DEMI-PROMO B
PREMIER TEST
DE CALCUL SCIENTIFIQUE
30 MARS 2005
DUREE 2h

EXERCICE 1 (barème : 4+2)

Dans le plan réel muni d'un repère orthonormé xOy on considère les 8 points : $A(0;0)$, $B(0;3)$, $C(3;3)$, $D(3;0)$, $K(1;1)$, $L(1;2)$, $M(2;2)$, $N(2;1)$. On note Γ_1 la frontière du carré ABCD, Γ_2 la frontière du carré KLMN et Ω l'ouvert contenu entre ces deux frontières. On considère alors le problème suivant :

$$\begin{cases} u(x,y) - \Delta u(x,y) = 4xy \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u(x,y) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \\ u(x,y) = 1 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \end{cases}$$

Discrétiser ce problème par différences finies, en prenant un pas constant $h = 1/2$ dans les deux directions du plan. On numérotera les points utiles du maillage $(i/2, j/2)$ avec $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, par colonnes, de bas en haut et de gauche à droite. En déduire la matrice A du système linéaire obtenu ainsi que le second membre b. On écrira la matrice A avec des termes diagonaux positifs.

EXERCICE 2 (barème : 1+3+3)

On considère le système linéaire $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 8 & 0 \\ 3 & 3 & 9 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que l'algorithme de factorisation LU sans pivotation de la matrice A ne peut pas être exécuté jusqu'au bout.

2) Effectuer la décomposition LU de la matrice PA où P est la matrice de permutation suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Résoudre le système linéaire $Ax = b$ en utilisant la factorisation trouvée à la question précédente. On pourra soit faire le calcul exact, soit un calcul numérique avec 6 décimales.

EXERCICE 3 (barème : 1+1+3.5+1.5)

On considère la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et le vecteur $b \in \mathbb{R}^2$.

1) Peut-on résoudre le système linéaire $Ax = b$ avec la méthode de Jacobi?

2) Calculer la matrice d'itération L_ω de la méthode S.O.R, appliquée au système linéaire $Ax = b$.

3) Calculer les valeurs propres de L_ω en fonction de ω, en spécifiant dans quels domaines de ω, elles sont réelles ou complexes.

4) La méthode SOR converge-t-elle? Si oui, quel est le meilleur choix pour la valeur du paramètre ω?

PERHERIN Céline 1AG5

30/03/05

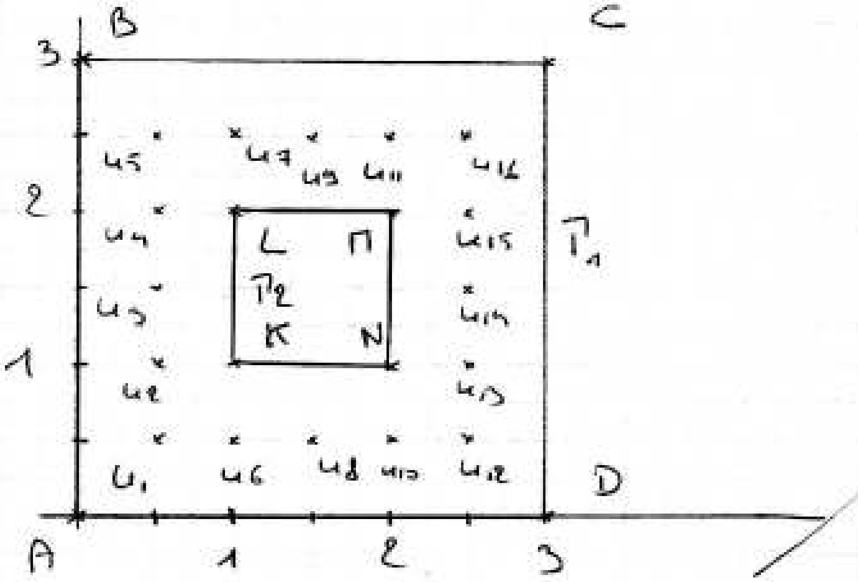
Calcul Scientifique

Test n° 1

13,0/20

Exercice 1 :

5,5pt/10



Pour les points intérieurs, on peut utiliser la formule générale du poly page 28.

