \frac{\Delta h_0}{\Delta h_1} .$$



Essai de perméabilité à charge constante



Essai de perméabilité à la charge variable

Écoulements dans les sols saturés

L'écoulement de l'eau dans un sol saturé vérifie l'équation générale :

$$\text{div} \left[\vec{k} \text{ grad } h \right] = \frac{\partial n}{\partial t} ,$$

Cette équation devient dans les sols anisotropes :

$$k_{xx} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_{yy} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_{zz} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{\partial n}{\partial t} ,$$

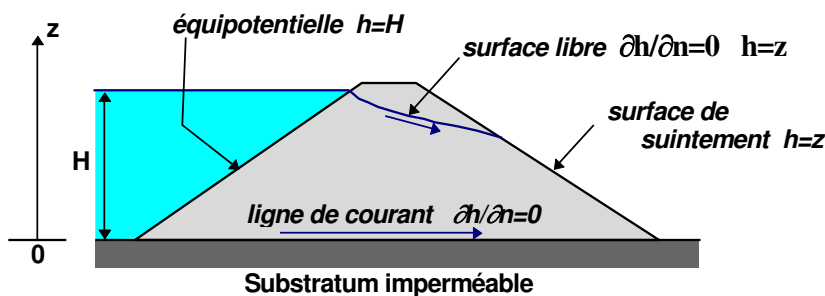
et, dans les sols isotropes :

$$k \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial n}{\partial t} .$$

Dans les écoulements permanents, la charge hydraulique vérifie l'équation, commune avec d'autres phénomènes physiques :

$$\Delta h = 0 .$$

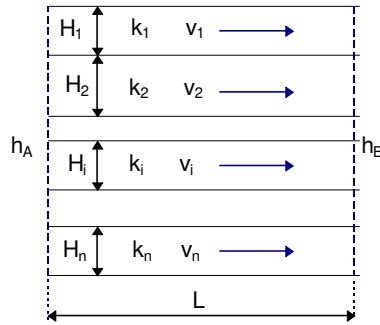
On peut imposer quatre types de conditions aux limites, comme sur l'exemple de barrage en terre suivant :



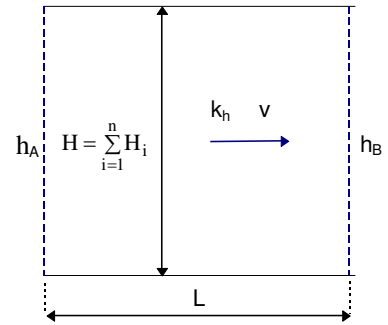
Dans un massif multicouche, les écoulements normal et parallèle aux couches peuvent être caractérisés par des coefficients de perméabilité équivalents :

Écoulement parallèle

$$k_h = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{H_i}{k_i}\right)} \sum_{i=1}^n k_i H_i = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^n k_i H_i$$



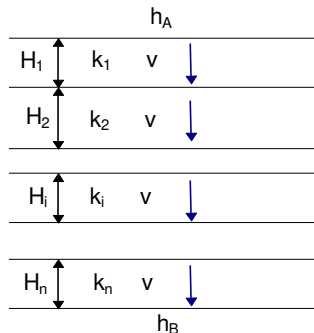
Massif multicouche



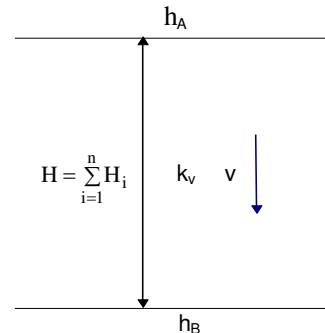
Massif homogène équivalent

Écoulement perpendiculaire

$$\frac{1}{k_v} = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^n \frac{H_i}{k_i}$$



Massif multicouche



Massif homogène équivalent

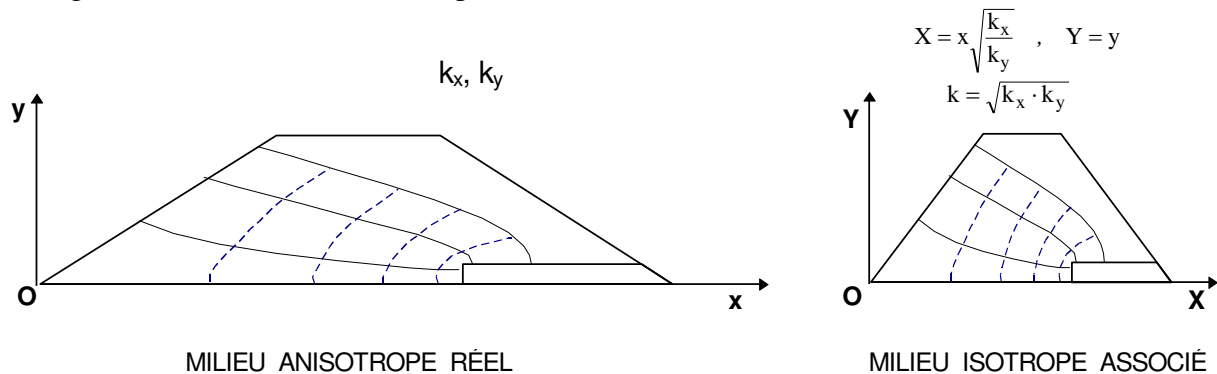
Dans les écoulements anisotropes plans, déterminés par l'équation différentielle

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

on peut se ramener au cas d'un écoulement dans un milieu isotrope en effectuant les transformations suivantes sur les coordonnées x et y et sur le coefficient de perméabilité :

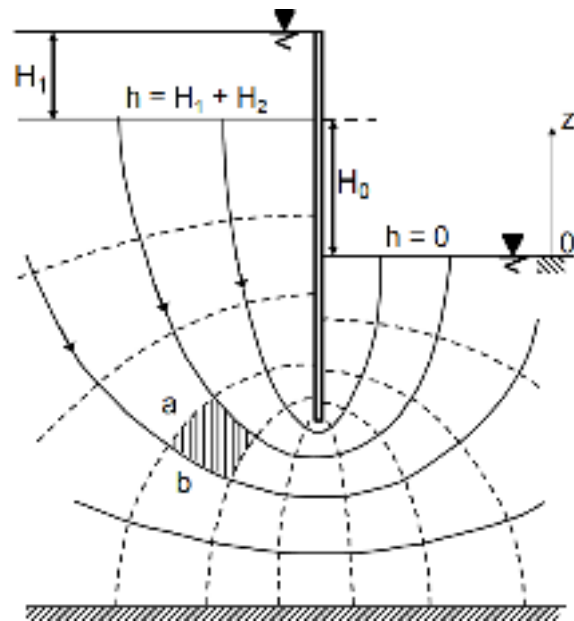
$$\begin{cases} X = x \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \\ Y = y \end{cases} \quad k = \sqrt{k_x \cdot k_y}$$

La figure suivante montre un exemple de cette transformation.



Le résultat de la résolution de l'équation différentielle de l'écoulement permanent dans un milieu isotrope $\Delta h = 0$ peut être représenté par un réseau d'écoulement, ensemble de lignes de courant et d'équipotentiels orthogonales dont un exemple est donné sur la figure suivante. Si le réseau est tracé de façon à ce que les lignes de courant soient régulièrement espacées (elles découpent l'espace en n_q tubes de courant de même débit) et les équipotentiels aussi (la perte de charge d'une équipotentielle à la suivante est égale à la perte de charge totale divisée par n_h), le débit total est donné par l'expression :

$$Q = k \frac{a}{b} \frac{n_q}{n_h} (H_0 + H_1) .$$



Le réseau d'écoulement permet aussi de déterminer les pressions interstitielles en tout point P de l'écoulement, soit en déterminant la valeur de la charge hydraulique au point considéré et en utilisant la formule :

$$u(P) = [h(P) - z(P)] \cdot \rho_w g ,$$

soit, dans le cas des écoulements à surface libre, en suivant l'équipotentielle passant par le point P jusqu'à la surface libre (point p) et en calculant la pression interstitielle u en multipliant la différence des altitudes des deux points par le poids volumique de l'eau.

Forces d'écoulement. Gradient critique

L'écoulement de l'eau dans le sol crée des forces d'écoulement, dirigées dans le sens du gradient hydraulique. Si l'écoulement s'oppose à la pesanteur, comme au pied d'un barrage ou d'un rideau imperméable, il peut éventuellement provoquer un soulèvement hydraulique du sol (phénomène de renard). L'analyse de ce phénomène peut se faire de deux façons :

- en termes de pressions interstitielles, que l'on compare aux contraintes totales sur la frontière du bloc de sol dont on veut tester l'équilibre,
- ou en superposant un champ de forces volumiques d'écoulement au champ de contraintes effectives calculées comme si le massif de sol avait une masse volumique égale à la masse volumique déjaugée du sol.

Le gradient critique, qui s'applique à un écoulement vertical dans un massif homogène de masse volumique ρ , est égal à :

$$i_c = \frac{\rho - \rho_w}{\rho_w} = \frac{\rho'}{\rho_w} .$$

4. CALCUL DES TASSEMENTS

1. Introduction

Les tassements sont dus aux déformations des pores des sols. Ils peuvent être instantanés ou différés (à cause de la viscosité du sol ou du phénomène de consolidation, dans les sols saturés). Ils sont en général non linéaires lorsque les charges augmentent jusqu'à la charge de rupture. Mais, dans les conditions courantes de fonctionnement des ouvrages, ils sont souvent linéaires, d'où l'emploi fréquent de la théorie de l'élasticité linéaire. Pour les sols saturés, on peut distinguer un comportement non drainé et un comportement drainé.

Les méthodes de calcul couramment utilisées se rattachent à quatre groupes :

- les méthodes utilisant la théorie de l'élasticité ;
- les méthodes indirectes séparant le calcul des variations de contraintes dans le massif de sol et le calcul des tassements qu'elles produisent ;
- les méthodes empiriques, fondées sur des corrélations ;
- les méthodes numériques, qui permettent d'utiliser des lois de comportement plus complexes.

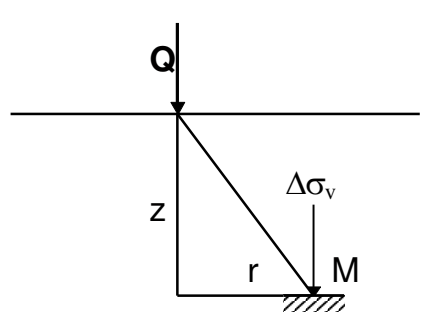
Dans la pratique actuelle, les méthodes numériques remplacent progressivement les méthodes classiques fondées sur des abaques ou des calculs manuels. C'est le cas par exemple des calculs utilisant la théorie de l'élasticité, qui se font facilement sur ordinateur par la méthode des éléments finis. Toutefois, les méthodes classiques conservent des avantages lorsque l'on veut traiter rapidement des comportements non linéaires, comme dans la méthode dite oedométrique. Enfin, les méthodes empiriques (pressiomètre, pénétromètre, etc.) sont souvent utilisées dans certains pays.

Nous allons limiter ces rappels à la méthode oedométrique, qui est très utilisée pour les charges appliquées à la surface du sol et qui comprend deux étapes : le calcul des variations de contraintes dans le massif de sol et le calcul des tassements d'après la courbe de compressibilité oedométrique.

2. Calcul des distributions de contraintes sous les charges superficielles

Les variations de contraintes dans le massif sont obtenues par intégration des équations de Boussinesq (effet en un point M d'une charge ponctuelle Q appliquée à la surface du massif).

La solution de Boussinesq a pour expression :



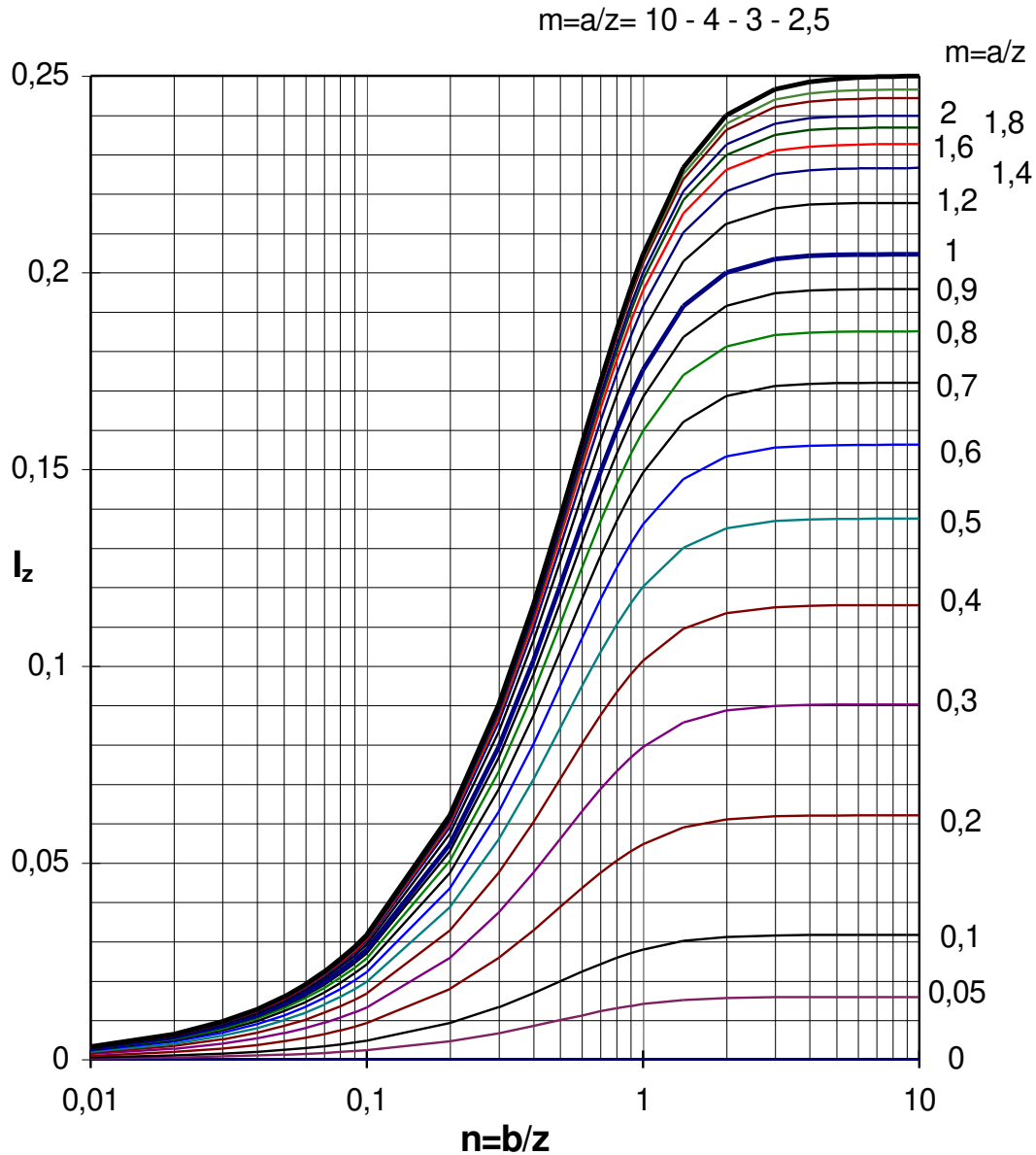
$$\Delta\sigma_v = \frac{3Q}{2\pi} \frac{z^3}{(r^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$\Delta\tau_{vh} = \frac{3Q}{2\pi} \frac{z^2 r}{(r^2 + z^2)^{5/2}}$$

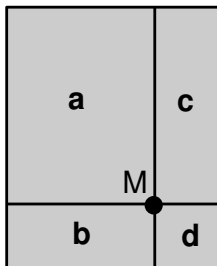
$$\Delta\sigma_h = \frac{Q}{2\pi} \left[\frac{3zr^2}{(r^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1 - 2\nu}{(r^2 + z^2)^{1/2} \left[(r^2 + z^2)^{1/2} + z \right]} \right]$$

La contrainte notée σ_h est la contrainte normale horizontale dans le plan défini par la force Q et le point M.

