

PROJET DE MODELISATION
Sujet Environnement
Modélisation d'un microcosme de laboratoire

Fosset Jean
Goedert Marie
Simon Pierre-Yves

Table des matières

I-	Introduction	3
II-	Equations du modèle	3
	Présentation du modèle	3
	Compréhension du modèle	5
	Résolution d'une équation	8
	Les équations E1 et E2	8
III-	Résolution numérique	8
	Explicitation du schéma	8
	Solution numérique	10
IV-	Critique du modèle	12
V-	Conclusion	14

I- Introduction

On s'intéresse dans ce rapport à l'étude d'un microcosme composé de 2L d'eau synthétique, de daphnies (petit crustacé de 6mm de longueur maximum) et d'algues microscopiques (microalgue verte de quelques μm de diamètre). Les essais se déroulent sous une lumière de 2000lux allumée 16h/jour ainsi que d'une aération par bullage qui permet un renouvellement rapide du CO_2 nécessaire aux végétaux (pour la photosynthèse) et de l' O_2 nécessaire aux daphnies.

Ainsi, dans ce circuit fermé :

-les microalgues prélèvent les nutriments du milieu et épuisent celui-ci. Leur croissance est considérée limitée. On considère qu'au départ, toutes les microalgues sont en suspensions, puis elles tombent au fond de l'aquarium à cause de la sédimentation (vu leur densité supérieur à 1). On tiendra compte dans la modélisation que la sédimentation des microalgues discrimine les algues encore en suspension. Ainsi, il y a deux types de microalgues qui réagissent différemment aux toxiques et interagissent différemment avec les daphnies.

-les daphnies consomment une partie des microalgues et augmentent ainsi leur taille. Elles se reproduisent à partir de 9-10jours, mais on ne s'intéressera pas, dans un 1^{er} temps à leur reproduction pour simplifier le modèle : les jeunes étant retirés régulièrement (rendant ce phénomène négligeable).

II- Equations du modèle

Présentation du modèle

Au vu de ce qui est écrit, on modélise le système par le couplage d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} = \mu_1 \cdot N_1(t) \cdot \left(1 - \frac{N_1(t)}{K_1(t)}\right) - s \cdot N_1(t) - D_1(t) \cdot g_1(t) & (E1) \\ \frac{dN_2(t)}{dt} = \mu_2 \cdot N_2(t) \cdot \left(1 - \frac{N_2(t)}{K_2(t)}\right) + s \cdot N_1(t) - D_2(t) \cdot g_2(t) & (E2) \\ \frac{dL(t)}{dt} = k \cdot (L_\infty - L(t)) & (E3) \end{cases}$$

Avec :

- $N_1(t)$: la population de microalgues en suspension, soit leur nombre (sans unité).

