

Je m'interpose Vigil Pisté → OK.

$$x_0 = 1$$

# PREMIER TEST D'ANALYSE NUMERIQUE 25 AVRIL 2002

## EXERCICE 1 (barème : 7)

Dans le plan réel muni d'un repère orthonormé  $xOy$  on considère les 6 points :  $A(0; 3/2)$ ,  $B(3/2; 0)$ ,  $C(3; 0)$ ,  $D(0; 3)$ ,  $E(-3; 0)$  et  $F(-3/2; 0)$ . On note  $\Omega$  l'intérieur du polygone ABCDEF et  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  sa frontière, avec  $\Gamma_1 = [AB] \cup [CD] \cup [DE] \cup [FA]$  et  $\Gamma_2 = ]EF[ \cup ]BC[$ .

Considérons alors le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = y^2 & \text{dans } \Omega \\ u(x, y) = x & \text{sur } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = u(x, y) & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

Discrétiser le problème par différences finies, en prenant un pas constant  $h = 1/2$  dans les deux directions du plan, et en utilisant une méthode d'ordre 2 pour prendre en compte la condition aux limites sur  $\Gamma_2$ . On donnera la matrice et le second membre du système linéaire obtenu en adoptant une numérotation des points du maillage par ligne de gauche à droite et de haut en bas.

**Attention :** Tous les éléments non nuls de la matrice et du second membre devront être écrits, sinon ils seront considérés comme FAUX

$$f(p) = y(p)$$

### EXERCICE 2 (barème : 1+2+1+2+3+2)

Soit  $N$  un entier naturel strictement positif. On désire résoudre par une méthode itérative un système linéaire de matrice carrée  $A$  d'ordre  $N + 2$  dont les seuls éléments non nuls sont :  $A_{i,i} = A_{1,2} = A_{N+2,N+1} = -2$  pour  $i = 1, \dots, N + 2$  et  $A_{i,i-1} = A_{i,i+1} = 1$  pour  $i = 2, \dots, N + 1$

- 1) Calculer la matrice  $J(A, N)$  de la méthode itérative de Jacobi.
- 2) pour  $N = 1$  et  $N = 2$  la méthode de Jacobi converge-t-elle?
- 3) Calculer la matrice  $L_\omega(A, 1)$  de la méthode itérative S.O.R.
- 4) Calculer (en le factorisant) le polynôme caractéristique de  $L_\omega(A, 1)$  et montrer qu'il admet la racine réelle  $1 - \omega$
- 5) Etudier la convergence de la méthode S.O.R pour  $N = 1$  en fonction du paramètre  $\omega$ .
- 6) Donner un exemple de problème aux limites dont la discrétisation conduit à un système linéaire de matrice  $A$  définie au début de l'exercice. Cette question est indépendante des questions précédentes.

### EXERCICE 3 (barème : 1+2)

Soit  $p$  un entier naturel strictement positif. On veut résoudre numériquement l'équation  $f(x) = 0$  en utilisant la méthode itérative définie par  $x_0$  et  $x_{n+1} = G(x_n)$  avec :

$$G(x) = x - \frac{f(x)(f'(x))^{p-1}}{1 + (f'(x))^p}$$

- 1) Pour quelles valeurs de  $p$  est-on certain que la méthode converge au voisinage d'un point fixe?
- 2) Calculer avec 6 décimales les valeurs  $x_1, \dots, x_5$ , obtenues en appliquant cette méthode à la fonction  $f(x) = x^3 - 2$  avec  $p = 2$  et  $x_0 = 1$  ou bien  $x_0 = 2$ . Conclusion?

