TP2020605

Exercice 1 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi de densité f définie par $f(x) = \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)\dfrac{3}{x^4}$.
On pose $U = XY$, $V = \dfrac{Y}{X}$ et, pour $k \in \mathbb{Z}$, $m_k = \mathbb{E}X^k$.

1. Pour quelles valeurs de k a-t-on $m_k < +\infty$? Préciser alors la valeur de m_k.
2. *Sans faire de calcul intégral*, déduire de ce qui précède la valeur de $cov(U, V)$.
   Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

1. Soit T une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(3)$. Calculer la densité et la moyenne de la variable aléatoire $Y = e^{-T}$.
2. A la sortie d'un tunnel, une voiture laisse une quantité de fumée X qui est une variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 2x\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. Le système de ventilation fait que cette quantité est $Z = Xe^{-T}$ lorsqu'une autre voiture entre dans le tunnel après un temps T qui est une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(3)$, indépendante de X.
   (a) Calculer la densité de Z .
   (b) Calculer la moyenne et la variance de Z.

Exercice 3 On note L le niveau de fréquentation d'un magasin et X son chiffre d'affaires quotidien. La variable aléatoire L est telle que $P\{L = 1\} = 1/3$ et $P\{L = 2\} = 2/3$. Sachant que $L = i$ $(i = 1, 2)$, la loi de X est normale $\mathcal{N}(m_i, \sigma^2)$ de fonction de répartition F_i et de densité f_i, avec $m_1 \neq m_2$. On note F la fonction de répartition de X et f sa densité.

1. Calculer F en fonction de F_1 et F_2 puis f en fonction de f_1 et f_2.
2. Calculer la moyenne et la variance de X en fonction des paramètres m_i et σ.
3. Montrer que la loi de X ne peut être normale.