CARDON Philippe

TP2180506
Durée : 1 h 20 mn

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire discrète dont la loi est définie par
$P\{X=-1\} = P\{X=0\} = P\{X=1\} = 1/3$. On pose $Y = X^2$.
Montrer que $cov(X,Y) = 0$ mais que X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 2 Une cimenterie possède deux sites de production. La quantité de ciment produite par jour et exprimée en tonnes est une variable aléatoire $X \sim \mathcal{N}(30, 9)$ pour le premier site et $Y \sim \mathcal{N}(50, 16)$ pour le second, X et Y étant indépendantes.

1. Déterminer la loi de la production totale S.
2. Quelle est la probabilité que la production d'un jour soit suffisante pour satisfaire une commande de 85 tonnes?

Exercice 3 Une étude préalable à un chantier d'autoroute nécessite le relevé de la teneur en argile X et en limon Y du sol d'une zone donnée. On considère que le couple (X,Y) est uniformément réparti dans le triangle $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$. La densité f du couple est donc définie par
$f(x,y) = 2\ 1_\Delta(x,y)$

1. Justifier rapidement que X et Y admettent la même densité. Calculer la densité commune, la fonction de répartition commune et la moyenne commune à ces deux variables.
2. Avec quelle probabilité, la teneur en argile peut-elle être inférieure à $0,4$?
3. Quelle est la probabilité que la somme des teneurs en argile et en limon soit inférieure à $0,6$?
4. Quelle est la valeur moyenne de la teneur en autres constituants que les deux considérés ?
5. Calculer $cov(X,Y)$. En déduire que ces deux variables ne sont pas indépendantes.

Exercice 4 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{U}[0,1]$ et $Z = \ln(X/Y)$. Montrer que la densité f_Z de Z est définie par $f_Z(z) = \exp(-|z|)/2$. Calculer la moyenne et la variance de Z.

Correction T2180506

Ex1: $S=\{-1,0,1\}$

$EX=(-1)P(X=-1)+0P(X=0)+1P(X=1)=0$

$Cov(X,Y)=EXY-EXEY=EXY=EX^3=(-1)^3P(X=-1)+0P(X=0)+1^3P(X=1)=0$

On montre que X,Y ne sont pas indépendantes par un exemple:

$\left[P(X=1,Y=1)=P(X=1,X^2=1)=P(X=1)=\frac{1}{3}\right]\neq\left[P(X=1)P(Y=1)=\frac{1}{3}P(X=1\cup X=-1)=\frac{1}{27}\right]$

Ex2: $X\leadsto N(30,9)$, $Y\leadsto N(50,16)$, X,Y sont indépendantes:

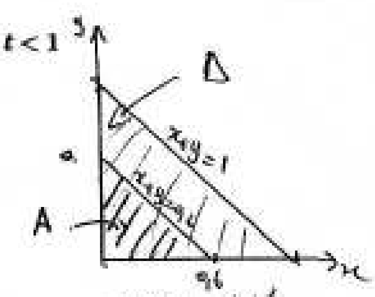
1. La production est $S=X+Y\leadsto N(80,25)$ de la stabilité de la loi normale par la somme.

$P(S>85)=P(\frac{S-80}{5}>\frac{85-80}{5})=P(Z>1)=1-P(Z\leq 1)=1-\phi(1)=1-0.8413=0.1587$.

Ex3: 1. X,Y ont le même rôle dans Δ, de plus ils sont uniformément répartis dans Δ, on a la densité de X et Y est définie par:

$f(t)=\int_0^{1-t}2\,dy=2(1-t)$ pour $0\leq t\leq 1$ D'où: $f(t)=\begin{cases}2(1-t) & 0\leq t\leq 1\\ 0 & sinon\end{cases}$

et la fonction de répartition est : $F(t)=\int_{-\infty}^{t}f(t)\,dt=\begin{cases}0 & t<0\\ t(2-t) & 0\leq t<1\\ 1 & sinon\end{cases}$



$EX=EY=\int_0^1 2t(1-t)=\frac{1}{3}$.

2. $P(X\leqslant 0.4)=F_X(0.4)=0.64$.

3. $P(X+Y\leq 0.6)=\frac{P(A)}{P(\Delta)}=\frac{0.64^2}{1}=0.36$.

aire $A=\frac{0{,}6^2}{2}$.

4. Il faut calculer $E(1-(X+Y))=1-EX-EY=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

5. $Cov(X,Y)=EXY-EXEY=\int_0^1\int_0^{1-x}xyf(x,y)\,dx\,dy-\frac{1}{9}=\int_0^1 x(1-x)^2\,dx-\frac{1}{9}=\frac{1}{12}-\frac{1}{9}=-\frac{1}{36}$.

$Cov(X,Y)\neq 0$ qui implique que X,Y ne sont pas indépendantes.

EX4: $X,Y\leadsto U[0,1]$ indépendantes.

On pose $Z=Ln(\frac{X}{Y})=LnX+Ln\frac{1}{Y}$: On cherche d'abord la densité de LnX, qu'on note par f_{LnX}:

On utilise le théorème de transfert: Soit h une fonction borélienne bornée:

$Eh(LnX)=\int_R h(Lnx)f_X(x)\,dx=\int_0^1 h(lnx)\,dx=\int_{-\infty}^{0}h(t)e^t\,dt$ avec $t=lnx$

On a donc que la densité de LnX est $f(t)=e^t 1_{]-\infty,0[}$

De la même manière, on démontre que la densité de $Ln\frac{1}{Y}$ est $f(t)=-e^{-t}1_{[0,+\infty[}$

X,Y sont indépendantes, la densité de $Z=Ln(\frac{X}{Y})=LnX+Ln\frac{1}{Y}$ est:

$\forall t\in R\quad f_Z(t)=\int_R f_{LnX}(x)f_{Ln(\frac{1}{Y})}(t-x)\,dx=e^{-t}\int_{-\infty}^{\min(0,t)}e^{2x}\,dx=\frac{e^{-|t|}}{2}$. On montre que

$\mathbb{E}Z=\int_{\mathbb{R}}t\frac{e^{-|t|}}{2}\,dt=0$ et $VZ=2$.