Cours de Méthodes de la Recherche opérationnelle.

Test Final.

J.P. Lebacque.

Equipe enseignante:
Nicolas Chiabaut, Emmanuel Gourdon,
Megan Khoshyaran, Jean-Patrick Lebacque, Salim Mammar,
Kiarash Motamedi, Raksmey Phan, Omar Rifki

Avril 2019

Durée du test: 2 heures.

- Il vous est recommandé de passer environ 20 mn sur le premier exercice (Kruskal), 30 mn sur le second (Ordonnancements), 40 mn sur le troisième (Programmation Dynamique) et 30 mn sur le quatrième (Programmation linéaire).
- Documents autorisés: polycopiés, notes de cours.
- Tous les appareils électroniques (calculettes, téléphones portables, tablettes...) sont strictement interdits.

1 Exercice 1: algorithme de Kruskal.

On considère huit champs A, B, C, D, E, F, G, H situés sur une plaine, que l'on veut irriguer par un réseau d'irrigation de longueur minimale (afin de limiter l'évaporation et le coût de distribution de l'eau). Les distances entre champs sont données par le tableau suivant (symétrique):

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-	2.3	1.5	2.1	2.7	2.5	2.6	1.85
B		-	1.9	2.4	1.3	1.6	2.4	1.35
C			-	1.55	2.1	2.3	1.75	2.2
D				-	1.8	2.0	1.1	1.9
E					-	1.3	1.9	1.7
F						-	1.9	2.1
G							-	2.0
H								-

Tableau 1

Expliquez pourquoi la résolution du problème se ramène à construire un arbre maximum de poids minimum dans un graphe que l'on précisera.

Construisez cet arbre maximum de poids minimum par l'algorithme de KRUSKAL.

2 Exercice 2: cheminements et ordonnancements simples.

On considère le problème d'ordonnancements simples dont les données sont décrites par le tableau qui suit:

Tâches	Durée	Contraintes
A	10	Début + 6, Début (B) + 1/2 (B)
B	8	Début + 1
C	6	Fin (E) + 6, Fin(D) + 8
D	7	Début (A) + 1/2 (A) + 7
E	9	Fin (A) , Fin (B)
F	10	Fin (E), Début (B) + 1/2 (B) + 7
G	12	Fin(D) + 2, Début (C) + 2/3 (C) + 7

Le format de description des contraintes est celui du cours.

1. Faites la liste des sommets, de leurs prédécesseurs et de leurs successeurs, la liste des arcs et de leurs coûts. Dessinez le graphe du problème.

2. Calculez la durée minimale du projet, et pour chaque tâche sa date au plus tôt, sa date au plus tard, sa marge. Quelles sont les tâches critiques? On autorise une marge de 5 jours pour la fin du projet: quel est l'impact sur les dates au plus tôt, au plus tard, sur les marges.

Il est demandé d'utiliser la *Méthode Potentiel-Tâches* à l'exclusion de toute autre.

3 Gestion de stocks

Un assembleur construit des ordinateurs, qu'il s'efforce de revendre rapidement de manière à réduire les frais de stocks. Il connaît la demande à l'avance (par le jeu des commandes passées par les clients). On considère donc des périodes

$$(i) \stackrel{def}{=} [i-1, i] \quad \text{pour } i = 1, \cdots, 3$$

et on note, pour chaque période (i):

- d_i: la demande à satisfaire en fin de période (i), à l'instant i,
- x_i: la quantité d'ordinateurs fabriqués pendant la période (i) (il s'agit d'un nombre entier),
- s_i: le stock à l'issue de la période (i), à l'instant i.

On impose que les stocks initial et final s_0 et s_4 soient nuls. La capacité de stockage de l'assembleur est limitée à $S \stackrel{def}{=} 4$, et sa capacité de production est également limitée, à $X \stackrel{def}{=} 4$. L'assembleur s'interdit, pour ne pas perdre de clients, toute rupture de stock. L'évolution du stock est donnée par l'équation de récurrence:

$$s_i = s_{i-1} + x_i - d_i \quad \forall i = 1, 4$$

Finalement, l'ensemble des contraintes est décrit par:

$$(\mathcal{K}) \quad \left[\begin{array}{l} s_0 = s_4 = 0 \\ \\ \left. \begin{array}{l} 0 \leq s_i \leq S \\ 0 \leq x_i \leq X \\ s_i = s_{i-1} + x_i - d_i \end{array} \right) \quad \forall i = 1, 4 \end{array} \right.$$

Par ailleurs, les frais résultant du stockage sont donnés, pour la période (i), par

$$\mathcal{F}(s_i) = \alpha\, s_i$$

avec $\alpha = 4$. Les coûts de construction de x_i ordinateurs pendant une période donnée (i) sont donnés par la formule:

$$\mathcal{C}(x_i) = 40 - (x_i - 6)^2$$

On peut également décrire ces coûts par le tableau suivant:

x_i	0	1	2	3	4
$\mathcal{C}$	4	15	24	31	36

Les demandes sont données par le tableau suivant:

i	1	2	3	4
d_i	2	5	2	4

L'assembleur veut minimiser, sur l'ensemble des périodes considérées, la somme des divers coûts (stockage + production), donc résoudre:

$$Min \sum_{i=1,4} \mathcal{F}(s_i) + \mathcal{C}(x_i)$$

sous les contraintes $(\mathcal{K})$. Résolvez ce problème par la programmation dynamique. Vous identifierez les états, les commandes, et vous établirez l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), dont vous vérifierez qu'elle peut s'écrire sous la forme suivante:

$$(HJB) \qquad V_i(s) = \alpha\, s + Min_{\,x \in \mathcal{X}_i} \left[\mathcal{C}(x) + V_{i-1}(s - x + d_i)\right]$$

avec V la fonction valeur et

$$\mathcal{X}_i \stackrel{def}{=} \{x \,/\, Max(0, s + d_i - S) \leq x \leq Min(X, s + d_i)\}$$

4 Exercice 4: Programmation linéaire

Soit le programme linéaire:

$$(Q) \qquad \begin{array}{l} \text{Max } (x_1 + 2x_2) \\ \left| \begin{array}{ll} -x_1 + x_2 \leq 3 & + \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6 & - \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 & + \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & \end{array} \right. \end{array}$$

Introduisez les variables d'écart, observez qu'elles ne forment pas une base réalisable. Résolvez alors (Q) par la méthode du simplexe en introduisant une variable artificielle. En fin de calcul, explicitez le rayon infini obtenu.

1. Représentez graphiquement le problème dans le plan (x_1, x_2).
2. Faites la liste des bases réalisables du problème.
3. Mettez le problème sous forme standard.
4. Appliquez la méthode de la variable artificielle pour initialiser le simplexe.
5. Appliquez le simplexe primal; vous obtiendrez une solutions infinie.
6. Quelle est (sans calculs) l'inverse de la matrice de base, dans le dernier tableau obtenu.
7. Donnez une représentation paramétrique du rayon infini.