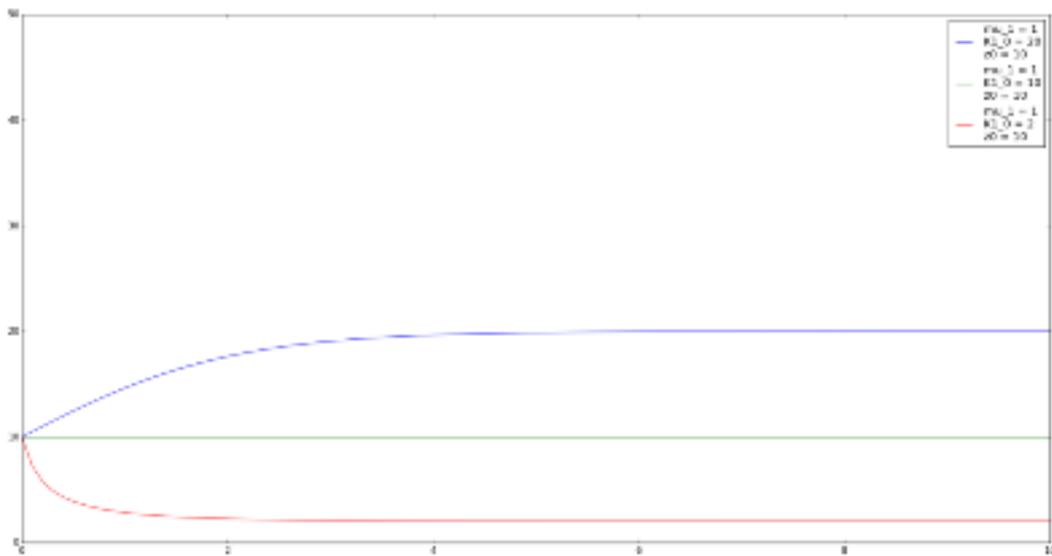
- $N_2(t)$: la population de microalgues sédimentée, soit au fond de l'aquarium (sans unité).
- μ_1 : le taux de croissance des microalgues en suspension, soit la facilité qu'ont les microalgues en suspension à se développer (en $jour^{-1}$).
- μ_2 : le taux de croissance des microalgues en sédimentation, soit la facilité qu'ont les microalgues en sédimentation à se développer (en $jour^{-1}$).
- s : taux de sédimentation des microalgues, soit leur facilité à se sédimenté plus ou moins vite (en $jour^{-1}$).
- $K_1(t) = K_1(0) \cdot e^{-s \cdot t}$: où $K_1(t)$ représente la capacité limite, en nombre de cellule, des microalgues en suspension à l'instant t (sans unité).
- K_2 : la capacité limite, en nombre de cellules des microalgues sédimentées, considéré fixe (sans unité).
- d : taux de mortalité naturelle des daphnies (en $jour^{-1}$).
- δ : représente le ratio pour lequel la moitié des daphnies vivantes broutent dans la colonne d'eau (sans unité).
- $D_s(t) = D_s(0) \cdot e^{-d \cdot t}$: représente le nombre total de daphnies à l'instant t (sans unité).
- $D_1(t) = D_s(t) \cdot \frac{N_1(t)}{N_1(t) + \delta \cdot N_2(t)}$: représente le nombre de daphnies broutant dans la colonne d'eau les microalgues en suspension (sans unité).
- $D_2(t) = D_s(t) - D_1(t)$: représente le nombre de daphnies broutant les microalgues sédimentées au fond de l'aquarium (sans unité).
- $L(t)$: taille des daphnies à l'instant t (en mm).
- L_∞ : représente la taille maximale que peuvent atteindre les daphnies (en mm).
- k : représente le taux de croissance des daphnies, soit leur capacité à grandir plus ou moins vite (en $jour^{-1}$).
- $f(t) = \alpha \cdot L(t)^\gamma$: représente le taux de filtration en mL/daphnies/jour, soit le taux de microalgues ingérées par les daphnies en mL et par jour. On remarque que celle-ci dépend de la taille des daphnies. α et γ sont des paramètres sans unités définissant le système (en mL/daphnies/jour).
- $V_1(t) = V_1(0) \cdot e^{-s \cdot t}$: représente le volume occupé par les microalgues en suspension à l'instant t (en mL).
- V_2 : représente le volume occupé par les algues sédimentées que l'on considèrera fixe (en mL).
- $g_1(t) = f(t) \cdot \frac{N_1(t)}{V_1(t)}$: représente le taux de microalgues en suspension ingérées par les daphnies par unité de temps (en $jour^{-1}$).
- $g_2(t) = f(t) \cdot \frac{N_2(t)}{V_2}$: représente le taux de microalgues sédimentées ingérées par les daphnies par unité de temps (en $jour^{-1}$)

Compréhension du modèle

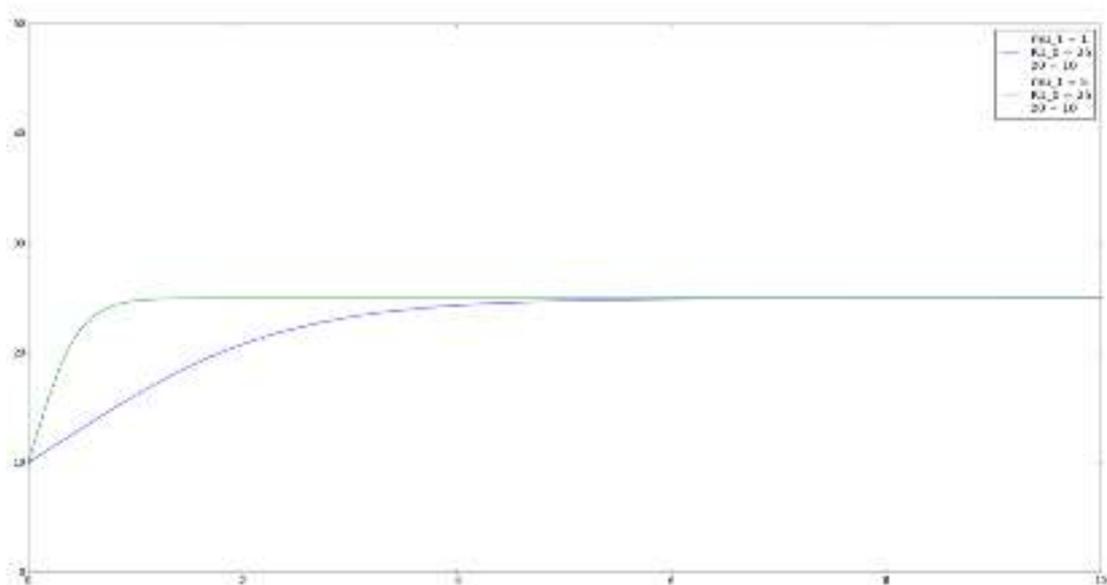
Afin de bien comprendre le modèle proposé, il est important d'étudier chaque terme des deux premières équations différentielles. Commençons par (E1), (E2) n'en sera qu'analogue.