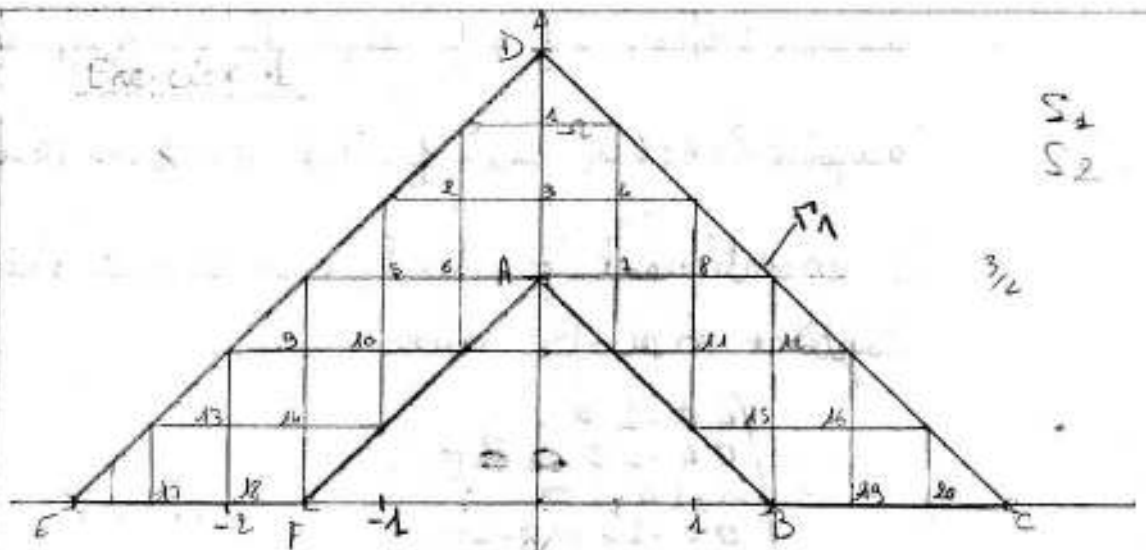
12,5/20

Exercice 1: 7/7

Exercice 2: 3,5/11

Exercice 3: 2/3

12,5/20

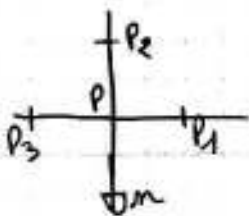


$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = y & \text{dans } \Omega \\ u(x,y) = x & \text{sur } S_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = u(x,y) & \text{sur } S_2 \end{cases}$$

$$h = \frac{1}{2}$$

dans  $\Omega$ , on a : 
$$\frac{4u(P) - u(P_1) - u(P_2) - u(P_3) - u(P_4)}{h^2} = f(P)$$

Etude pour  $S_2$ :



$$\frac{\partial P_2^*}{\partial y} \Psi(P_2) = \Psi(P) - h \frac{\partial \Psi}{\partial y}(P) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}(P) - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}(P)$$

$$\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial y}(P) = \Psi(\alpha, y)$$

$$\text{d'où } \Psi(P_2^*) = \Psi(P) [1-h] + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}(P) - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}(P)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}(P) = \frac{2}{h^2} [-\Psi(P)(1-h) + \Psi(P_2^*)] + \frac{h}{3} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}(P)$$

$$\text{d'où : } \frac{4\mu(P_1) + \mu(P_3) - 2\mu(P)}{h^2} + \frac{2}{h^2} [(h-1)\mu(P) + \mu(P_2)] = -f(P)$$

$$\text{d'où : } \mu(P) (-4 + 2h) + \mu(P_1) + \mu(P_3) + 2\mu(P_2) = -h^2 f(P) \text{ sur } S_2$$

$$\mu(P) (-2) + \mu(P_1) + \mu(P_3) + 2\mu(P_2) = -h^2 f(P)$$

On peut donc en déduire la matrice :

$$\text{au point 1 : } 4(\mu_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \mu_3) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \underline{4\mu_1 - \mu_3 = \frac{5}{2}}$$

$$\text{au point 2 : } 4(4\mu_2 - \mu_3 + \frac{1}{2} - \mu_6) + 1 = 0 \Leftrightarrow (4\mu_2 - \mu_3 - \mu_6) = -\frac{1}{4}$$

en continuant les calculs, on en déduit l'écriture du

système  $Ax=B$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & -1 & -13 \end{pmatrix}$$

5/5

au point 3:  $4(4\mu_3 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_4) = 2$

au point 4:  $4(4\mu_4 - 1 - \frac{1}{2} - \mu_3 - \mu_2) = 2 \Leftrightarrow 4\mu_4 - \mu_3 - \mu_2 = 2$ .

au point 5:  $4(4\mu_5 - \mu_6 - \mu_{10} + 1 + \frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4\mu_5 - \mu_6 - \mu_{10} = -\frac{17}{8}$ .

au point 6:  $4(4\mu_6 - \mu_2 - \mu_5 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4\mu_6 - \mu_2 - \mu_5 = -\frac{1}{8}$ .

au point 7:  $4(4\mu_7 - \mu_8 - \mu_4 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4\mu_7 - \mu_8 - \mu_4 = \frac{7}{8}$ .