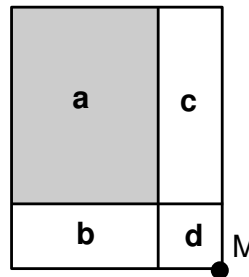
Les formules de Boussinesq ont été intégrées pour produire des abaques donnant les variations des contraintes verticales sous des charges uniformes rectangulaires, des charges en forme de remblai de section trapézoïdale, des charges uniformes de géométrie quelconque, etc. Quatre de ces abaques sont reproduits ci-après. Chaque abaque donne le coefficient d'influence I_z qui permet de déduire la variation de la contrainte verticale $\Delta\sigma_v$ en fonction de la pression appliquée en surface $\Delta\sigma$: $\Delta\sigma_v = I_z \Delta\sigma$.



On peut utiliser cet abaque pour trouver la contrainte en un point quelconque du massif en procédant par combinaison linéaire, comme indiqué ci-après.

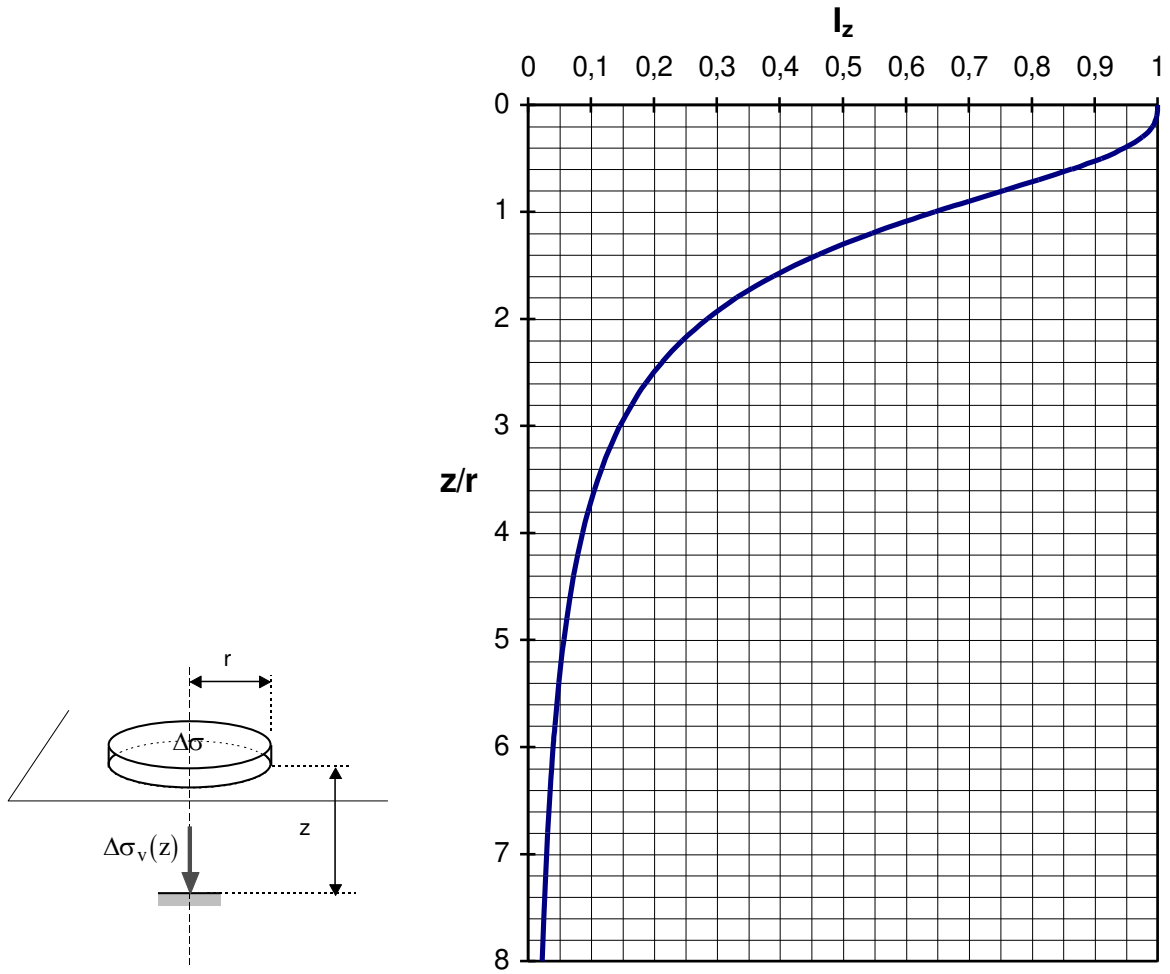


L'incrément de contrainte verticale est égal à la somme des incréments de contrainte verticale déduits de l'abaque sous les charges correspondant aux rectangles a, b, c et d.



Dans ce cas, l'influence de la zone chargée (grisée) est déduite de la combinaison linéaire
 $+[a+b+c+d]$
 $-[b+d] - [c+d]$
 $+[d]$

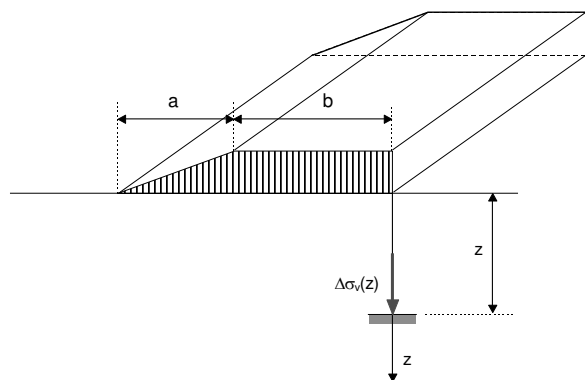
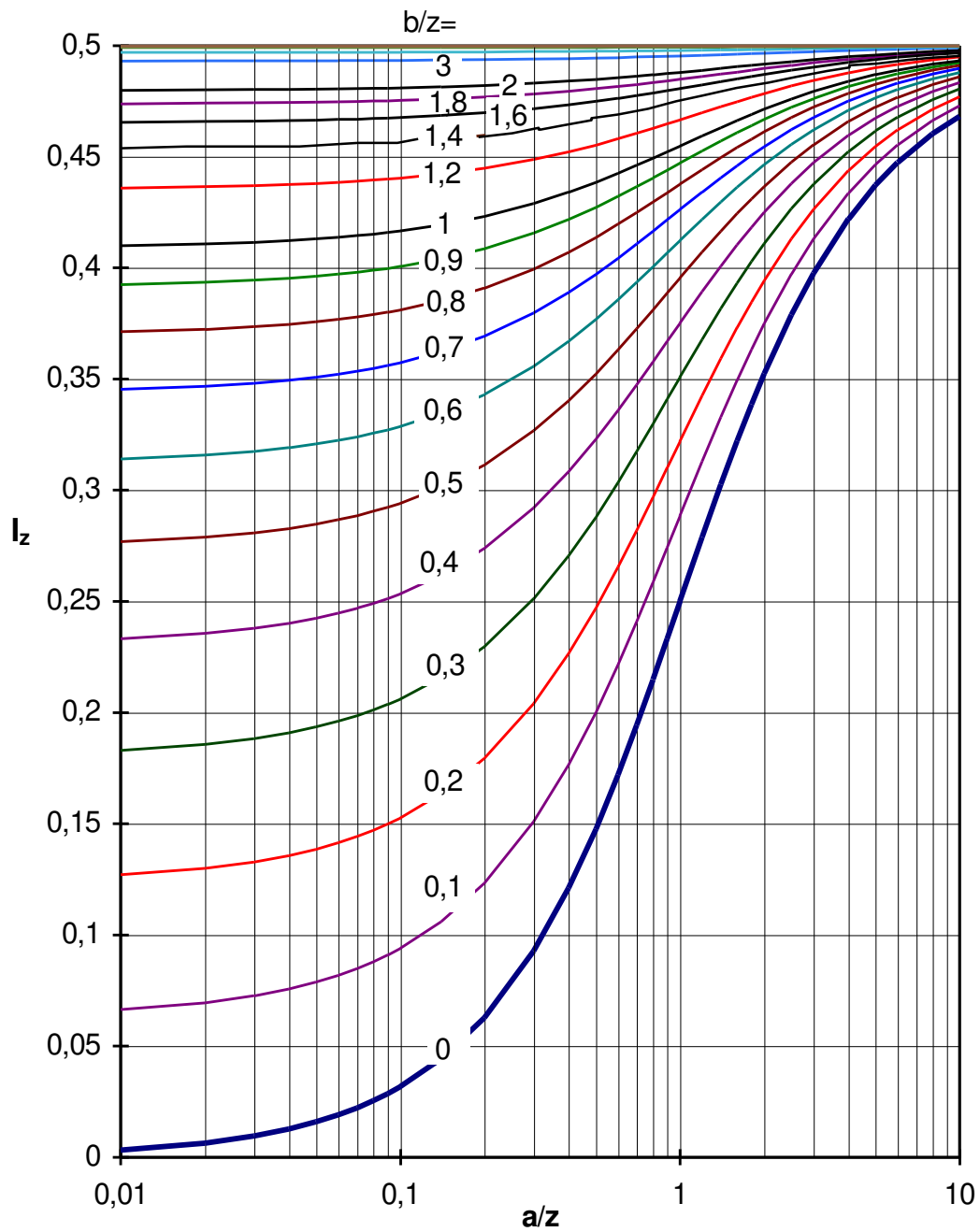
Abaque de calcul de $\Delta\sigma_v$ sous le coin d'une charge rectangulaire uniforme



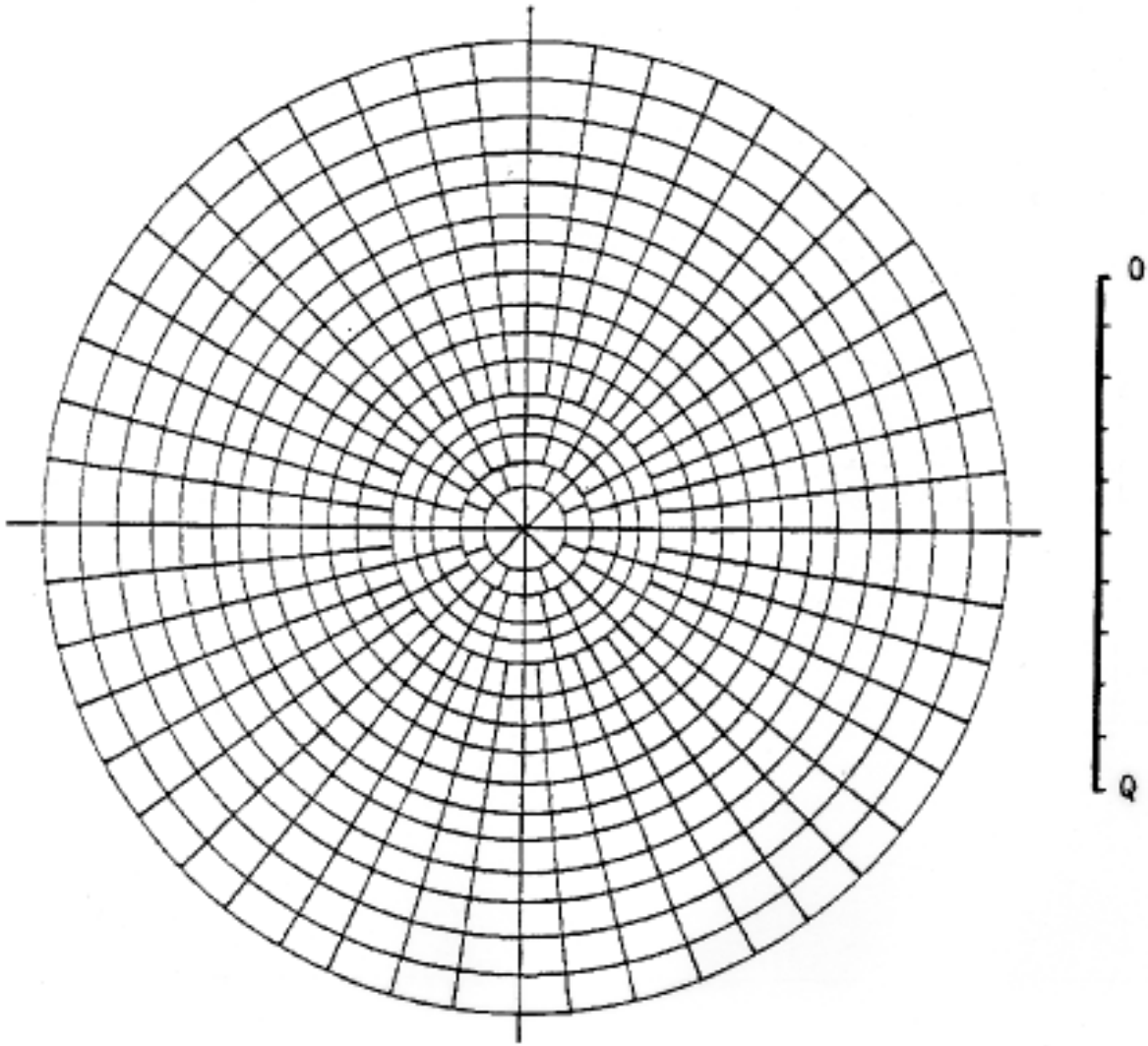
a. Schéma géométrique

b. Abaque de calcul

Abaque de calcul de $\Delta\sigma_v$ sous l'axe d'une charge circulaire uniforme



Abaque de calcul de $\Delta\sigma_v$ sous une charge trapézoïdale infinie dans la troisième direction (Abaque d'Osterberg)