$$-\Delta_h u(P) = \frac{1}{h^2}\left(4u(P) - \sum_{i=1}^{4} u(P_i)\right)$$

Pour les points 1 à 16 intérieurs on a donc

$$u(P) + \frac{1}{h^2}\left(4u(P) - \sum_{i=1}^{4} u(P_i)\right) = 4xy$$

$$u(P) + 4\left(4u(P) - \sum_{i=1}^{4} u(P_i)\right) = 4xy$$

$$17u(P) - 4\sum_{i=1}^{4} u(P_i) = 4xy$$

$$17u_1 - 4u_2 - 4u_6 = 1$$
$$17u_2 - 4u_1 - 4u_3 - 4 = 2$$
$$17u_3 - 4u_2 - 4u_4 - 4 = 3$$
$$17u_4 - 4u_3 - 4u_5 - 4 = 4$$
$$17u_5 - 4u_4 - 4u_7 = 5$$
$$17u_6 - 4u_1 - 4u_8 - 4 = 2$$
$$17u_7 - 4u_5 - 4u_9 - 4 = 10$$
$$17u_8 - 4u_6 - 4u_{10} - 4 = 3$$
$$17u_9 - 4u_7 - 4u_{11} - 4 = 15$$
$$17u_{10} - 4u_8 - 4u_{12} - 4 = 4$$
$$17u_{11} - 4u_9 - 4u_{16} - 4 = 20$$
$$17u_{12} - 4u_{10} - 4u_{13} = 5$$
$$17u_{13} - 4u_{12} - 4u_{14} - 4 = 10$$
$$17u_{14} - 4u_{13} - 4u_{15} - 4 = 15$$
$$17u_{15} - 4u_{14} - 4u_{16} - 4 = 20$$
$$17u_{16} - 4u_{15} - 4u_{11} = 25$$

d'où

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 5 \\ 6 \\ 14 \\ 7 \\ 19 \\ 8 \\ 24 \\ 5 \\ 14 \\ 19 \\ 24 \\ 25 \end{pmatrix}$$

et $A =$

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
17 & -4 & 0 & 0 & 0 & -4 & & & & & & & & & & \\
-4 & 17 & -4 & & & & & & & & & & & & & \\
 & -4 & 17 & -4 & & & & & & & & & & & & \\
 & & -4 & 17 & -4 & & & & & & & & & & & \\
 & & & -4 & 17 & 0 & -4 & & & & & & & & & \\
-4 & & & & & 17 & & -4 & & & & & & & & \\
 & & & & -4 & & 17 & & -4 & & & & & & & \\
 & & & & & -4 & & 17 & & -4 & & & & & & \\
 & & & & & & -4 & & 17 & & -4 & & & & & \\
 & & & & & & & -4 & & 17 & & -4 & & & & \\
 & & & & & & & & -4 & & 17 & & & & & -4 \\
 & & & & & & & & & -4 & & 17 & -4 & & & \\
 & & & & & & & & & & & -4 & 17 & -4 & & \\
 & & & & & & & & & & & & -4 & 17 & -4 & \\
 & & & & & & & & & & & & & -4 & 17 & -4 \\
 & & & & & & & & & & -4 & & & & -4 & 17
\end{pmatrix}
$$

Mettre au moins des zéros autour des nombres non-nuls!

Les autres termes étant nuls (r

Exercice 2: $\frac{6{,}0\,pt}{7}$

1) A est décomposable en L.U si et seulement si tous les Dk sont nuls. Dk étant le determinant des k premières lignes et k premières colonnes de A.
Ici $1 < k < 4$

Or $D_2 = 2 - 2 = 0$ 1

L'algorithme de factorisation ne peut donc être exécuté

2)

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 8 & 0 \\ 3 & 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 9 & 8 \end{pmatrix} = (PA)_1$$

On utilise la méthode du pivot de Gauss

$$(PA)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$(PA)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$$

$(PA)_2 = G_1 (PA)_1$ avec $G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$g_{i1} = -\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$

$(PA)_3 = G_2 (PA)_2$ avec $G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$g_{i2} = -\frac{a_{i3}^{(2)}}{a_{\cancel{2}3}^{(2)}}$

$$U = (PA)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L = G^{-1} = G_1^{-1} G_2^{-1}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $G^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

PERHÉRIN
Céline
1A G5

On effectue la vérification

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 9 & 8 \end{pmatrix} = A$$

3

3) $Ax = b$

$L.Ux = b$

$Ux = L^{-1}b$

On peut résoudre ce système directement puisque L est triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Détails !