— 8:  $4(4\mu_8 - \mu_{11} - \mu_7 - \frac{3}{2} - 1) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4\mu_8 - \mu_{11} - \mu_7 = \frac{23}{8}$ .

— 9:  $4(4\mu_9 - \mu_{10} - \mu_{14} + \frac{3}{2} + 2) = 1 \Leftrightarrow 4\mu_9 - \mu_{10} - \mu_{14} = -\frac{13}{4}$ .

— 10:  $4(4\mu_{10} - \mu_5 - \mu_9 + \frac{1}{2} + 1) = 1 \Leftrightarrow 4\mu_{10} - \mu_5 - \mu_9 = -\frac{5}{4}$ .

— 11:  $4(4\mu_{11} - \mu_{12} - \mu_8 - \frac{1}{2} - 1) = 1 \Leftrightarrow 4\mu_{11} - \mu_{12} - \mu_8 = \frac{7}{4}$ .

— 12:  $4(4\mu_{12} - \mu_{11} - \mu_{15} - 2 - \frac{3}{2}) = 1 \Leftrightarrow 4\mu_{12} - \mu_{11} - \mu_{15} = \frac{15}{4}$ .

— 13:  $4(4\mu_{13} - \mu_{14} - \mu_{18} + 2 + \frac{5}{2}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\mu_{13} - \mu_{14} - \mu_{18} = -\frac{35}{8}$ .

— 14:  $4(4\mu_{14} - \mu_9 - \mu_{13} + 1 + \frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\mu_{14} - \mu_9 - \mu_{13} = -\frac{19}{8}$ .

— 15:  $4(4\mu_{15} - \mu_{16} - \mu_{12} - 1 - \frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\mu_{15} - \mu_{16} - \mu_{12} = \frac{21}{8}$ .

— 16:  $4(4\mu_{16} - \mu_{15} - \mu_{19} - \frac{5}{2} - 2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\mu_{16} - \mu_{15} - \mu_{19} = \frac{37}{8}$ .

— 17:  $3\mu_{17} - \mu_{18} + 3 + 5 = 0 \Leftrightarrow 3\mu_{17} - \mu_{18} = -8$ .

— 18:  $3\mu_{18} - \mu_{17} - 2\mu_{13} + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow 3\mu_{18} - \mu_{17} - 2\mu_{13} = -\frac{3}{2}$ .

— 19:  $3\mu_{19} - \mu_{20} - 2\mu_{16} + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow 3\mu_{19} - \mu_{20} - 2\mu_{16} = \frac{3}{2}$ .

— 20:  $3\mu_{20} - \mu_{19} - 5 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3\mu_{20} - \mu_{19} = 8$ .

et B =

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{8} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ -\frac{17}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ \frac{7}{8} \\ \frac{23}{8} \\ -\frac{13}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{15}{4} \\ -\frac{35}{8} \\ \frac{19}{8} \end{pmatrix}$$

suite à partir point 15:

$$\begin{pmatrix} \frac{21}{8} \\ \frac{37}{8} \\ -8 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

1/2



$$\rightarrow \det(T - \lambda I) = \lambda (\lambda^2 - 1) = \lambda (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

d'où les valeurs propres de  $T$  sont :  $0, \pm 1$ .

$$\text{d'où } \rho(T) = \max |H_i| = 1. \quad 1$$

$\Rightarrow$  la méthode de Jacobi ne converge pas pour  $N=1$ .