L'abaque est divisé en rectangles curvilignes correspondant chacun à un millième de la charge. OQ représente la profondeur z à laquelle on veut calculer l'incrément de contrainte verticale $\Delta\sigma_v$. La surface chargée doit être dessinée à l'échelle correspondant à $OQ=z$ en plaçant le point sous lequel on veut calculer la contrainte sur le centre des cercles. L'incrément de la contrainte verticale est alors égal à :

$$\Delta\sigma_v = 0,001. n. q \quad ,$$

avec

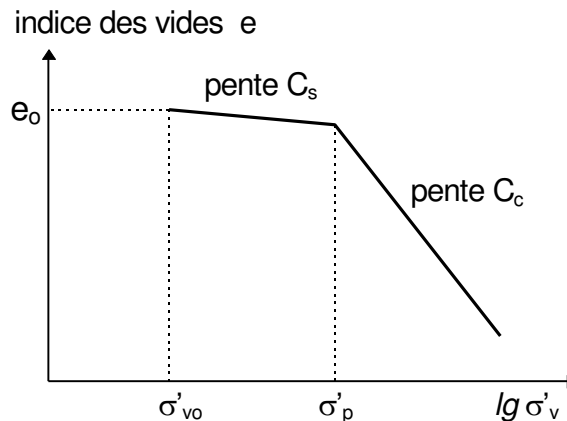
q : contrainte verticale en surface, uniformément répartie sur la semelle chargée,
 n : nombre de carreaux recouverts par l'image de la surface chargée.

Abaque de calcul de $\Delta\sigma_v$ sous une charge de surface quelconque (Abaque de Newmark)

3. Courbe de compressibilité œdométrique

Pour les sols argileux, qui sont les plus compressibles en général, la relation entre la contrainte effective verticale et l'indice des vides que l'on obtient dans les essais œdométriques est bilinéaire en coordonnées semi-logarithmiques. Cette courbe de compressibilité œdométrique permet de définir les trois paramètres qui permettent de calculer les amplitudes de tassement dans la méthode œdométrique :

- l'indice de compression C_c ,
- l'indice de gonflement (ou recompression) C_s ,
- la pression de préconsolidation σ'_p .



Courbe de compressibilité œdométrique

La pression de préconsolidation σ'_p est la plus grande contrainte effective verticale appliquée au sol au cours de son histoire. Le sol est dit surconsolidé si $\sigma'_p > \sigma'_{vo}$ et normalement consolidé lorsque $\sigma'_p = \sigma'_{vo}$.

Connaissant la contrainte effective verticale initiale σ'_{vo} et l'indice des vides initial correspondant e_o , on calcule la variation de l'indice des vides par l'une des formules :

$$e = e_o - C_s \lg \frac{\sigma'_{vf}}{\sigma'_{vo}},$$

$$e = e_o - C_c \lg \frac{\sigma'_{vf}}{\sigma'_{vo}},$$

$$e = e_o - C_s \lg \frac{\sigma'_p}{\sigma'_{vo}} - C_c \lg \frac{\sigma'_{vf}}{\sigma'_{po}},$$

suivant la position de σ'_{vo} et σ'_{vf} par rapport à σ'_p .

4. Calcul des tassements par la méthode œdométrique

Le calcul des tassements d'un point de la surface du sol s'opère en deux étapes :

- détermination de la variation avec la profondeur des contraintes effectives verticales sous le point considéré ;
- calcul du tassement de surface par intégration des tassements élémentaires donnés par la formule œdométrique :

$$s = \int_{\text{couche}} \varepsilon_v dz = \int_{\text{couche}} \frac{\Delta e}{1 + e_o} dz .$$

Dans le cas (courant) où l'on considère le massif de sol comme un empilement de couches homogènes, on fait le calcul des contraintes verticales au milieu de chaque couche et on utilise la formule suivante pour le calcul du tassement de la couche, d'épaisseur initiale H_0 :

$$s = \Delta H = \frac{\Delta e}{1 + e_0} H_0 = \frac{H_0}{1 + e_0} \left[C_s \lg \frac{\sigma'_p}{\sigma'_{v0}} + C_c \lg \frac{\sigma'_{vf}}{\sigma'_p} \right].$$

Pour certains ouvrages construits sur sol argileux, on ajoute au tassement œdométrique un tassement à long terme, dit de fluage.

5. CONSOLIDATION

Le phénomène de consolidation des sols fins saturés traduit l'interaction de la compressibilité et de la perméabilité du sol : le tassement est produit par la diminution du volume des pores, et il faut un certain temps pour permettre l'écoulement du volume d'eau correspondant.

La *théorie de la consolidation unidimensionnelle*, publiée en 1925 par K. Terzaghi, décrit cette interaction de façon approchée mais suffisante pour la plupart des études d'ouvrages. Elle linéarise le comportement du sol et admet que la perméabilité est constante. Dans ces conditions, on peut écrire l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

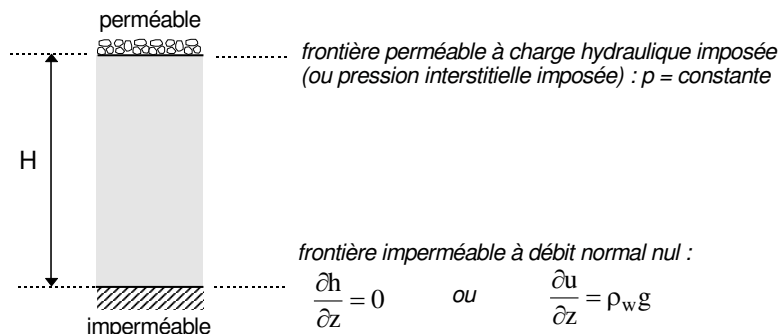
qui dépend du paramètre c_v , appelé « coefficient de consolidation » et égal à :

$$c_v = \frac{k(1 + e_0)}{\rho_w g a_v} = \frac{k E_{\text{oed}}}{\rho_w g},$$

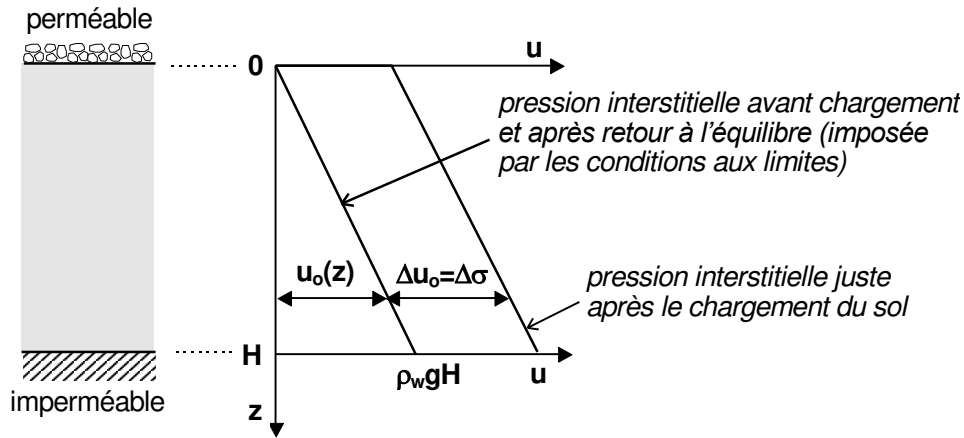
avec

- e_0 - indice des vides initial,
- k - coefficient de perméabilité,
- u - pression interstitielle,
- ρ_w - masse volumique de l'eau,
- a_v - coefficient de compressibilité du sol,
- E_{oed} - module œdométrique,
- z - profondeur dans la couche de sol,
- t - temps.

Cette équation différentielle a été résolue sous forme adimensionnelle avec les conditions aux limites suivantes :



et pour condition initiale une variation instantanée uniforme de la pression interstitielle, égale à u_0 :



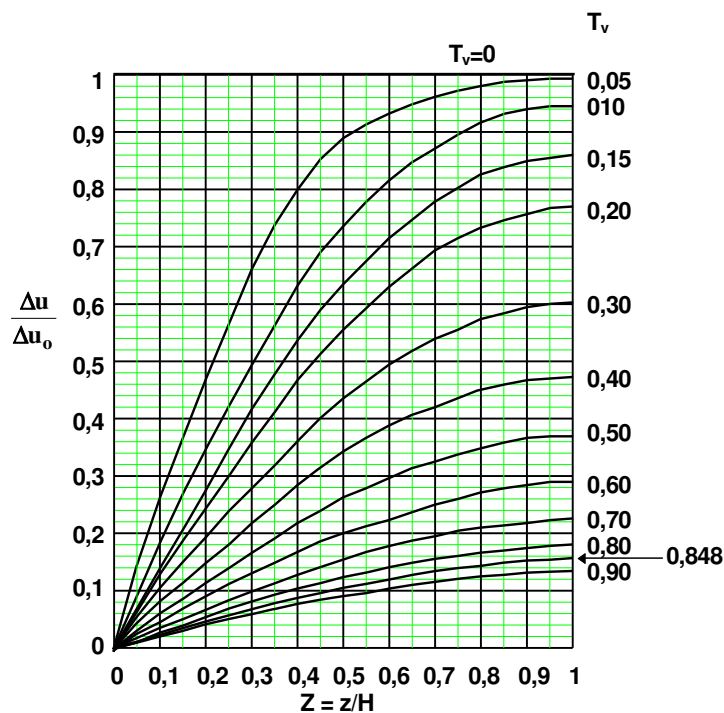
La résolution est conduite sous forme adimensionnelle en introduisant les variables annexes :

$$\begin{cases} T_v = \frac{c_v t}{H^2} & \text{facteur - temps} \\ Z = \frac{z}{H} & \text{coordonnée réduite} \end{cases}$$

L'évolution de la surpression interstitielle (par rapport à l'état d'équilibre) est donnée par l'équation :

$$\Delta u(Z, T_v) = \frac{4\Delta u_o}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \sin\left(\frac{2m+1}{2} \pi Z\right) \exp\left[-(2m+1)^2 \pi^2 \frac{T_v}{4}\right],$$

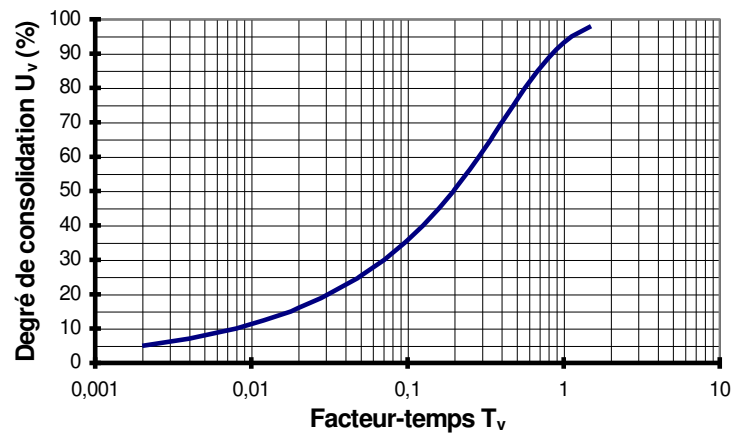
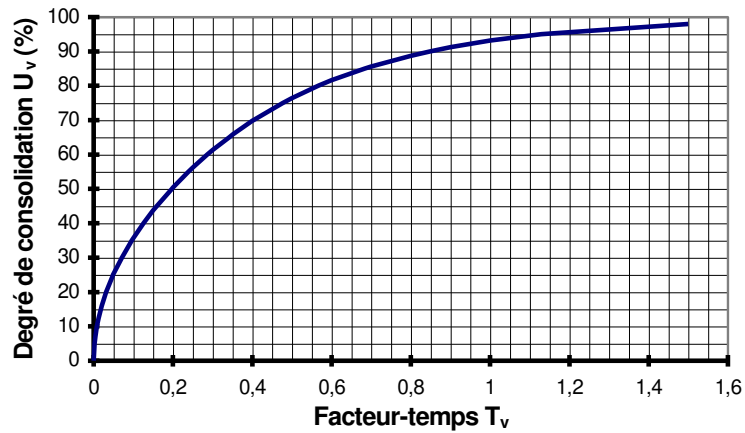
qui correspond aux isochrones successives représentées sur la figure suivante.



La variation moyenne de la surpression interstitielle est décrite par le degré de consolidation U_v , défini comme

$$U_v(T_v) = 1 - \frac{\int_0^1 \Delta u(Z, T_v) dZ}{\int_0^1 \Delta u_o dZ}$$

Le degré de consolidation U_v est représenté en fonction du facteur-temps T_v sur la figure suivante et dans les tableaux correspondants.