- $\mu_1 \cdot N_1(t) \cdot \left(1 - \frac{N_1(t)}{K_1(t)}\right)$: C'est le modèle proposé par Verhulst. Il considère que la natalité et la mortalité de l'être vivant étudié (ici, une microalgue) est une fonction affine décroissante/croissante. Lorsque $K_1(t)$ est constant (disons $K_1(0)$), la solution de l'équation différentielle :

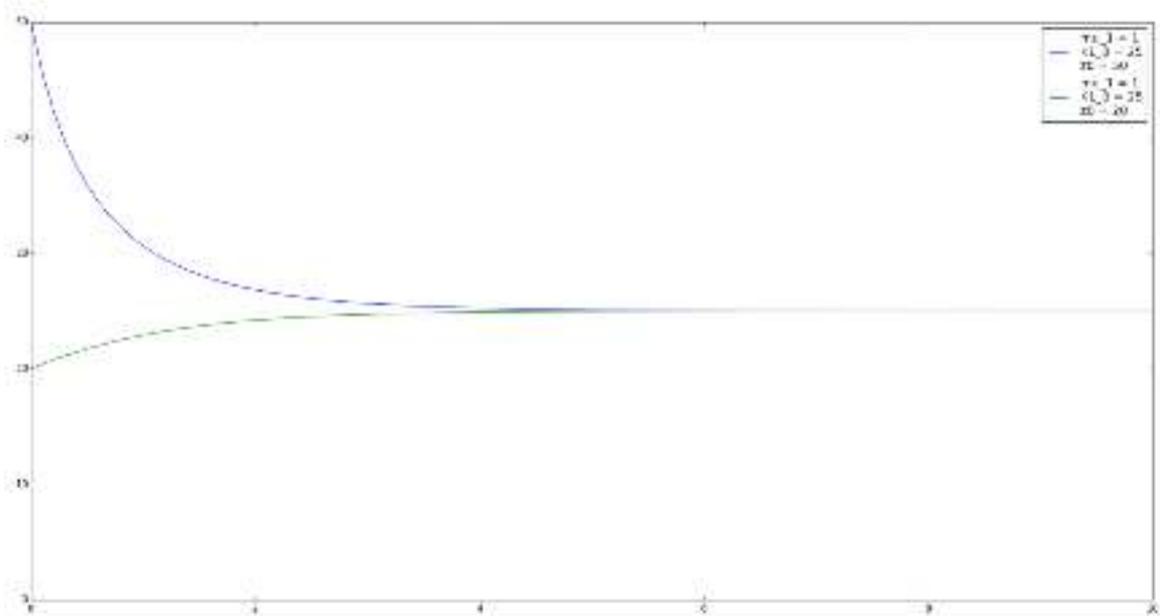
$\frac{dN_1(t)}{dt} = \mu_1 \cdot N_1(t) \cdot \left(1 - \frac{N_1(t)}{K_1(t)}\right)$ tend vers la capacité d'accueil limite, plus ou moins vite selon le facteur μ_1 et ce peu importe la capacité initial de l'espèce.