$N=2$  :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ +\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(T - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} \lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \left[ -\lambda \left( -\lambda - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} \left( -\lambda - \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[ -\lambda \left( -\lambda - \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$= \lambda^2 \left( \lambda^2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \lambda \left( -\frac{\lambda}{2} \right) + -\frac{1}{2} \left( \lambda^2 + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \left( \lambda^2 + \frac{1}{2} \right) \left( \lambda^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} \lambda^2$$

$$= \lambda^4 - \frac{1}{4} \lambda^2$$

d'où les valeurs propres de  $T$  sont :

$$\lambda_1 = 0,8002; \lambda_2 = 0,6268i; \lambda_3 = -0,6268i; \lambda_4 = -0,8$$

$$\text{d'où } \rho(T) = 0,8002 < 1.$$

$\Rightarrow$  la méthode de Jacobi converge pour  $N=2$ .

$\frac{1}{2}$



$$3) \quad N=1 \\ A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

avec les mêmes notations que précédemment, on a :

$$L_{\omega}(A, 1) = \left( \frac{D}{\omega} - E \right)^{-1} \left( \frac{1-\omega}{\omega} D + F \right)$$

$$\frac{D}{\omega} - E = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\omega} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{\omega} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1-\omega}{\omega} D + F = \begin{pmatrix} \frac{1-\omega}{\omega}(-2) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2(1-\omega)}{\omega} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{2(1-\omega)}{\omega} \end{pmatrix}$$

Pour inverser la matrice  $\frac{D}{\omega} - E$ , on agit par identification, car on sait que son inverse est aussi une triangulaire inférieure :

$$\left( \frac{D}{\omega} - E \right)^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$\left( \frac{D}{\omega} - E \right) \left( \frac{D}{\omega} - E \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\omega}a & 0 & 0 \\ \frac{2}{\omega}b & -\frac{2}{\omega}c & 0 \\ -\frac{2}{\omega}d & -e - \frac{2}{\omega}e - \frac{2}{\omega}f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} a = -\frac{\omega}{2} = c = f \\ b = 0 = d \\ e = -\frac{2}{\omega}c \end{cases}$$

$$\text{d'où } \left( \frac{D}{\omega} - E \right)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\omega}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\omega}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\omega}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } L_{\omega}(A, 1) &= \begin{pmatrix} -\frac{\omega}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\omega}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\omega}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2(1-\omega)}{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2(1-\omega)}{\omega} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{2(1-\omega)}{\omega} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-\omega & 0 & 0 \\ 0 & 1-\omega & -\frac{\omega}{2} \\ 0 & -2(1-\omega) & 1-\omega \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1/2



$$P(\lambda, \omega) = \det(Z\omega - \lambda I).$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\omega-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\omega-\lambda & -\frac{\omega}{2} \\ 0 & -\frac{2(1-\omega)}{\omega} & 1-\omega-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\omega-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\omega-\lambda & -\frac{\omega}{2} \\ -\frac{2(1-\omega)}{\omega} & 1-\omega-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\omega-\lambda) \left[ (1-\omega-\lambda)^2 - (1-\omega) \right]$$

$$= (1-\omega-\lambda) \left[ (1-\omega-\lambda)(1-\omega-\lambda) - (1-\omega) \right] = (1-\omega-\lambda) (\omega-\lambda - \omega^2 - 1 + \omega)$$

$$= (1-\omega-\lambda) (2\omega - \omega^2 - \lambda\omega - 1 + \omega)$$

$$P(\lambda, \omega) = 0 \Leftrightarrow 1-\omega-\lambda = 0.$$

$$(1-\omega-\lambda)^2 - (1-\omega) = 0.$$

d'où  $\lambda = 1-\omega$  est une solution réelle de  $P(\lambda, \omega) = 0$ .

5) Le critère de convergence est:  $\rho(Z\omega) < 1$ .

$$\rho(Z\omega) = \max_i |h_i|.$$

dans notre cas, les valeurs propres sont:  $\lambda_1 = 1-\omega$

et les solutions de  $(1-\omega-\lambda)^2 - (1-\omega) = 0$ .