T_v	U_v (%)
0	0
0,004	7,1
0,008	10,1
0,012	12,4
0,020	16,0
0,028	18,9
0,048	24,7
0,072	30,3
0,100	35,7
0,150	43,7
0,200	50,4
0,250	56,2
0,300	61,3
0,350	65,8
0,400	69,8
0,500	76,4
0,600	81,6
0,700	85,6
0,800	88,7
0,900	91,2
1,000	93,2
1,500	98,0

U_v (%)	T_v
0	0
5	0,002
10	0,008
15	0,018
20	0,031
25	0,049
30	0,071
35	0,096
40	0,126
45	0,159
50	0,197
55	0,239
60	0,286
65	0,342
70	0,403
75	0,477
80	0,567
85	0,684
90	0,848
95	1,129
100	∞

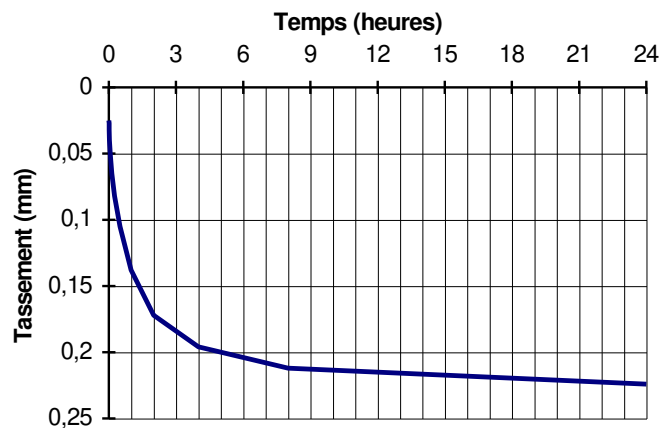
Du fait de la linéarité de la relation entre la déformation et la variation des contraintes effectives, le degré de consolidation est aussi égal au rapport du tassement au temps t au tassement final, calculé comme indiqué ci-dessus :

$$U_v = \frac{s(t)}{s_\infty} .$$

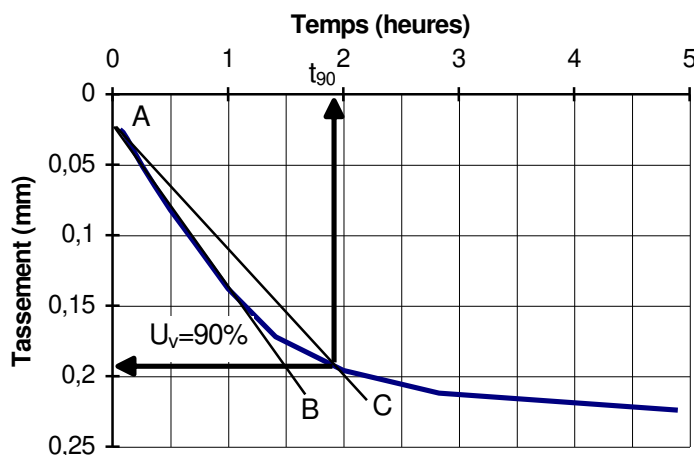
On peut démontrer que la forme générale de la théorie de la consolidation unidimensionnelle reste la même si la relation entre la déformation et la contrainte effective est semi-logarithmique. Dans ce cas, le rapport du tassement au temps t au tassement final est toujours donné par la même expression du degré de consolidation, appelé degré de tassement. Mais la variation des surpressions interstitielles est différente.

Coefficient de consolidation

Le coefficient de consolidation peut être déduit des paramètres de compressibilité et de perméabilité du sol. Il peut aussi être déterminé en utilisant les paliers de chargement de l'essai oedométrique. Les courbes correspondantes, appelées courbes de consolidation (sous charge constante), ont l'allure suivante :



Elles sont analysées par référence à la théorie de la consolidation unidimensionnelle, soit en fonction du logarithme du temps (méthode de Casagrande), soit en fonction de la racine carrée du temps (méthode de Taylor). Ces méthodes sont décrites sur les figures suivantes.



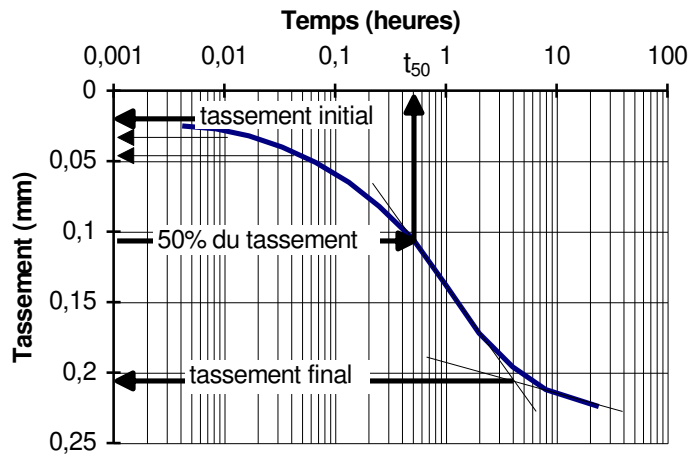
Ordre des opérations

- 1. Tracer la droite AB, linéarisant au mieux les deux premiers tiers de la courbe.
- 2. Tracer la droite AC, dont la pente est égale à celle de AB divisée par 1,15.
- 3. Le point d'intersection de AC avec la courbe définit t_{90} .
- 4. Calculer c_v par la formule :

$$c_v = \frac{T_{90} d^2}{t_{90}} = \frac{0,848 \cdot d^2}{t_{90}}$$

(d est la distance de drainage de l'éprouvette)

Méthode de Taylor ou de la racine carrée du temps



Ordre des opérations

- 1. Déterminer le tassement initial en utilisant l'approximation en \sqrt{t} : le tassement est égal entre $t=0$, $t=t_1$ et $t=4t_1$ (ici, $t_1 = 0,01$ heure)
- 2. Déterminer le tassement final de consolidation primaire par intersection de la partie finale linéarisée et de la tangente à la courbe au point d'inflexion.
- 3. Déterminer le temps t_{50} correspondant à la moitié du tassement
- 4. Calculer c_v par la formule :

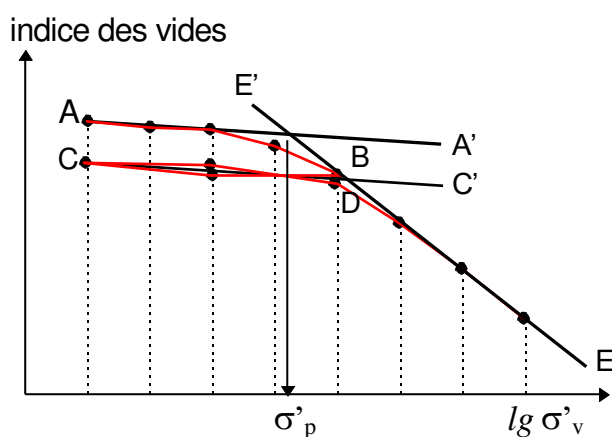
$$c_v = \frac{T_{50}d^2}{t_{50}} = \frac{0,197 \cdot d^2}{t_{50}}$$

(d est la distance de drainage de l'éprouvette)

Méthode de Casagrande ou du logarithme du temps

Courbes de compressibilité œdométrique

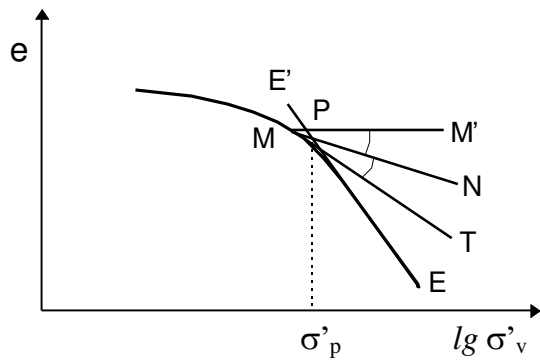
Les paramètres de compressibilité utilisés pour le calcul du tassement sont issus de la courbe de compressibilité œdométrique, qui représente en fonction de la pression appliquée le tassement observé à la fin de chaque palier de chargement (au bout de 24 heures). Les points expérimentaux sont utilisés pour tracer une courbe de compressibilité et déterminer la pression de préconsolidation. Diverses méthodes peuvent être utilisées, notamment la méthode classique de Casagrande, qui utilise la courbure de la courbe tracée par les points issus des essais et la méthode LPC, qui s'appuie sur une boucle de chargement-déchargement en cours d'essai.



Ordre des opérations

- 0. La courbe est décrite dans l'ordre ABCDE.
- 1. Tracer la droite CC' (pente moyenne du cycle de déchargement-rechargement).
- 2. Tracer par le point A la droite AA' , parallèle à CC' .
- 3. Linéariser la partie finale de la courbe expérimentale (droite EE').
- 4. Le point P, intersection de AA' et EE' , définit la pression de préconsolidation σ'_p .
- 3. La courbe œdométrique idéalisée est APE. C_s est la pente de AP. C_c est la pente de PE.

Courbe de compressibilité œdométrique et pression de préconsolidation (Méthode des laboratoires des Ponts et Chaussées)



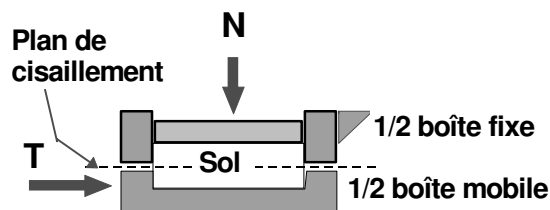
Ordre des opérations

- 1. Déterminer le point M de la courbe où la courbure est maximale.
- 2. Tracer par le point M la tangente MT à la courbe et la droite horizontale MM'.
- 3. Tracer la bissectrice MN de l'angle des droites MM' et MT.
- 4. Linéariser la fin de la courbe (droite EE')
- 5. Le point P, intersection de MN et EE' définit la pression de préconsolidation.

Détermination de la pression de préconsolidation σ'_p par la méthode de Casagrande.

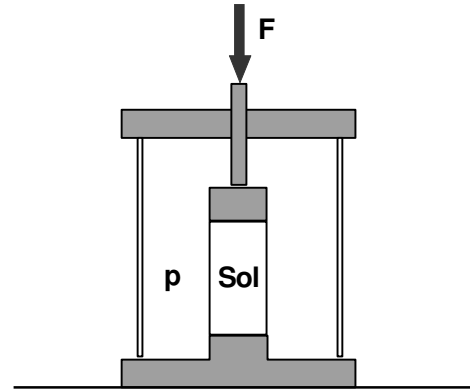
6. RÉSISTANCE AU CISAILLEMENT

La résistance des sols est déterminée en laboratoire dans deux types d'essais : essais de cisaillement direct à la boîte et essais triaxiaux. Les principes de ces essais sont indiqués sur les figures suivantes :



a. Boîte de cisaillement direct

La pression normale sur la surface de rupture est appliquée par l'intermédiaire du piston. La boîte inférieure est mise en mouvement et on mesure T.



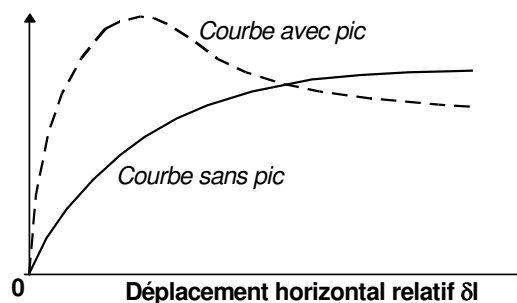
b. Appareil triaxial (axisymétrique)

La pression horizontale est appliquée par un fluide. La force F est créée par le déplacement du piston à vitesse imposée.

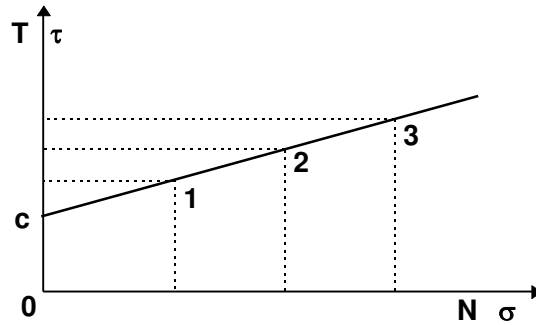
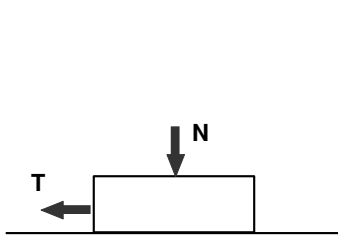
Essais de cisaillement direct

Lors de l'essai, la force de cisaillement T varie avec le déplacement relatif des deux parties de l'éprouvette et passe par un maximum ou tend vers une asymptote. La rupture correspond au maximum de la force appliquée (pic ou asymptote). On connaît alors la force normale N et la force tangentielle T, qu'on divise par la section de l'éprouvette pour obtenir les contraintes moyennes normale et tangentielle. Ces contraintes sont reportées sur un diagramme (σ , τ). Les points obtenus dans plusieurs essais sont rassemblés pour définir une droite de rupture, qui représente la valeur maximale de la contrainte tangentielle que peut supporter le sol pour une contrainte normale donnée.