Modification de $K_1(0)$, les autres paramètres étant constants

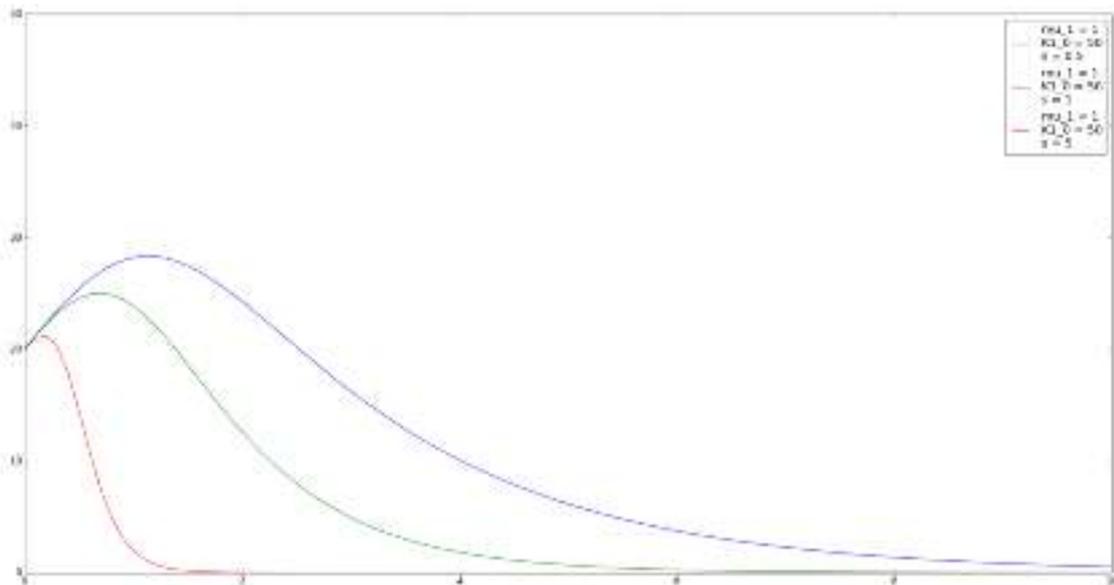


Modification de μ_1 , les autres paramètres étant constants

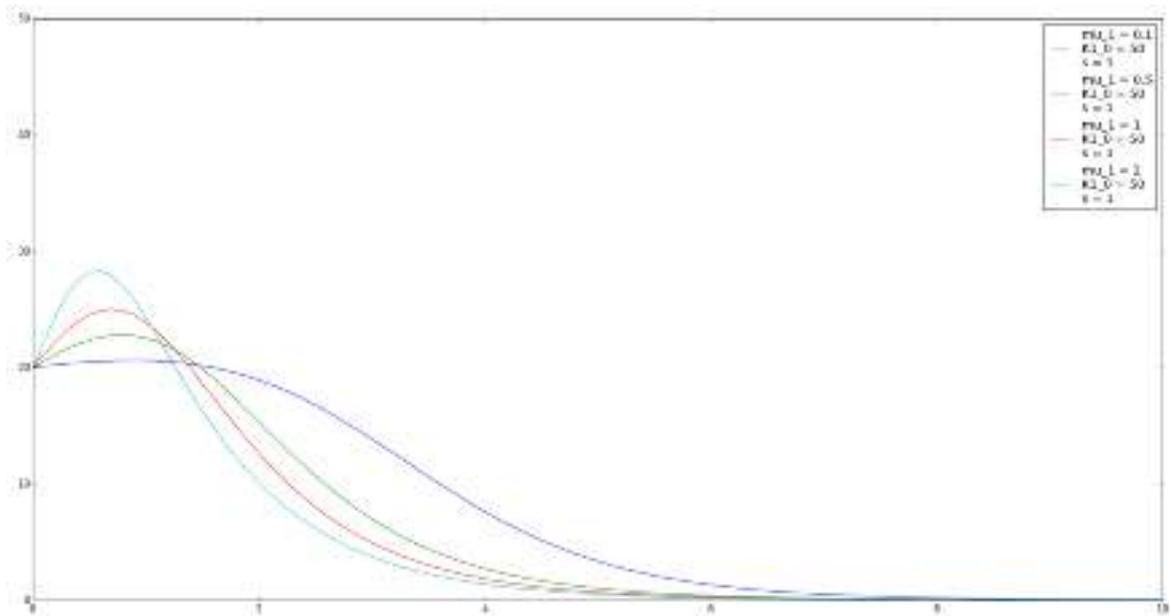


Modification de z_0 : la capacité initiale, les autres paramètres étant constants.

Lorsque $K_1(t)$ est une fonction du temps (ici exponentielle décroissant), il arrive un moment où la capacité limite est quasi nulle, ainsi, la population de l'espèce tend inévitablement vers 0, bien que le coefficient μ_1 peut avoir une influence au début de l'étude, pour amener l'espèce à augmenter jusqu'à sa capacité limite.



Modification du facteur s dans l'exponentielle, les autres paramètres constants.



Modification de μ_1 sans changement des autres paramètres.

- $-s \cdot N_1(t)$: ce terme signifie simplement qu'une partie des microalgues de sédiments, ainsi, elles ne sont plus en suspension.
- $-D_1(t) \cdot g_1(t)$: cette partie est un peu plus compliquée à expliquer. Elle prend en compte le nombre de microalgues mangées par les daphnies.

$D_1(t)$ représentant le nombre de daphnies broutant dans la colonne d'eau et $g_1(t)$ leur taux d'ingestion. $D_1(t)$ s'écrit comme le produit du nombre de daphnies totales ($D_s(t)$) par un pourcentage du nombre de microalgues présent dans la colonne d'eau ($N_2(t)$ étant pondéré par δ car les daphnies ont tendance à brouter plus dans la colonne que dans le fond de l'aquarium). $g_1(t)$ lui est le produit du taux de filtration des algues (qui dépend de la taille des daphnies selon une relation puissance), par le rapport du nombre de microalgues en suspension sur leur volume occupé (volume qui diminue selon une relation exponentielle).

Passons désormais à (E2) :

- $\mu_2 \cdot N_2(t) \cdot \left(1 - \frac{N_2(t)}{K_2}\right)$: même remarque que précédemment, K_2 étant cette fois-ci constant.
- $+s \cdot N_1(t)$: terme analogue à celui vu précédemment. Il correspond au nombre d'algues qui se sont sédimentées, augmentant ainsi leur population.
- $-D_2(t) \cdot g_2(t)$: analogue à précédemment, correspond au nombre d'algues sédimentés broutés par les daphnies. $D_2(t)$ se déduit de $D_1(t)$ par une simple différence avec le nombre de daphnies totales, et $g_2(t)$ est analogue à $g_1(t)$, le volume occupé par les microalgues sédimentées étant constant.

Résolution d'une équation

Une des premières remarques que l'on peut faire est que l'équation (E3) est découplée des deux autres équations. On peut donc la résoudre indépendamment des autres.