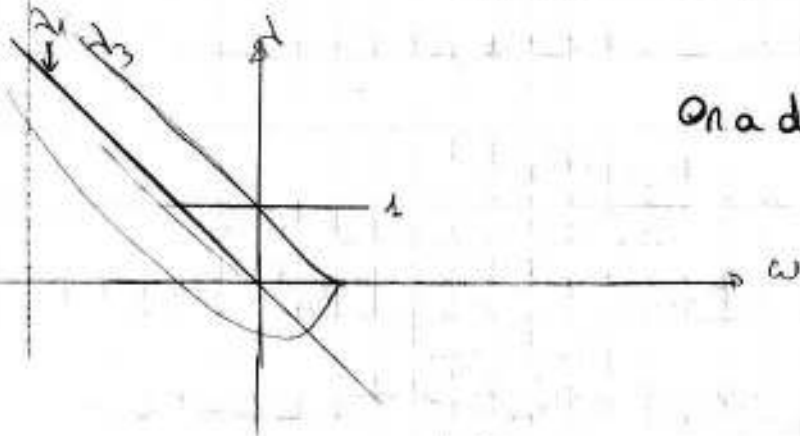
$$\Rightarrow (1-\omega-\lambda)^2 = 1-\omega.$$

$$\Rightarrow \omega < 1.$$

$$\Rightarrow 1-\omega-\lambda = \pm \sqrt{1-\omega}.$$

$$\lambda_2 = 1-\omega - \sqrt{1-\omega}.$$

$$\lambda_3 = 1-\omega + \sqrt{1-\omega}.$$



On a donc:  $\max_i |h_i| = |h_3|$ .

$$I_3 = 1 - \omega + \sqrt{\omega - 1}$$

$$|I_3| = |1 - \omega + \sqrt{\omega - 1}|$$

$$-1 < 1 - \omega + \sqrt{\omega - 1} < 1$$

6) Exemple : un système du type :  $-u''(\alpha) = p(\alpha)$ ,  
 $u(0) = \alpha$  et  $u(1) = \beta$ .

conduit à une matrice tridiagonale → De bonnes valeurs sont à chercher pour n'avoir que des -2 et des 1.

Exemple :

$$G(\alpha) = \alpha - \frac{p(\alpha)(p'(\alpha))^{p-1}}{1 + (p'(\alpha))^p}$$

2)  $p(\alpha) = \alpha^3 - 2$ .  $p = 2$  et  $\alpha_0 = 1$ .

$$\alpha_0 = 1$$

$$\alpha_1 = 1,187500$$

$$\alpha_2 = 1,237824$$

$$\alpha_3 = 1,252998$$

$$\alpha_4 = 1,257734$$

$$\alpha_5 = 1,259229$$

1) On a :  $\alpha_{n+1} = G(\alpha_n)$ .

Pour avoir convergence, on doit avoir

$$\rho(\Phi'(\alpha^*)) < 1$$

$$\alpha \Phi'(\alpha) = \alpha - \frac{p(\alpha)(p'(\alpha))^{p-1}}{1 + (p'(\alpha))^p + p(\alpha)(p''(\alpha))^{p-2}(p-1)}$$

$$\Rightarrow \Phi'(\alpha) = 1 - \frac{(p'(\alpha)(p'(\alpha))^{p-2})(1 + p'(\alpha))^p - p(\alpha)(p'(\alpha))^{p-2} p(p''(\alpha))^{p-2}}{(1 + p'(\alpha))^{2p}}$$

$$= 1 - \frac{p''(\alpha)(p'(\alpha))^{p-2} + p(\alpha)(p''(\alpha))^{p-2}(p-1)(1 + p'(\alpha))^{p-2}}{(1 + p'(\alpha))^{2p}}$$

$$\Psi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^p + (p-1) f(x) f''(x) (f'(x))^{p-2} (1 + f'(x))^p - p f''(x) f(x) (f'(x))^{p-1}}{(1 + f'(x))^{p+1}}$$

$$= 1 - \frac{(f'(x))^p + (p-1) f(x) f''(x) (f'(x))^{p-2} + \cancel{(f'(x))^{p+1}} + (p-1) f(x) f''(x) (f'(x))^{p-1}}{(1 + f'(x))^{p+1}}$$

$$+ \frac{p f''(x) f(x) (f'(x))^{p-1}}{(1 + f'(x))^{p+1}}$$

$$= 1 - \frac{(f'(x))^p + (p-1) f(x) f''(x) (f'(x))^{p-2} + p f''(x) f(x) (f'(x))^{p-1}}{(1 + f'(x))^{p+1}}$$

$f(x^*) = 0$  par définition

$$\Rightarrow f'(x^*) = 1 - \frac{f'(x^*)^p}{(1 + f'(x^*))^p}$$