Cours de Méthodes de la Recherche opérationnelle.

Test Final.

J.P. Lebacque.

Equipe enseignante:
Nicolas Chiabaut, Thierry Garaix, Emmanuel Gourdon, Megan Khoshyaran, Jean-Patrick Lebacque, Salim Mammar, Kiarash Motamedi, Raksmey Phan

Avril 2018

Durée du test: 2 heures.

- Il vous est recommandé de passer environ 20 mn sur le premier exercice (Kruskal), 30 mn sur le second (Ordonnancements), 40 mn sur le troisième (Programmation Dynamique) et 30 mn sur le quatrième (Programmation linéaire).
- Documents autorisés: polycopié, notes de cours.
- Tous les appareils électroniques (calculettes, téléphones portables, tablettes...) sont interdits.

1 Exercice 1: algorithme de Kruskal.

Trouvez l'arbre maximum de poids minimum dans le graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{X}, \mathcal{U})$ dont les sommets sont $\mathcal{X} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ et les arcs $\mathcal{U}$ (non orientés) sont les couples (I, J), pour $I, J \in \mathcal{X}$. Les poids des arcs sont donnés par le tableau suivant.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-	15	35	46	31	42	25	45
B		-	21	48	44	49	51	37
C			-	32	10	17	45	41
D				-	38	52	40	16
E					-	47	12	54
F						-	26	36
G							-	53
H								-

Tableau 1

Le problème sera résolu par l'algorithme de KRUSKAL.

2 Exercice 2: cheminements et ordonnancements simples.

On considère le problème d'ordonnancements simples dont les données sont décrites par le tableau qui suit:

Tâches	Durée	Contraintes
A	15	Début + 2
B	10	Début + 8, Début (A) +1/3 (A)
C	6	Fin (A)
D	7	Fin (B)
E	10	Fin (C) + 2, Fin (F) + 6
F	12	Début (A) + 2/3 (A), Début (B) + 1/2 (B) + 9, Début (D) + 2
G	12	Début (E) + 1/2 (E), Fin(F), Fin(D) + 3

Le format de description des contraintes est celui du cours.

1. Faites la liste des sommets, de leurs prédécesseurs et de leurs successeurs, la liste des arcs et de leurs coûts. Dessinez le graphe du problème.

2. Calculez la durée minimale du projet, et pour chaque tâche sa date au plus tôt, sa date au plus tard, sa marge. Quelles sont les tâches critiques? On autorise une marge de 3 jours pour la fin du projet: quel est l'impact sur les dates au plus tôt, au plus tard, sur les marges.

Il est demandé d'utiliser la *Méthode Potentiel-Tâches* à l'exclusion de toute autre.

3 Exercice 3: Programmation Dynamique

Un fabricant de tôles utilise des bandes de 14 mètres de large. Il peut découper dans la largeur des bandes de 1, 2 ou 3 mètres de large, qu'il revend sous forme de rouleaux au prix de 20, 30 et 80 Euros respectivement. Soient $i = 1, 2, 3$ les types types de rouleaux, et soient x_i le nombre de rouleaux de type i découpées dans une bande de 14 mètres.

Sachant que les chutes sont perdues, montrez que le problème de découpe optimale se met sous la forme:

$$(K) \qquad \begin{array}{l} Max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\ x_i \in \mathbb{N} \quad \forall i = 1, \ldots, n \end{array} \right. \end{array}$$

avec $\mathbb{N}$= ensemble des entiers naturels. Notez que b vaut 14, $n = 3$, et que les a_i et les c_i sont donnés par le tableau suivant:

i	1	2	3
c_i	20	30	80
a_i	1	2	3

$-\frac{9}{7} \times 2$

$-\frac{18}{7}$

3.0.1 Question 1.

Montrez que le problème (K) peut se mettre sous la forme

$$(H) \qquad \begin{array}{l} Max \sum_{i=0}^{n} c_i x_i \\ \left| \begin{array}{l} \sum_{i=0}^{n} a_i x_i = b \\ x_i \in \mathbb{N} \quad \forall i = 0, \ldots, n \end{array} \right. \end{array}$$

avec $a_0 = 1$, $c_0 = 0$. Interprétez la variable x_0.

Montrez que le problème (H) peut se mettre sous la forme

$$(L) \qquad \begin{array}{l} Max \sum_{i=0}^{n} c_i x_i \\ \left| \begin{array}{l} y_0 \in \{0, 1, \ldots b\} \\ y_n = b \\ y_{i+1} = y_i + a_{i+1} x_{i+1} \quad \forall i = 0, \ldots, n-1 \\ x_i, y_i \in \mathbb{N} \quad \forall i = 0, \ldots, n \end{array} \right. \end{array}$$

3.0.2 Question 2.

Le problème (L) peut se résoudre dans le cadre de la programmation dynamique. Quels sont les états, les commandes et l'équation d'état associées à (L). Donnez des bornes pour les états et les commandes.

Montrez que l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman s'écrit:

$$V_{i+1}(y_{i+1}) = \max_{\left(\begin{array}{l} y_i + a_{i+1} x_{i+1} = y_{i+1} \\ y_i \in \mathbb{N},\ x_{i+1} \in \mathbb{N} \end{array} \right)} [V_i(y_i) + c_{i+1}\, x_{i+1}]$$

Montrez qu'on peut réécrire l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman ainsi:

$$V_{i+1}(y_{i+1}) = \max_{\left(\begin{array}{l} x_{i+1} \in \mathbb{N} \\ a_{i+1} x_{i+1} \leq y \end{array} \right)} [V_i(y_{i+1} - a_{i+1} x_{i+1}) + c_{i+1}\, x_{i+1}]$$

pour $i = 0, \ldots, n-1$. Précisez l'ensemble des y_{i+1} admissibles. La récurrence est initialisée par

$$V_0(y_0) = 0 \quad \forall y_0 \in \{0, 1, \ldots b\}$$

3.0.3 Question 3.

Résolvez l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman par récurrence. Vous en déduirez la découpe optimale.

Le résultat était prévisible, expliquez pourquoi.

4 Exercice 4: Programmation linéaire

On considère le programme linéaire suivant:

$$
(1) \qquad \max_{x_1,x_2} (-x_1 + 4x_2) \quad \left| \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.
$$

$2x + 3y$

$x = 2y - 10$

$y = 2 + 2x$

$2x = 6 - 3y$

$x = 3 - \frac{3}{2}y$

1. Représentez graphiquement le problème dans le plan (x_1, x_2).
2. Faites la liste des bases réalisables du problème.
3. Mettez le problème sous forme standard.
4. Appliquez la méthode de la variable artificielle pour initialiser le simplexe.
5. Appliquez le simplexe primal; vous obtiendrez une solutions infinie.
6. Donnez une représentation paramétrique du rayon infini.