Ainsi, en posant $\widetilde{L}(t) = L(t) - L_\infty$, l'équation (E3) devient :

$$\frac{d\widetilde{L}(t)}{dt} = -k \cdot \widetilde{L}(t)$$

Qui se résout instantanément, d'où $\widetilde{L}(t) = C \cdot e^{-k \cdot t}$. Finalement, en prenant $t=0$ pour trouver la valeur de la constante C, on arrive à :

$$L(t) = L_\infty + (L(0) - L_\infty) \cdot e^{-k \cdot t}$$

Les équations E1 et E2

Intéressons nous maintenant aux deux autres équations du système. Ainsi, on peut commencer par dire que les équations (E1) et (E2) ne sont pas autonomes (pour rappel, un système d'équation différentiel est dit autonome s'il s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}, \text{ ainsi les fonctions } f \text{ et } g \text{ ne font pas intervenir la variable de temps.}$$

Pour exemple l'équation $y(t)' = y(t)$ est autonome tandis que $y(t)' = t \cdot y(t)$ ne l'est pas). En effet, les fonctions $K_1(t)$, $g_1(t)$ ou $D_s(t)$ par exemple font intervenir le temps au travers d'exponentielle. Ainsi, le système ne répond pas à la définition d'équation différentielle autonome.

III- Résolution numérique

Explicitation du schéma

Avec les paramètres donnés, intéressons nous à la résolution numérique de ce système. Pour cela, nous allons implémenter le schéma de Runge-Kutta 4 sur Python. On utilisera cette méthode car, comme son nom l'indique, elle est d'ordre 4 (ainsi, l'erreur totale commise est en $O(h^4)$). De plus, c'est un schéma explicite : ainsi il est plus facile à mettre en place qu'un schéma implicite. Enfin, la méthode est certes plus longue à mettre en œuvre qu'un des schémas d'Euler, mais a une meilleure précision et est couramment utilisée.

Voici donc le script utilisé :

```

25 def Lt(t):
26     return linf+t*(1-linf)*np.exp(-k*t)
27
28 def ltvect(X):
29     n=len(X)
30     lx=[]
31     for i in range(0,n):
32         nouv=linf+t*(1-linf)*np.exp(-k*X[i])
33         lx.append(nouv*1e8) #on multiplie juste pour pouvoir afficher tt avec les autres courbes.
34     return lx
35
36 def fh(t):
37     return alp*pow(t**(1+gamma))
38
39 def KI(t):
40     return KI_0*np.exp(-s*t)
41
42 def VI(t):
43     return vI_0*np.exp(-s*t)
44
45 def DS(t):
46     return ds_0*np.exp(-d*t)
47
48 def f(t,y1,y2):
49     ny1=au1*y1**(1-1/2)+y1/KI(t)*(1-s*y1-DS(t)*(y1/(y1+ds(t)*y2))**m(t)-y1/VI(t))
50     ny2=au2*y2**(1-1/2)/K2_0*(1-s*y1-DS(t)*(1-(y1/(y1+ds(t)*y2))**m(t))*y2/v2_0)
51     return [ny1,ny2]
52
53 def RK(h,I):
54     #Ia ou commence la simulation, I étant l'intervalle de temps de la simulation et h son pas.
55     en=I[0]
56
57     #initialisation de n1 et n2
58     zna=n1_0
59     znb=0
60
61     #nombre de fois où on va tourner dans la simulation
62     n=int(abs(I[1]-I[0])/h)
63
64     #initialisation des listes qui vont contenir les points de n1(t), n2(t) et t
65     lx=I[0]
66     lza=[zna]
67     lzb=[znb]
68
69     #Runge Kutta 4 boucle
70     for i in range(0,n):
71         #calcul de K1
72         xn1=xn
73         zn1a=zna
74         zn1b=znb
75         nv=f(xn1,zn1a,zn1b)
76         k1a=nv[0]
77         k1b=nv[1]
78
79         #calcul de K2
80         xn2=xn+h/2
81         zn2a=zna+h*k1a/2
82         zn2b=znb+h*k1b/2
83         nv=f(xn2,zn2a,zn2b)
84         k2a=nv[0]
85         k2b=nv[1]
86
87         #calcul de K3
88         xn3=xn+h/2
89         zn3a=zna+h*k2a/2
90         zn3b=znb+h*k2b/2
91         nv=f(xn3,zn3a,zn3b)
92         k3a=nv[0]
93         k3b=nv[1]
94
95         #calcul de K4
96         xn4=xn+h
97         zn4a=zna+h*k3a
98         zn4b=znb+h*k3b
99         nv=f(xn4,zn4a,zn4b)
100         k4a=nv[0]
101         k4b=nv[1]
102
103         #Initialisation des nouvelles valeurs
104         zna=lza[i]+h*(k1a/6 + k2a/3 + k3a/3 + k4a/6)
105         znb=lzb[i]+h*(k1b/6 + k2b/3 + k3b/3 + k4b/6)
106         xn=lx[i]+h
107
108         lza.append(zna)
109         lzb.append(znb)
110         lx.append(xn)
111     return [lx,lza,lzb]