Contrainte de cisaillement τ



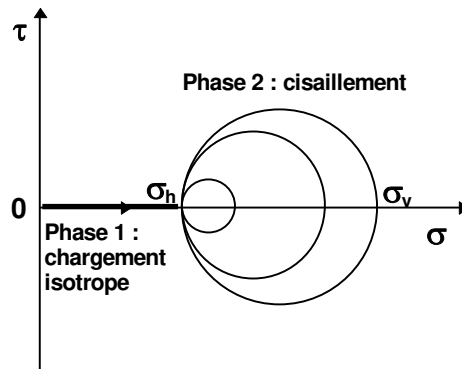
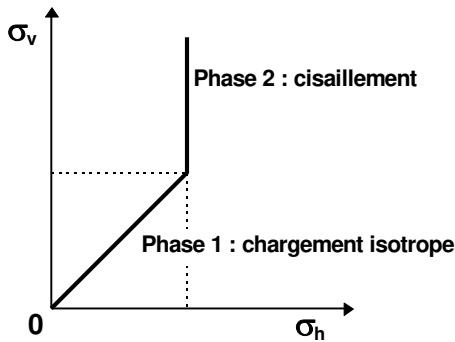
Courbe de cisaillement du sol à la boîte de cisaillement direct



Critère de frottement de Coulomb

Essais triaxiaux

Dans les essais triaxiaux, on connaît les contraintes principales verticale et horizontale dans l'éprouvette. Ces contraintes définissent les extrémités du cercle de Mohr des contraintes totales dans l'éprouvette (figure suivante). L'essai comporte une phase préliminaire dite de consolidation (chargement généralement isotrope) et une phase de cisaillement.

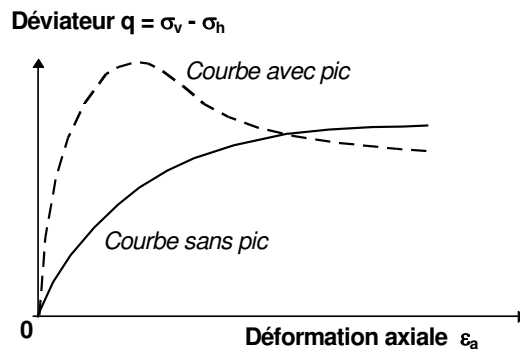


a. Pressions appliquées

b. Cercles de Mohr

Pressions appliquées à l'éprouvette et évolution des cercles de Mohr dans un essai de compression triaxiale (chargement initial isotrope)

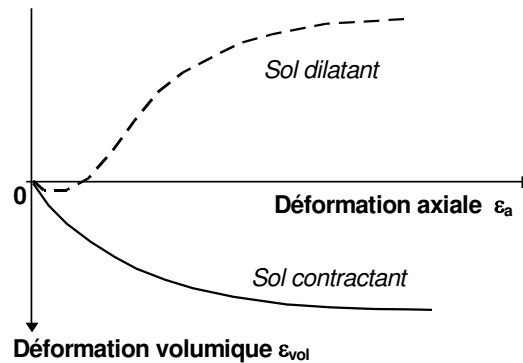
Lors de la phase de cisaillement, la contrainte (principale) verticale évolue au fur et à mesure de la déformation, comme indiqué sur la figure suivante. La rupture est, comme pour l'essai de cisaillement direct, définie en fonction de la forme de la courbe : pic ou asymptote. Pour l'état de rupture, on connaît la pression horizontale sur l'éprouvette et la pression verticale. Dans les essais sur sols saturés, si l'on connaît la pression interstitielle on peut calculer les contraintes effectives dans l'éprouvette et tracer le cercle de Mohr en contraintes effectives.



Courbe de cisaillement du sol dans l'essai triaxial

La détermination du critère de rupture (ou enveloppe de rupture ou droite de Mohr-Coulomb) dépend des conditions d'exécution de l'essai et du type de sol.

La mesure des déformations verticales et horizontales dans les essais triaxiaux permet de suivre les déformations volumiques des éprouvettes en cours d'essai. On distingue deux types de comportements, appelés dilatance et contractance, qui expliquent certaines particularités du comportement des massifs de sols dans le fonctionnement des ouvrages et lors des séismes.

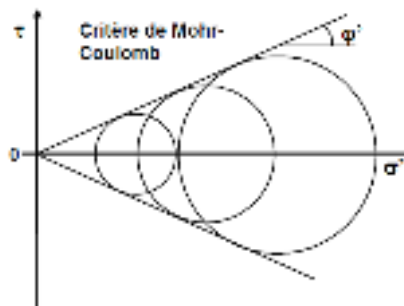


Dilatance et contractance des sols

Résistance au cisaillement des sables

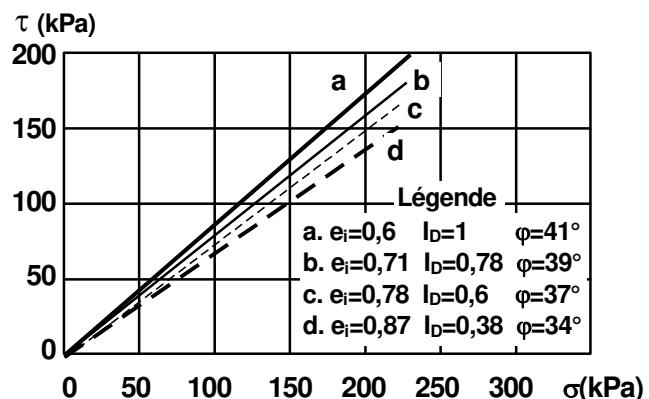
La résistance au cisaillement des sables se détermine généralement dans des essais drainés, où la pression interstitielle reste nulle pendant tout l'essai, de sorte que les contraintes effectives sont égales aux contraintes totales imposées à l'éprouvette. Dans ce cas, les cercles de Mohr des essais triaxiaux sont tangents à une droite peu différente de celle trouvée dans les essais de cisaillement à la boîte. Cette droite passe en général par l'origine du repère (σ, τ). La résistance limite des sables est donc caractérisée par l'angle de frottement interne φ', qui est l'angle de la droite de rupture (courbe intrinsèque, critère de rupture, droite de Mohr-Coulomb) avec l'axe des contraintes normales σ.

$$\tau = \sigma' \tan \varphi'$$



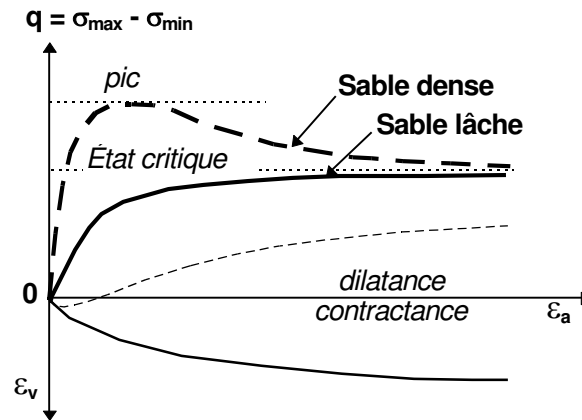
Cercles de Mohr et courbe intrinsèque

L'angle de frottement interne des sables dépend de leur densité, caractérisée par l'indice de densité I_D., comme on le voit sur la figure suivante.



Droites de Mohr-Coulomb d'un sable

Enfin, les phénomènes de dilatance et de contractance d'un sable dépendent directement de sa densité. L'état caractéristique (état critique) est l'état de densité intermédiaire entre ces deux comportements.



Résistance au cisaillement des sols fins

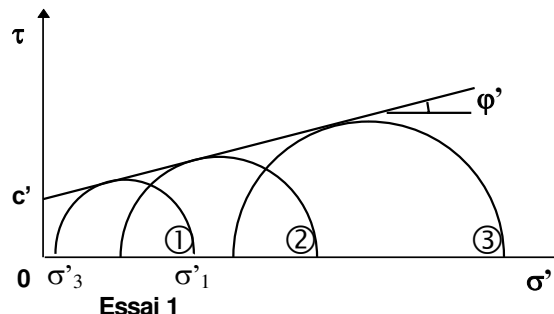
Le comportement des sols fins saturés est régi par les contraintes effectives (principe des contraintes effectives). Les essais triaxiaux peuvent être interprétés en termes de contraintes effectives s'ils sont réalisés à drainage ouvert (et très lentement) pour que les surpressions interstitielles restent en permanence très faibles (essais dits « drainés ») ou à drainage fermé (et plus vite) à condition de mesurer les pressions interstitielles (essais dits « non drainés avec mesure de la pression interstitielle »). La phase initiale de l'essai permet d'amener l'éprouvette dans un état de contrainte effective prédéfini et d'obtenir des cercles de Mohr différents à partir d'un même prélèvement dans le terrain. Dans le cas général, les cercles de Mohr des sols fins sont tangents à une droite ne passant pas par l'origine, d'équation :

$$\tau = c' + \sigma' \tan \varphi'$$

ou

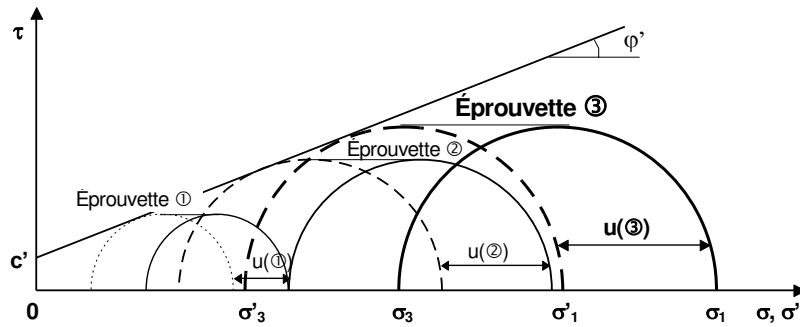
$$\sigma'_1 = 2c' \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}\right) + \sigma'_3 \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}\right).$$

Cette droite (figure suivante) dépend de deux paramètres, appelés *cohésion effective* c' et *angle de frottement interne* φ' , comme pour le sable.



*Critère de Mohr-Coulomb
(sols fins)*

Quand on passe par la mesure de la pression interstitielle pour déterminer les contraintes effectives dans l'essai triaxial (essais consolidés non drainés avec mesure de la pression interstitielle « CU+u »), on trace d'abord des cercles de Mohr en contraintes totales puis on les décale parallèlement à l'axe des contraintes normales de la valeur de la pression interstitielle mesurée lors de la rupture, comme indiqué sur la figure suivante..



Les argiles normalement consolidées ont une cohésion effective c' très faible (négligeable). Pour les sols surconsolidés, la cohésion effective est habituellement différente de zéro. Ces deux comportements traduisent l'effet de la surconsolidation de l'argile.

Comportement non drainé des sols fins

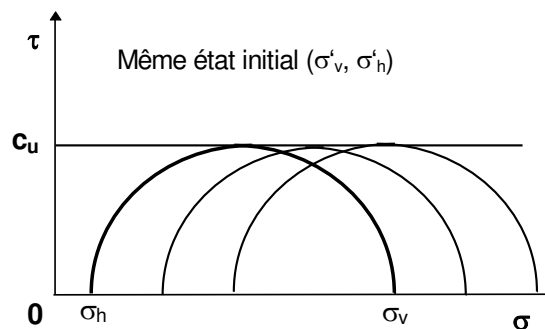
Lors du chargement ou du déchargement des massifs de sols fins, il ne peut se produire de déformations volumiques instantanées car l'eau ne se déplace pas assez rapidement dans le sol. Il existe donc une période initiale au cours de laquelle le sol se comporte comme un matériau monophasé à volume constant. Dans ces conditions, la résistance au cisaillement des sols fins obéit à des lois particulières, qui sont un cas particulier de la résistance au cisaillement en contraintes effectives décrite plus haut.

Les essais triaxiaux non drainés réalisés à partir du même état initial de contraintes effectives du sol fournissent des cercles de Mohr en contraintes totales qui ont tous le même diamètre et se déduisent d'un cercle de Mohr unique en contraintes effectives (figures suivantes). Cette observation conduit à définir un paramètre de résistance au cisaillement en conditions non drainées, appelé « *cohésion non drainée* » et noté c_u : la résistance au cisaillement non drainée vaut donc

$$\tau = c_u$$

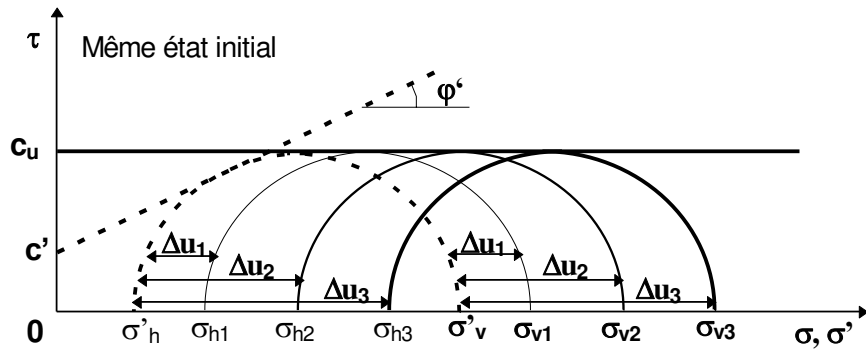
et ne dépend pas de la valeur de la contrainte totale normale σ .

Par contre, la cohésion non drainée dépend de l'état initial du sol, c'est à dire, dans les essais triaxiaux, de la valeur de la contrainte effective sous laquelle on a consolidé le sol pendant la phase initiale de l'essai.



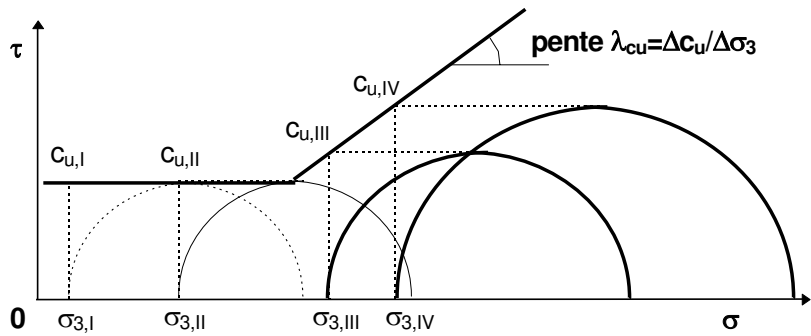
Cercles de Mohr en contraintes totales (essais non drainés)

Contraintes totales et contraintes effectives



La relation entre la contrainte effective initiale (égale à la contrainte totale appliquée dans la cellule triaxiale) et la cohésion non drainée a l’allure représentée sur la figure suivante :

Relation entre la contrainte de consolidation σ_3 et la cohésion non drainée c_u



La cohésion non drainée initiale est déterminée par les contraintes subies par le sol au cours de son histoire :

$$c_u = c_u(\sigma'_{3,\text{antérieur}}) + \lambda_{cu} [\sigma'_{3,\text{nouveau}} - \sigma'_{3,\text{antérieur}}] .$$

Sur le terrain, cette histoire du sol s’inscrit dans la pression de préconsolidation, qui sera utilisée aussi pour définir le seuil au-delà duquel la cohésion non drainée commencera à augmenter avec les contraintes effectives.