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 1 \\ 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_4 = -3 \end{cases}$$

2,0

$$\begin{cases} x_4 = -1 \\ x_3 = 1/3 \\ x_2 = -13/6 \\ x_1 = 23/6 \end{cases}$$

oui

Exercice 3: 1,5 pt

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

~~A n'est pas à diagonale strictement dominante~~
~~On a pas $3 \geq |-4|$ donc la méthode de Jacobi ne converge pas. Sa limite n'est donc pas solution du système. On ne peut pas utiliser Jacobi.~~
~~On peut → convergente~~

$J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda_{1,2} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$

2) $A = D - E - F \qquad A = M - N$

avec $M = \frac{1}{\omega} D - E$ et $N = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) D + F$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{\omega} & 0 \\ -2 & \frac{3}{\omega} \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\omega} - 1\right)3 & 4 \\ 0 & \left(\frac{1}{\omega} - 1\right)3 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{3} & 0 \\ \frac{2\omega^2}{9} & \frac{\omega}{3} \end{pmatrix}$$

0,5

$$L_\omega = M^{-1} N = \begin{pmatrix} (\omega - 1) & \frac{4\omega}{3} \\ -\frac{2\omega(\omega-1)}{3} & \frac{8\omega^2}{9} - \omega + 1 \end{pmatrix}$$

3) Calcul des valeurs propres

$$P = \begin{vmatrix} \omega - 1 - x & \frac{4\omega}{3} \\ \frac{2\omega(\omega-1)}{3} & \frac{8\omega^2}{9} + \omega - 1 - x \end{vmatrix} = (\omega - 1 - x)\left(\frac{8\omega^2}{9} + \omega - 1 - x\right) - \frac{4\omega \, 2\omega(\omega-1)}{9}$$

$$P(x) = \frac{\left(9x + 2\omega\sqrt{2(2\omega^2 + 9\omega - 9)} - 4\omega^2 - 9\omega + 9\right)}{81} \times \left(9x - 2\omega\sqrt{2(2\omega^2 + 9\omega - 9)} - 4\omega^2 - 9\omega + 9\right)$$

Erreur de signe !

Les valeurs propres sont donc les valeurs annulant $P(x)$

$$\lambda = \pm \frac{2\omega\sqrt{2(2\omega^2 + 9\omega - 9)} - 4\omega^2 - 9\omega + 9}{9}$$

Pour ω réel les valeurs propres sont donc réelles.

4) La méthode est convergente si le rayon spectral est inférieur à 1 donc si

$$\left| \frac{2\omega\sqrt{2(2\omega^2+9\omega-9)}-4\omega^2-9\omega+9}{9} \right| < 1$$

0,5 !

Le meilleur choix de ω consiste à minimiser le rayon spectral afin que la méthode converge plus vite. oui

soit $f(\omega) = \dfrac{2\omega\sqrt{2(2\omega^2+9\omega-9)}-4\omega^2-9\omega+9}{9}$

$$\frac{df}{d\omega} = \frac{1}{9}\left(2\sqrt{2(2\omega^2+9\omega-9)} + \frac{2\omega\, 2(4\omega+9)}{2\sqrt{2(2\omega^2+9\omega-9)}} - 8\omega - 9 \right)$$

$$\frac{df}{d\omega} = 0 \iff \frac{4\omega(4\omega+9)}{2\sqrt{2(2\omega^2+9\omega-9)}} = -2\sqrt{2(2\omega^2+9\omega-9)} + 8\omega + 9$$

$$\iff 4\omega(4\omega+9) = -4(2(2\omega^2+9\omega-9)) + (8\omega+9) \times 2\sqrt{2(2\omega^2+9\omega-9)}$$

$$\iff 2\omega(4\omega+9) = -4(2\omega^2+9\omega-9) + (8\omega+9)\sqrt{2(2\omega^2+9\omega-9)}$$

$$\iff \omega = 1$$ Non !