```

Solution numérique

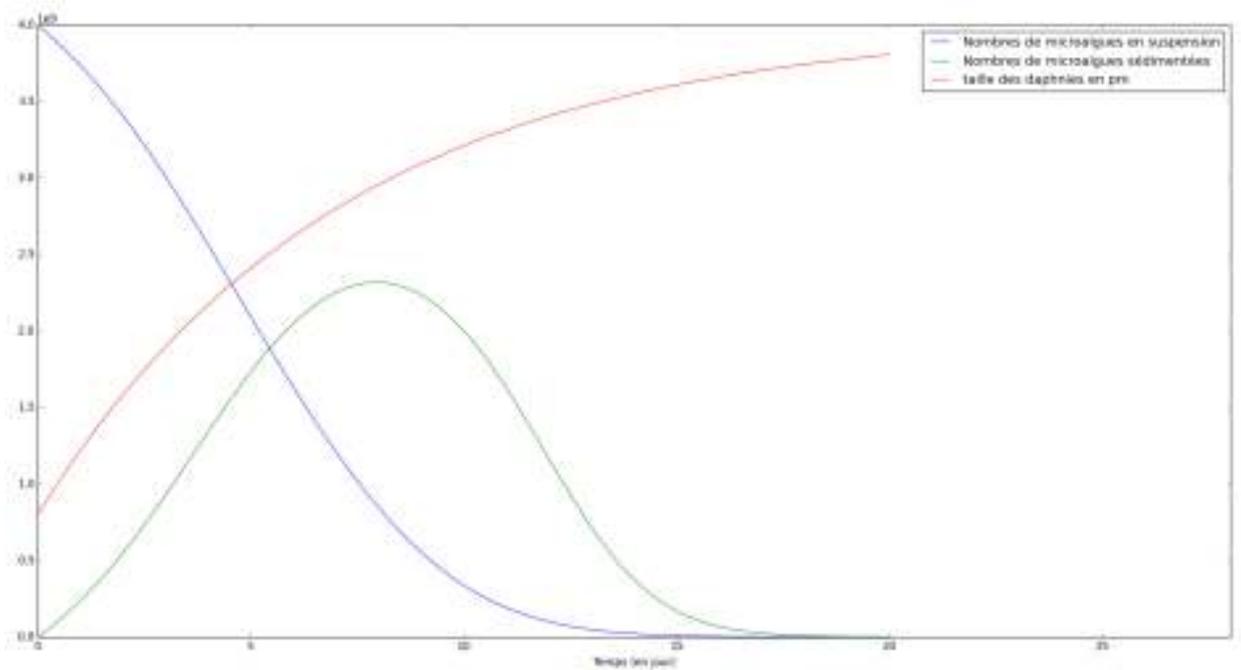
Ainsi, à l'aide de ce schéma numérique, il est possible de visualiser les courbes de $N_1(t)$, $N_2(t)$ et $L(t)$. On prendra donc les valeurs des paramètres données par l'énoncé, soit :

```
8 s=0.05 #à 0.15
9 n1_0=4e9
10 mu1=0.4#à 0.7
11 mu2=0.4#à 0.7
12 K1_0=4e9 #à 5e9
13 K2_0=3e9 #à 4e9
14 k=0.14 #à 0.15
15 l_0=0.8 #à 1mm
16 l_inf=4 #à 6
17 v1_0=2000 #mL
18 v2_0=100 #mL
19 alp=3.94 #à 7.31
20 gamma=2.91 #à 3.75
21 ds_0=10
22 d=0.013 #à 0.03
23 delt=0.005 #à 0.37
```

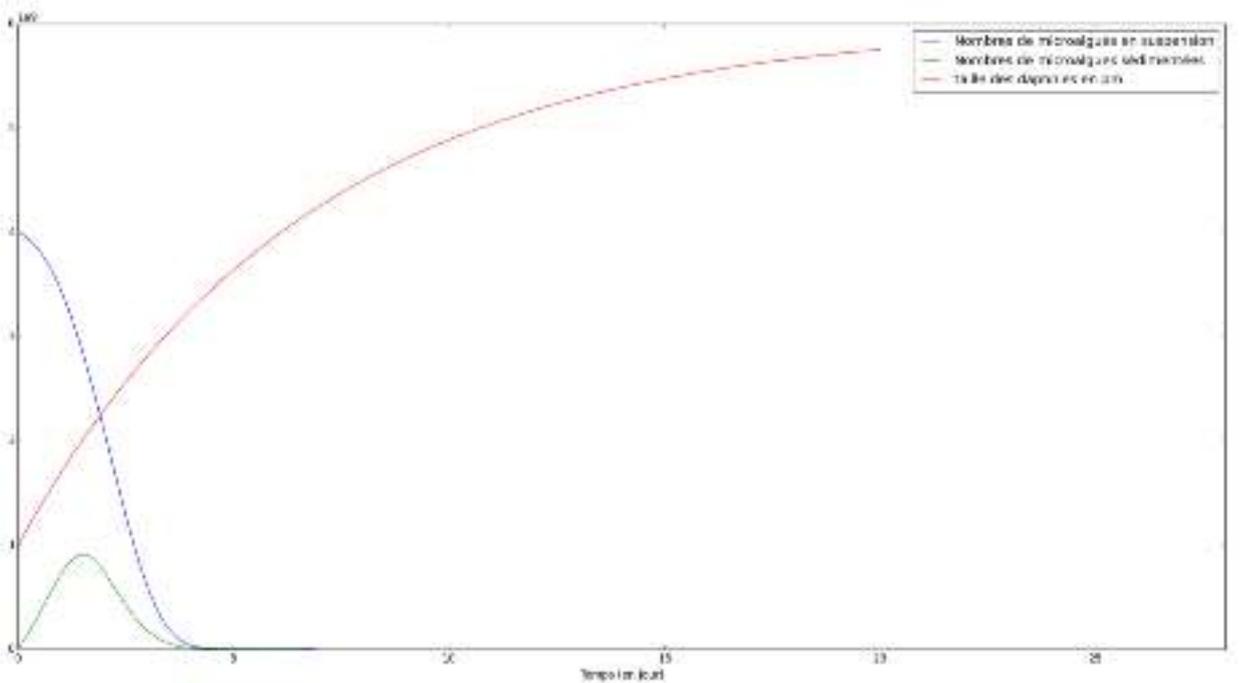
Et la fonction de traçage :

```
117 def tracer(h,I):
118     l=RK(h,I)
119     X=l[0]
120     Y1=l[1]
121     Y2=l[2]
122     Y3=Ltvect(X)
123     plt.clf()
124     plt.plot(X,Y1,label='Nombres de microalgues en suspension')
125     plt.plot(X,Y2,label='Nombres de microalgues sédimentées')
126     plt.plot(X,Y3,label='taille des daphnies en pm')
127     plt.xlabel('Temps (en jour)')
128     plt.legend()
129     plt.show
```