7. POUSSÉE ET BUTÉE

Les mots « poussée » et « butée » recouvrent des notions souvent appelées « pression active » et « pression passive » des sols dans d'autres langues. Il y a poussée du sol sur l'écran (mur, rideau, etc.) si le sol s'appuie sur un écran qui peut se déplacer (Figure 7.1.a). Il y a butée du sol contre l'écran si l'écran se déplace vers le sol et cherche à le repousser (Figure 7.1.b) mais aussi quand le sol se déplace vers un écran fixe (par exemple dans une pente instable, vers un mur de soutènement). La différence entre poussée et butée trouve donc son origine dans le sens de variation du volume du sol, qui est comprimé dans la butée et alors qu'il peut augmenter dans la poussée.

Cette définition très générale met l'accent sur l'importance fondamentale du sens des déformations et des déplacements relatifs pour l'analyse des mécanismes de poussée et de butée dans les sols. Avant d'entreprendre le calcul des efforts exercés sur un mur ou un rideau, il faut donc réfléchir à la cinématique du fonctionnement des sols et des structures.

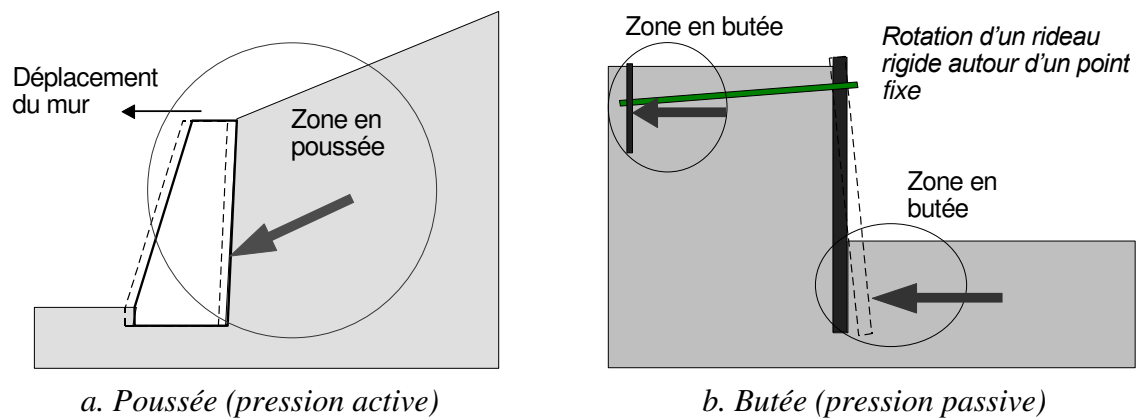


Figure 7.1 Poussée et butée des sols : définition générale

Définition des états limites de poussée et de butée

a. Relation entre les déplacements de l'écran et la force de contact

Toutes les études expérimentales ont montré que la force appliquée par le sol à l'écran et le déplacement de l'écran sont liés par une relation de la forme indiquée sur la figure 7.2.

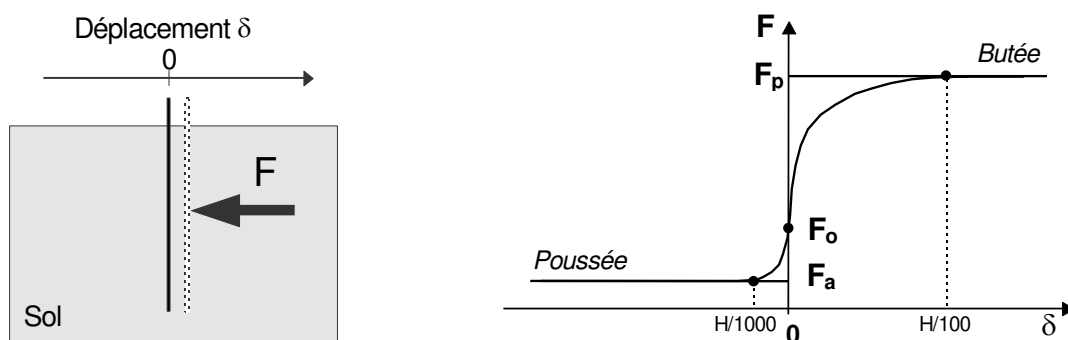


Figure 7.2 Relation entre le déplacement de l'écran et la force appliquée par le sol

La force de contact initiale est égale à F_0 . Elle peut parfois correspondre exactement à la pression des terres au repos (définie par le coefficient K_0 introduit au chapitre 2), mais elle peut aussi en différer si l'état du massif de sol a été perturbé par la mise en place de l'écran (ce qui est généralement le cas). Si l'écran se déplace en direction du sol, la force de contact augmente progressivement puis se stabilise au bout d'un déplacement de l'ordre du centième de la hauteur de l'écran. Si l'écran se déplace dans le sens opposé (valeurs négatives de δ), la pression de contact diminue progressivement, mais tend assez rapidement vers une asymptote.

b. Définitions

On appelle

force de poussée la valeur asymptotique de F quand l'écran s'éloigne du sol ;
force de butée la valeur asymptotique de F quand l'écran s'enfonce dans le sol.

Les calculs de poussée et de butée que nous allons développer dans la section suivante se préoccupent des valeurs maximale (butée) et minimale (poussée) de l'effort de contact entre le sol et l'écran. Toutefois, les déformations qui précèdent l'état de rupture présentent aussi un grand intérêt : en particulier, elles existent dans la configuration retenue finalement pour l'ouvrage (qui n'est pas une configuration de rupture !) et elles peuvent être prises en compte dans le calcul de la structure de l'ouvrage. Mais elles ne font pas partie de ce que l'on considère couramment comme l'état limite de poussée ou de butée.

Calcul des efforts limites de poussée et de butée

a. Méthode du coin de Coulomb

La méthode décrite par Coulomb dans son mémoire de 1776 s'appuie sur l'expression de la résistance du sol en termes de critère de glissement local. La condition de stabilité s'écrit (Chapitre 5) :

$$\tau \leq \tau_{mzx} = c + \sigma \tan \varphi .$$

Coulomb admet que la rupture se produit sur une surface de glissement critique (courbe dans le cas général) et que cette surface peut être choisie :

- en minimisant le frottement qu'elle permet de mobiliser ou, ce qui est équivalent, en maximisant la force exercée sur l'écran par la masse en mouvement (la force supportée par l'écran est la différence entre la résultante des forces appliquées au sol, y compris la pesanteur, et la résultante des forces de frottement) lorsque l'écran s'éloigne du sol (poussée) ;
- en maximisant ce frottement lorsque l'écran se déplace vers le sol (butée).

Coulomb a développé l'analyse dans le cas d'une surface de glissement plane (d'où le nom de « coin de Coulomb »), mais la même analyse peut être appliquée à une surface de glissement quelconque (spirale logarithmique, cercle, ...).

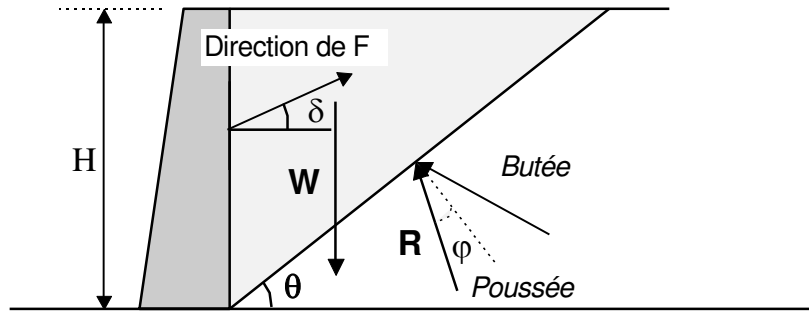
Les hypothèses de calcul, dans le cas simple d'un massif homogène retenu par un écran vertical de hauteur H , sont rassemblées sur la figure 7.3. Si l'on admet que le sol a un poids volumique γ et qu'il frotte sur l'écran avec un angle connu δ (la résultante F des efforts sur l'écran est inclinée de δ par rapport à la normale à l'écran. Coulomb avait traité le cas où $\delta=0$), l'équilibre des forces de pesanteur et de frottement sur une surface de glissement inclinée de θ sur l'horizontale conduit à l'expression suivante de F :

- pour la poussée (le coin descend le long de la surface de glissement et la résistance au glissement s'oppose au mouvement)

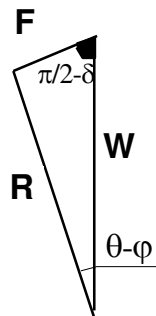
$$F = W \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\delta + \varphi - \theta)} = \frac{\gamma H^2}{2} \cot \theta \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\delta + \varphi - \theta)} .$$

- pour la butée (le coin remonte le long de la surface de glissement et la résistance au glissement s'oppose au mouvement)

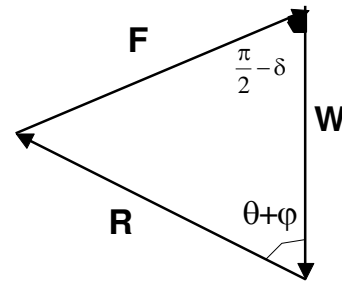
$$F = W \frac{\sin(\theta + \varphi)}{\sin(\varphi + \theta - \delta)} = \frac{\gamma H^2}{2} \cot \theta \frac{\sin(\theta + \varphi)}{\sin(\varphi + \theta - \delta)} .$$



a. Hypothèses du calcul par le « coin de Coulomb »



b. Équilibre des forces (poussée)



c. Équilibre des forces (butée)

Figure 7.3 Hypothèses du calcul de Coulomb et équilibres de poussée et butée

Pour trouver l'inclinaison du plan de rupture, il faut déterminer le maximum de F par rapport à θ . On recherche ce maximum en annulant la dérivée de F par rapport à θ . Dans le cas particulier où $\delta = 0$, on trouve que

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$$

pour :

- $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$ dans le cas de la poussée, d'où $F_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) ;$

- $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ dans le cas de la butée, d'où $F_p = \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) .$

La solution générale dans le cas d'un écran incliné d'un angle η par rapport à l'horizontale, avec une surface du sol inclinée de β a été établie par Müller-Breslau en 1906, sous la forme :

$$F_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{\sin^2(\eta - \varphi)}{\sin^2 \eta \sin(\eta - \delta)} \frac{1}{\left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi - \beta)}{\sin(\eta - \delta) \sin(\eta + \beta)}} \right]^2} \quad (\text{cas de la poussée}).$$

Pour utiliser la méthode de Coulomb, il faut attribuer une valeur à l'angle δ . Cet angle de frottement entre l'écran et le sol ne peut dépasser l'angle de frottement interne du sol (sinon, la rupture aurait lieu dans le sol). Son signe dépend du mouvement relatif de l'écran et du sol (négatif, si l'écran tasse plus que le mur ; positif dans le cas contraire). Pour les remblais derrière les murs de soutènement, on prend généralement une valeur comprise entre un tiers et la moitié de l'angle de frottement interne.

b. Méthode de Rankine

La théorie de Rankine (1860) part d'un tout autre point de vue : il s'agit de déterminer l'état des contraintes dans le massif de sol soumis à une sollicitation de poussée ou de butée à partir de considérations sur les cercles de Mohr à la rupture. L'hypothèse principale de Rankine est que les discontinuités introduites dans le sol par la présence de l'écran (mur, rideau, etc.) ne perturbent pas l'équilibre des contraintes. Dans un massif à surface horizontale, les contraintes principales seront donc verticale et horizontale et, dans un massif à surface inclinée de β , le vecteur-contrainte sur une facette parallèle à la surface du massif sera vertical et d'intensité $\|\vec{\sigma}\| = \gamma h \cos \beta$ (Figure 7.4).

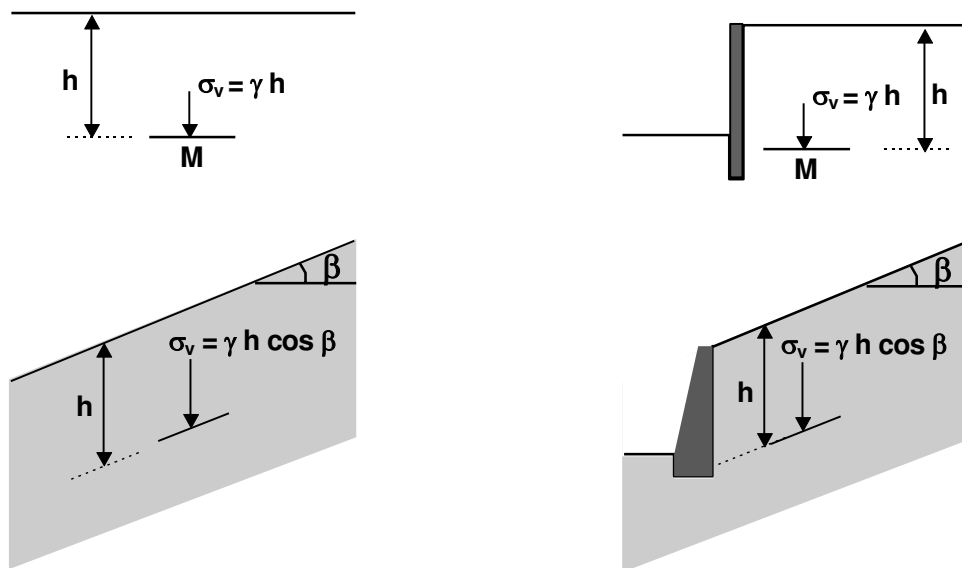


Figure 7.4 État des contraintes dans des massifs homogènes à surface horizontale et inclinée (Hypothèse de Rankine)

Cette hypothèse a l'inconvénient d'imposer la direction de la contrainte au contact de l'écran et d'exclure tout frottement par déplacement relatif du sol et de l'écran. Elle permet par contre de développer une théorie simple pour calculer les efforts de poussée et de butée.

b1. Coefficients de poussée et de butée

Considérons un massif de sol à surface horizontale (Figure 7.4). Pour simplifier l'exposé, nous allons admettre que le sol est sec, avec un poids volumique γ . On pourrait aussi faire l'exposé pour un massif de sol saturé, avec une nappe au niveau du terrain naturel : dans ce cas, le poids volumique entrant dans les formules est le poids volumique déjaugé γ' . Le cas général d'un massif de sol stratifié, avec un régime hydraulique quelconque, peut aussi être traité.

