

# Exposé de probabilités

## *Identité de Wald*

# Plan

I Quelques notions

II Enoncé de l'identité

III Preuve

1) Lemme 1

2) Lemme 2

3) Lien espérance et fonction génératrice

4) L'identité de Wald

IV Applications



# I Quelques notions

fonction génératrice  
et espérance

La fonction génératrice noté  $G^X(t)$  est la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X = n)t^n$$

L'espérance est la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} n P(X = n)t^{n-1}$$

On a donc via le théorème de transfert

$$E(t^X) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = n) = G_X(t)$$

## II Enoncé de l'identité

Soit  $N$  une variable aléatoire discrète dans  $\mathbb{N}$

$(X_n)_{n \text{ dans } \mathbb{N}}$  une suite de variable aléatoire suivant toutes une même loi et mutuellement indépendantes.

On note  $S = \sum_{k=1}^{\infty} X_k$

$$E(S) = E(N) E(X)$$

# III Preuve

1) Lemme 1

Soit  $t$  dans  $[-1, 1]$

$$G_{X+Y} = G_X G_Y$$

Preuve au tableau

---

# III Preuve

## 2) Lemme 2

Soit  $N$ ,  $X$  et  $S$  tels que définis dans l'énoncé précédent, alors on a :

$$G_S(t) = G_N(G_X(t))$$

Preuve au tableau

---

# Preuve

3) Lien fonction génératrice et  
espérance

Pour tout  $t$  dans  $[-1,1]$

$$G_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) t^n$$

$$G'_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n P(X = n) t^{n-1}$$

On a donc :

$$G'_x(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n P(X = n) = E(X)$$

# Preuve

4) L'identité de Wald

Rappel on a :

$$1) \quad G_{X+Y} = G_X G_Y$$

$$2) \quad G'_X(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n P(X = n) = E(X)$$

$$3) \quad G_S(t) = G_N(G_X(t))$$

Preuve au tableau

---

# IV Applications

Enoncé 1 :

On lance une pièce. Tant que l'on obtient face, on jette un dé et on avance le personnage d'un jeu de plateau du nombre correspondant

$X$  représente la valeur du dès

$N$  est une variable aléatoire qui compte le nombre de faces

$E(S) = 3,5$  (preuve au tableau)



# IV Applications

Enoncé 2 :

On lance un dé jusqu'à obtenir le chiffre 6 et on somme les résultats (on pense à bien mettre le 6 aussi)

$X$  représente la valeur du dé

$N$  est une variable aléatoire qui indique lorsque l'on obtient 6

$E(S) = 21$  (preuve au tableau)