Ce qui nous donne :



Et pour les valeurs maximales :



Ainsi, on remarque qu'au bout de 20 jours pour la première simulation, toutes les algues ont été mangées, tandis que cela, est fait bien avant 5 jours pour la deuxième simulation. D'où l'influence de certains paramètres.

IV- Critique du modèle

Le modèle présenté ne peut pas avoir d'état d'équilibre tel qu'il est : en effet, vu que l'on considère une ressource de nourriture illimitée pour les daphnies, le nombre total de microalgues n'a pas vraiment d'influence sur la mortalité naturelle des daphnies. Ainsi, même s'il n'y a plus de microalgues, les daphnies continuent à se nourrir et à se développer, ce qui n'est pas cohérent avec la réalité (sauf si on considère que l'on rajoute alors de la nourriture autre que celle déjà présente pour nourrir les daphnies). Ainsi, il faudrait rajouter une quatrième équation, couplé aux autres, qui gère le nombre de daphnies au sein de l'aquarium qui dépendrait naturellement du nombre de microalgues présent dans l'aquarium.

Avec ce nouveau système qui se rapproche de celui de Lockta-Volterra, autrement appelé proies-prédateurs, notre modèle changerait drastiquement. Le nombre de daphnies présents dépendrait alors de leur taux de naissance (comme les microalgues déjà présentes), mais aussi de leur mortalité naturelle. De plus, la mortalité des daphnies dépendrait aussi de la nourriture présente au sein de l'aquarium. Ainsi, $D_s(t)$ ne serait plus une fonction exponentielle décroissante du temps, mais une équation différentielle qui se rajouterait au système déjà existant. On pourrait d'ailleurs l'écrire :

$$\frac{dD_s(t)}{dt} = D_s(t) \cdot \left(\psi \cdot N(t) - \frac{D_s(t)}{K_D} \right)$$

Où K_D représenterait la capacité limite en nombre de cellule des daphnies et ψ un taux de reproduction des daphnies en fonction des microalgues mangées, d'où la multiplication avec $N(t)$, qui représente ici le nombre total de microalgues. Ainsi, lorsqu'il n'y aurait plus de microalgues, il n'y a aucune croissance des daphnies possibles, vu qu'il n'y a aucune nourriture présente dans l'aquarium, elles meurent. Ce qui, pendant ce temps-ci, laisse le temps aux microalgues de se développer et d'augmenter leur population. Ainsi, la population de daphnies peut de nouveau augmenter, le cycle peut recommencer.

Si on ne suppose pas une réserve illimitée de nourriture, alors l'équation (E3) n'est plus découplée des 2 premières équations. En effet, en considérant la réserve illimitée, on considère que les daphnies ne manquent jamais de nourriture, peu importe le nombre de microalgues présent dans l'aquarium. Ainsi leur croissance n'est pas affectée. Cependant, en considérant que la source de nourriture est unique et vient des microalgues, si celles-ci venaient à disparaître, les daphnies arrêteront de grandir et mourront. Le système est alors modifié ainsi, et un état d'équilibre peut alors être atteint. On pourrait par exemple écrire cette équation comme ceci :