Si l'on considère donc un massif de sol sec, et si l'on admet que l'état de contraintes dans le sol n'est pas perturbé par la présence de l'écran, l'état initial des contraintes en un point M situé à la profondeur z est caractérisé par deux contraintes principales verticale et horizontale :

$$\sigma_v = \gamma z$$

$$\sigma_h = K_0 \sigma_v$$

Dans le diagramme de Mohr, cet état de contrainte est représenté par un cercle de diamètre $\sigma_v - \sigma_h$ (Figure 7.5).

Supposons maintenant que l'on déplace l'écran vers le sol, du côté où l'on observe les contraintes : la contrainte verticale reste par hypothèse constante et la contrainte horizontale augmente. Elle augmente jusqu'à ce que le cercle de Mohr correspondant touche la courbe intrinsèque (Figure 7.5).

Si, au contraire, on déplace l'écran du côté opposé au point où l'on observe les contraintes, la contrainte verticale reste encore constante mais la contrainte horizontale diminue... Elle diminue jusqu'à ce que le cercle de Mohr devienne tangent à la courbe intrinsèque (Figure 7.5).

La figure 7.5 permet d'établir les relations existant entre les contraintes horizontales de poussée et de butée, dans le cas général d'un sol frottant et cohérent à la fois ($c \neq 0, \varphi \neq 0$).

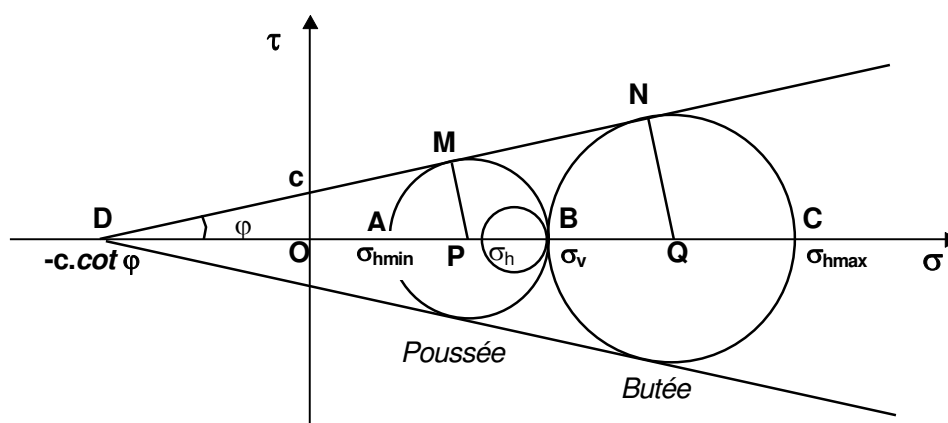


Figure 7.5 Diagramme de définition des cercles de Mohr limites de poussée et butée

En utilisant le triangle DMP, on peut écrire :

$$\sin \varphi = \frac{MP}{DP} = \frac{(\sigma_v - \sigma_{hmin})/2}{c \cot \varphi + (\sigma_v + \sigma_{hmin})/2}$$

d'où

$$2c \cos \varphi + \sigma_v (\sin \varphi - 1) + \sigma_{hmin} (1 + \sin \varphi) = 0$$

et encore

$$\sigma_{hmin} (1 + \sin \varphi) = \sigma_v (1 - \sin \varphi) - 2c \cos \varphi$$

puis

$$\sigma_{hmin} = \sigma_v \frac{(1 - \sin \varphi)}{(1 + \sin \varphi)} - 2c \frac{\cos \varphi}{(1 + \sin \varphi)}$$

et, finalement :

$$\sigma_{hmin} = \sigma_v \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) - 2c \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

En utilisant le triangle DNQ, on écrit de même :

$$\sin \varphi = \frac{NQ}{DQ} = \frac{(\sigma_{hmax} - \sigma_v)/2}{c \cot \varphi + (\sigma_v + \sigma_{hmax})/2}$$

puis

$$2c \cos \varphi + \sigma_v (\sin \varphi + 1) + \sigma_{hmax} (\sin \varphi - 1) = 0$$

$$\sigma_{hmax} (1 - \sin \varphi) = \sigma_v (1 + \sin \varphi) + 2c \cos \varphi$$

$$\sigma_{hmax} = \sigma_v \frac{(1 + \sin \varphi)}{(1 - \sin \varphi)} + 2c \frac{\cos \varphi}{(1 - \sin \varphi)}$$

et, finalement :

$$\sigma_{hmax} = \sigma_v \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + 2c \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Ainsi, les contraintes horizontales minimale (de poussée) et maximale (de butée) sont liées à la contrainte verticale par une relation où interviennent la cohésion c et deux fonctions de l'angle de frottement interne appelées respectivement :

- coefficient de poussée

$$K_a = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

- coefficient de butée

$$K_p = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) .$$

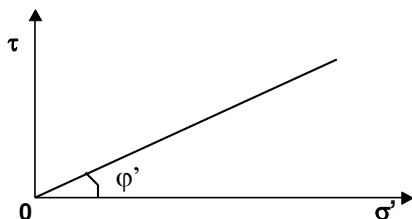
Ces deux coefficients sont inverses l'un de l'autre :

$$K_a K_p = 1 .$$

b2. États de poussée et butée des sols fins et des sols grenus

La démonstration générale présentée ci-dessus permet de traiter les différents cas de résistance au cisaillement des sols :

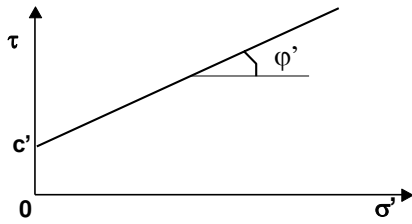
- pour les sols grenus sans cohésion, les états limites de poussée et de butée sont définis par



Poussée $\sigma'_h = \sigma'_v \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = K_a \sigma'_v$

Butée $\sigma'_h = \sigma'_v \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = K_p \sigma'_v$

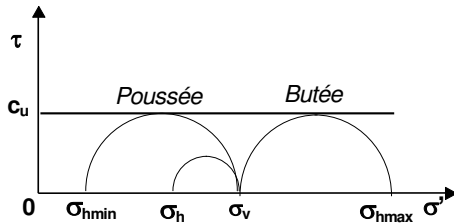
- pour les sols grenus cohérents et frottants et les sols fins à long terme :



Poussée $\sigma'_h = \sigma'_v \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2}\right) - 2c' \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2}\right)$

Butée $\sigma'_h = \sigma'_v \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2}\right) + 2c' \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2}\right)$

- pour les sols purement cohérents (sols fins à court terme) :



Poussée $\sigma_h = \sigma_v - 2c_u$

Butée $\sigma_h = \sigma_v + 2c_u$

Si la surface du massif de sol derrière l'écran est inclinée d'un angle β sur l'horizontale, on peut établir aussi des formules de calcul des contraintes horizontales de poussée et de butée.

b3. Distribution avec la profondeur des contraintes de poussée et de butée

Les relations précédentes donnent la valeur de la contrainte horizontale en fonction de la contrainte verticale au point considéré. Compte tenu de l'hypothèse de Rankine sur la conservation des distributions de contraintes verticales malgré la présence de l'écran, les contraintes verticales augmentent linéairement avec la profondeur et les contraintes horizontales de poussée et de butée font de même (Figure 7.6). Sur la même figure a été également reportée la distribution des contraintes horizontales initiales, calculées au moyen du coefficient de pression des terres au repos K_0 introduit au chapitre 2.

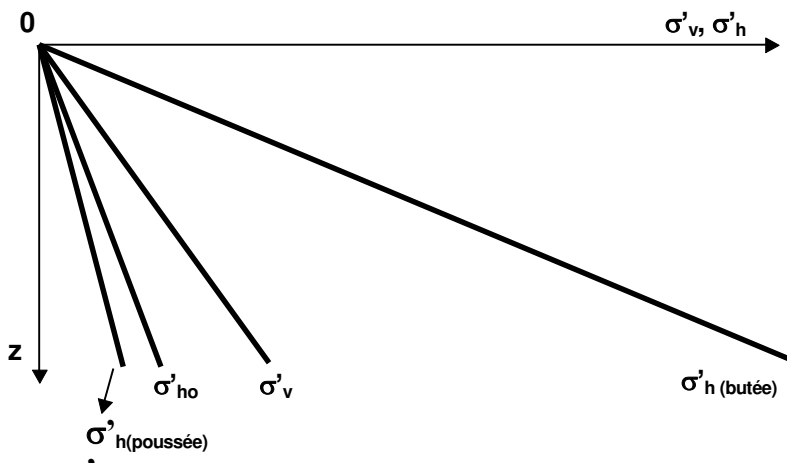


Figure 7.6 Évolution avec la profondeur des contraintes de poussée et de butée

Exemples

Pour illustrer le fonctionnement des méthodes de calcul des forces de poussée et de butée sur les soutènements, nous allons étudier deux exemples de calcul des efforts appliqués à un rideau de soutènement, sans eau d'abord, puis avec eau ensuite.

a. Calcul des efforts sur un rideau non ancré (sans eau)

Les dimensions du rideau sont indiquées sur la figure 7.7. Le sol est un sable sec, de poids volumique $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, de cohésion effective $c'=0$ et d'angle de frottement interne $\varphi'=40$ degrés.

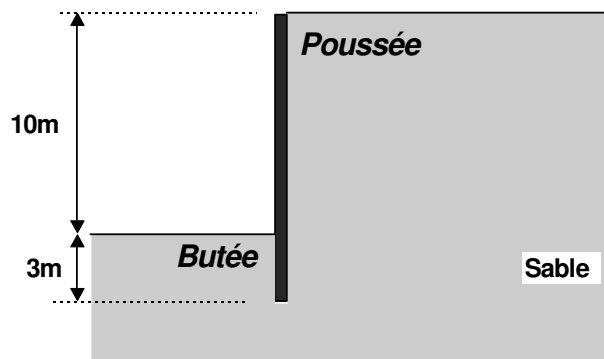


Figure 7.7 Hypothèses du calcul d'un rideau de soutènement (sans eau)

Le sens du déplacement de l'écran conditionne le choix des états limites de poussée (l'écran s'écarte du sol) et de butée (l'écran est poussé vers le sol). La géométrie du massif de sol fait que l'écran va se déplacer de la droite vers la gauche. Le sol sera donc décomprimé à droite de l'écran et comprimé à gauche de l'écran.

Pour le calcul des efforts de poussée (à droite de l'écran) et de butée (à gauche de l'écran), on utilise les formules de Rankine, avec :

- coefficient de poussée $K_a = \tan^2(45 - 20) = 0,217$,
- coefficient de butée $K_p = 1/K_a = 4,60$.

On obtient les résultats représentés sur la figure 7.8.

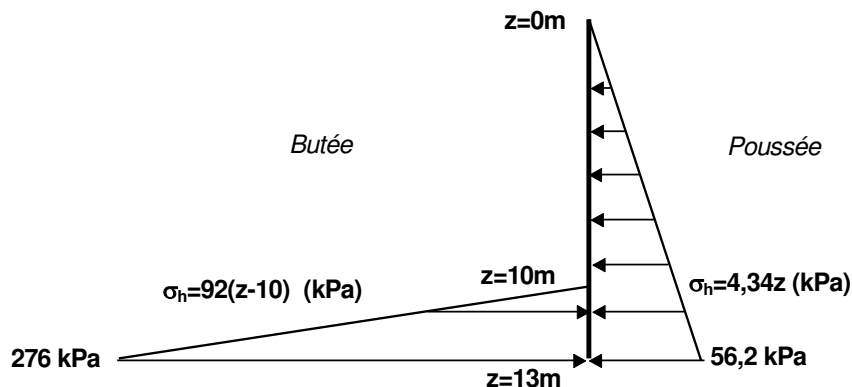


Figure 7.8 Distribution des efforts horizontaux sur le rideau de la figure 7.7.

La résultante des efforts de poussée est égale à $F_a=366,7$ kN/m. Elle est appliquée au tiers inférieur du rideau à droite, c'est à dire à 4,33 m au-dessus du pied du rideau. La résultante des efforts de butée vaut $F_p=414$ kN/m. Elle est appliquée à 1m au-dessus du pied du rideau, à gauche.

L'équilibre des forces horizontales est assuré, puisque la butée, qui s'oppose au mouvement du rideau, est supérieure à la force de poussée qui le provoque. Les déplacements nécessaires à la mobilisation de la poussée étant plus faibles, la force de poussée s'établit la première, provoquant le déplacement de l'écran jusqu'à ce que la butée soit suffisante.

Par contre, l'équilibre des moments de ces mêmes forces horizontales n'est pas assuré puisque

$$1 \times 414 < 4,33 \times 366,7 \quad (\text{m.kN/m})$$

Pour assurer la stabilité d'un tel rideau, il faut soit augmenter la fiche du rideau dans le sol, soit ajouter une force horizontale à la partie supérieure du rideau (buton ou tirant d'ancrage).

b. Calcul des efforts sur un rideau non ancré (avec eau)

Ce problème est identique au précédent à part l'existence d'une nappe de chaque côté du l'écran. Le poids volumique du sable saturé est égal à 22 kN/m³. Sa cohésion effective est nulle et son angle de frottement interne vaut 40 degrés. On admet que les deux distributions de pressions interstitielles sont indépendantes, ce qui suppose que le sol sous l'écran soit imperméable (S'il y a un écoulement, il faut utiliser les pressions interstitielles calculées dans l'étude de l'écoulement).