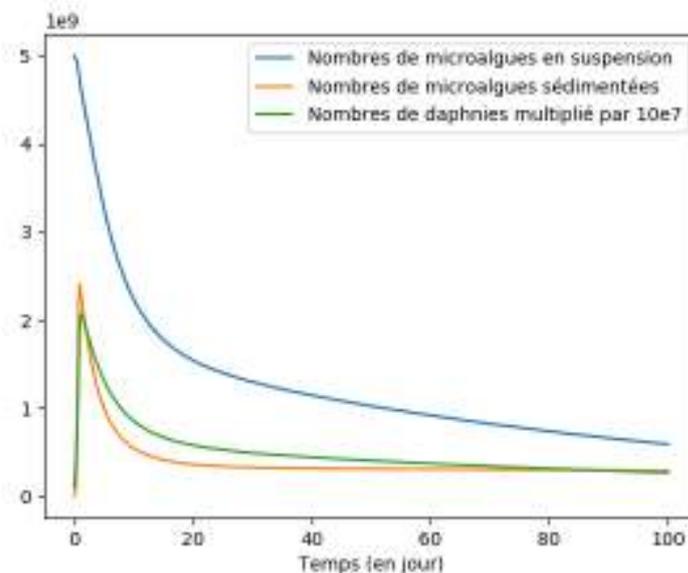
$$\frac{dL(t)}{dt} = k^* \cdot N(t) \cdot (L_\infty - L(t))$$

k^* serait alors un nouveau taux de croissance des daphnies qui serait fonction du nombre de microalgues présentes. Ainsi, lorsqu'il n'y a plus de microalgues, les daphnies ne grandissent plus, et plus leur nombre est importante, plus elles se développent plus vite.

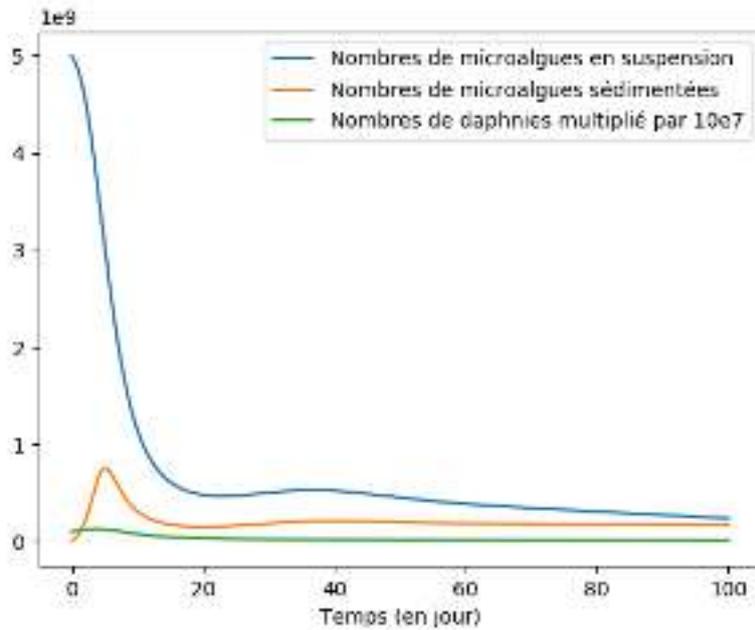
Remarque : les équations sont juste proposées à titre d'exemple et peuvent ne pas représenter la réalité. Ce sont juste pour donner une « idée » de comment on pourrait les écrire en s'inspirant de ce qui a été proposé.

Si on voulait avoir un système plus complet, il faudrait alors implémenter ces deux nouvelles équations dans notre système, le rendant alors plus compliqué. Cependant, il serait difficile de trouver des valeurs correctes aux nouvelles constantes rajoutées et de changer les valeurs des constantes déjà introduites pour obtenir des résultats « intéressant », comme des solutions périodiques, à l'instar du système de Lockta-Voltera.

Remarque : on a essayé par exemple en ajoutant seulement l'équation de régulation des daphnies sans prendre en compte la taille de celle-ci. Ainsi, des résultats similaires à cette figure ont été obtenus :



Sur cette figure, on remarque que les daphnies connaissent au début une augmentation de leur population, puis le système devient « instable » : toutes les microalgues sédimentées sont mangées par les daphnies et la croissance de ces dernières n'est pas assez suffisante pour compenser le phénomène. A la fin, toutes les espèces meurent (pour $\psi = 1e9 \text{ jour}^{-1}$).



Ici, c'est l'inverse, la croissance des daphnies n'est pas assez forte en comparaison à leur taux de mortalité. Ainsi, elles meurent toutes et les microalgues sont livrées à elle-même (pour $\psi = 0.1e9 \text{ jour}^{-1}$).

V- Conclusion

Pour conclure, on peut voir que le modèle, bien qu'assez complet, atteint assez vite ses limites. En effet, des solutions périodiques n'ont pas été trouvées (du moins avec l'encadrement des valeurs proposées), et il ne prend pas en compte la mortalité des daphnies dues à l'absence de nourriture, ce qui n'est pas très représentatif de la réalité. De plus, l'évolution de la taille des daphnies est certes intéressante, et permet de faire dépendre leur taux d'ingestion en fonction de celle-ci, mais étant découplé du système, elle aurait pu directement être présentée comme fonction dépendant du temps (comme la fonction $D_s(t)$). Ainsi, il aurait été, à notre sens, plus judicieux, de remplacer cette troisième équation différentielle, par une autre faisant intervenir le nombre de daphnies. Cependant, en ajoutant ces paramètres, le modèle devient certes plus complet et se rapproche du réel, mais est plus difficile à mettre en œuvre, et les valeurs plus difficiles à trouver pour trouver des solutions réalistes. Là, réside toute la complexité de vouloir mettre en équation le déroulement d'un écosystème.