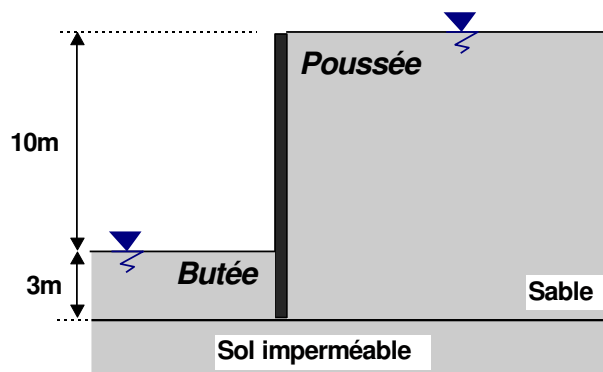


Figure 7.9 Hypothèses du calcul d'un rideau de soutènement (avec eau)

L'analyse des déplacements du rideau est identique à celle du cas précédent. On admet donc qu'il y aura des efforts de poussée à droite et des efforts de butée à gauche du rideau.

Comme il y a des pressions interstitielles non nulles dans le sable, il faut effectuer les calculs de poussée et butée en contraintes effectives, c'est à dire procéder au calcul des contraintes en cinq étapes :

- calcul de la contrainte totale verticale : $\sigma_v = \int_0^Z \gamma dz$
- calcul de la pression interstitielle : $u = \gamma_w z$
- calcul de la contrainte effective verticale : $\sigma'_v = \sigma_v - u$
- calcul de la contrainte effective horizontale : $\sigma'_h = K\sigma'_v$ ($K = K_a$ ou K_p)
- calcul de la contrainte totale horizontale : $\sigma_h = \sigma'_h + u$.

Les coefficients de poussée et de butée sont les mêmes que dans le cas précédent. On obtient les résultats donnés dans le tableau 7.1 et représentés sur la figure 7.10.

Tableau 7.1 Contraintes totales et effectives le long du rideau de la figure 7.9

Profondeur (m)	σ_v (kPa)	u (kPa)	σ'_v (kPa)	K_a ou K_p	σ'_h (kPa)	σ_h (kPa)
Poussée (côté droit de l'écran)						
$z = 0\text{m}$	0	0	0		0	0
$z = 13\text{m}$	286	130	156	0,217	33,8	163,8
Butée (côté gauche de l'écran)						
$z = 10\text{m}$	0	0	0		0	0
$z = 13\text{m}$	66	30	36	4,60	165,6	195,6

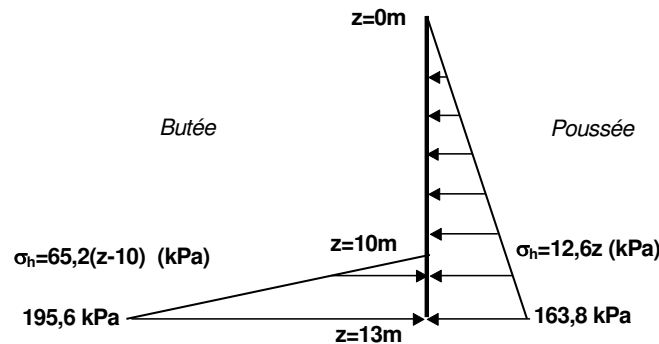


Figure 7.10 Distribution des efforts horizontaux (contraintes totales) sur le rideau de la figure 7.9.

La résultante des efforts de poussée est égale à $F_a = 1065$ kN/m et celle des efforts de butée à $F_p = 293$ kN/m. Le rideau est donc en déséquilibre. Il pourrait être stabilisé de la même façon que dans le cas précédent : augmentation de la fiche ou ancrage (butonnage) en tête.

Remarques :

- quand on passe d'une couche cohérente et frottante à une autre couche de même type, il peut y avoir des discontinuités des contraintes horizontales (mais pas des contraintes verticales) ;

- les deux exemples traités illustrent l'influence très grande de l'eau sur les efforts qui s'exercent sur les soutènements. Il est pour cette raison indispensable de prendre les pressions d'eau correctement en compte dans les calculs et de chercher à les diminuer chaque fois que c'est possible (par exemple en permettant le drainage des sols situés derrière les murs de soutènement).

8. CAPACITÉ PORTANTE DES FONDATIONS SUPERFICIELLES

8.1 Notations

Les notations utilisées dans cette section sont les notations couramment utilisées pour le calcul des fondations superficielles. La géométrie de la fondation est définie sur la figure 8.1. Le sol est caractérisé par son poids volumique γ et par sa résistance au cisaillement drainé (cohésion effective c' et angle de frottement interne φ') ou non drainé (cohésion non drainée c_u). Dans les formules de calcul, la notation générique (c , φ) est utilisée. Lorsque $\varphi=0$, elle représente le comportement non drainé du sol.

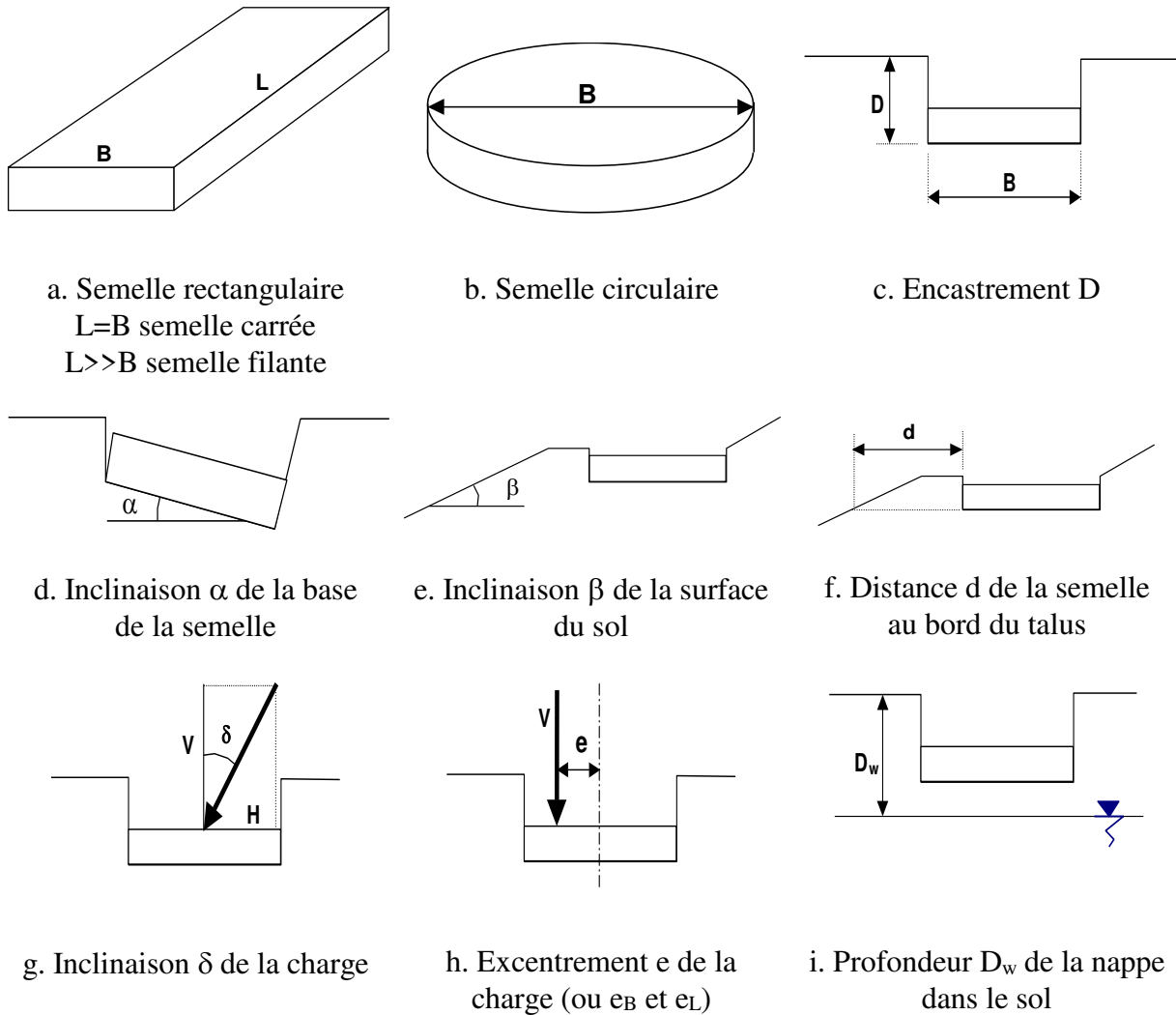


Figure 8.1 Notations utilisées pour la géométrie des fondations superficielles

8.2 Calcul de la portance selon l'Eurocode 7

La formule de calcul de la capacité portante des fondations superficielles donnée comme exemple dans le projet d'Eurocode 7 comporte trois termes combinant chacun un facteur de capacité portante et des coefficients correcteurs.

Calcul en conditions non drainées

Pour les calculs en conditions non drainées, la formule suggérée est

$$q_{max} = \frac{V}{A'} = (\pi + 2)c_u s_c i_c b_c + q$$

(ce qui correspond à la valeur minimale de N_c pour $\varphi=0$, soit $N_c = 5,14$), avec des coefficients correcteurs égaux à :

* pour la forme de la fondation :

$$\begin{cases} s_c = 1 + 0,2B'/L' & \text{pour une semelle rectangulaire de dimensions réduites } B' \text{ et } L', \\ s_c = 1,2 & \text{pour une semelle circulaire ;} \end{cases}$$

* pour l'inclinaison de la charge (composantes horizontale H et verticale V) :

$$i_c = 0,5 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{H}{A'c_u}} \right);$$

* pour l'inclinaison de la base de la fondation :

$$b_c = 1 - \frac{2\alpha}{\pi + 2}.$$

A' ($B' \times L'$) est l'aire de la surface de contact de la semelle avec le sol après réduction de deux fois l'excentrement dans chaque direction, selon la méthode de Meyerhof.

q est la pression uniforme appliquée à la surface du sol autour de la semelle, au niveau de la base de la semelle.

Calcul en contraintes effectives (conditions drainées)

Pour les calculs en contraintes effectives (c' , φ'), la formule de calcul de base est :

$$q_{max} = c' N_c s_c i_c b_c + q' N_q s_q i_q b_q + 0,5 \gamma' B' N_\gamma s_\gamma i_\gamma b_\gamma$$

où

q' est la pression effective uniforme appliquée au sol autour de la semelle,

γ' est le poids volumique du sol sous le niveau de la fondation,

B' est la largeur réduite de la fondation,

c' est la cohésion du sol,

N_c , N_q et N_γ sont les facteurs de capacité portante,

s_c , s_q et s_γ sont les facteurs de forme,

i_c , i_q et i_γ sont les facteurs d'inclinaison de la charge,

b_c , b_q et b_γ sont les facteurs d'inclinaison de la base de la fondation.

Le tableau 8.1 rassemble les valeurs de ces facteurs et les expressions des coefficients correcteurs correspondants.

Tableau 8.1. Facteurs de capacité portante et coefficients correcteurs (projet d'Eurocode 7)

	Terme de surface ou gravité N_γ		Terme de profondeur N_q		Terme de cohésion N_c	
	$N_\gamma = 2(N_q - 1)\tan\varphi$		$N_q = \exp(\pi \tan\varphi) \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$		$N_c = (N_q - 1)\cot\varphi$	
Valeurs de N_γ , N_q , N_c	φ (deg)	N_γ	φ (deg)	N_q	φ (deg)	N_c
	0	0	0	1	0	5,1
	5	0,11	5	1,6	5	6,5
	10	0,50	10	2,5	10	8,3
	15	1,60	15	3,9	15	11,0
	20	4,60	20	6,4	20	14,8
	25	9	25	10,7	25	20,7
	30	20	30	18,4	30	30,1
	35	45	35	33,3	35	46,1
	40	106	40	64,2	40	75,3
	45	268	45	134,9	45	133,9
Forme ⁽¹⁾ c' , φ'	$s_\gamma = 1 - 0,3 \frac{B'}{L'}$		$s_q = 1 + \frac{B'}{L'} \sin\varphi'$		$s_c = \frac{s_q N_q - 1}{N_q - 1}$	
Profondeur	(pas de formule)		(pas de formule)		(pas de formule)	
Inclinaison de la charge ⁽²⁾	$i_\gamma = \left[1 - \frac{H}{V + A'c' \cot\varphi'} \right]^{m+1}$		$i_q = \left[1 - \frac{H}{V + A'c' \cot\varphi'} \right]^m$		$i_c = i_q - \frac{1 - i_q}{N_c} \tan\varphi'$	

Inclinaison de la semelle	$b_\gamma = (1 - \alpha \tan \varphi)^2$	$b_q = (1 - \alpha \tan \varphi)^2$	$b_c = b_q - \frac{1 - b_q}{N_c} \tan \varphi$
Talus	(pas de formule)	(pas de formule)	(pas de formule)
Excentrement	Réduction de B de $2e_B$ Réduction de L de $2e_L$	Réduction de B de $2e_B$ Réduction de L de $2e_L$	Réduction de B de $2e_B$ Réduction de L de $2e_L$

Notes

(1) Les formules sont données pour une semelle rectangulaire de côtés $L > B$. Pour un carré ou un cercle, on fait $L=B$ dans les formules.

(2) La valeur du paramètre m dépend du sens de l'inclinaison de la charge. Il vaut :

$$m = m_B = 2 + \frac{B'/L'}{1 + B'/L'} \text{ lorsque H est dirigée dans la direction de B,}$$

$$m = m_L = 2 + \frac{L'/B'}{1 + L'/B'} \text{ lorsque H est dirigée dans la direction de L.}$$

Lorsque la force est dirigée dans une direction quelconque θ , le paramètre m vaut :

$$m = m_\theta = m_L \cos^2 \theta + m_B \sin^2 \theta$$

(3) L' et B' sont les longueur et largeur réduites pour tenir compte de l'excentrement de la charge :

$$L' = L - 2e_L,$$

$$B' = B - 2e_B.$$