

Cours de STRUCTURES :

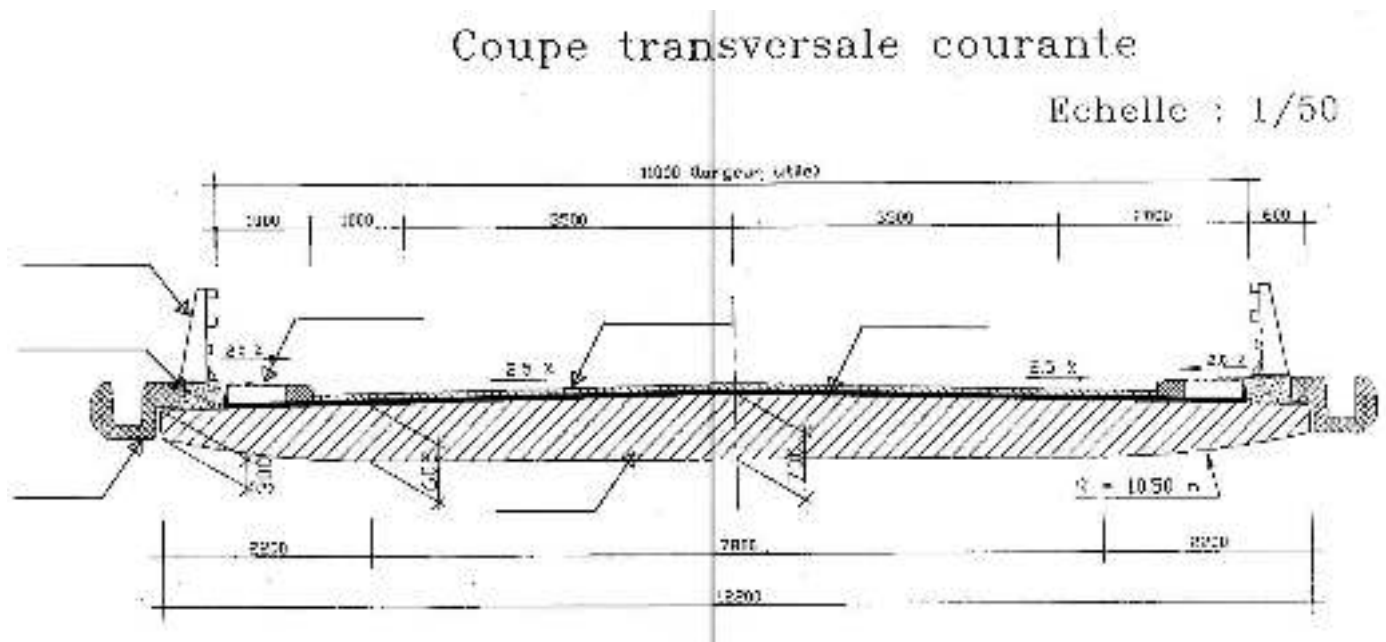
Etude de cas 2019

a)

Hypothèse sur les poutres :

- Modèle de BERNOULLI
- Problème plan
- Poutres droites, section constante
- Liaisons parfaites
- Matériau élastique linéaire

Poids propre du tablier :



Que l'on modélise par :

Un rectangle de longueur 11m et de hauteur 0,65m



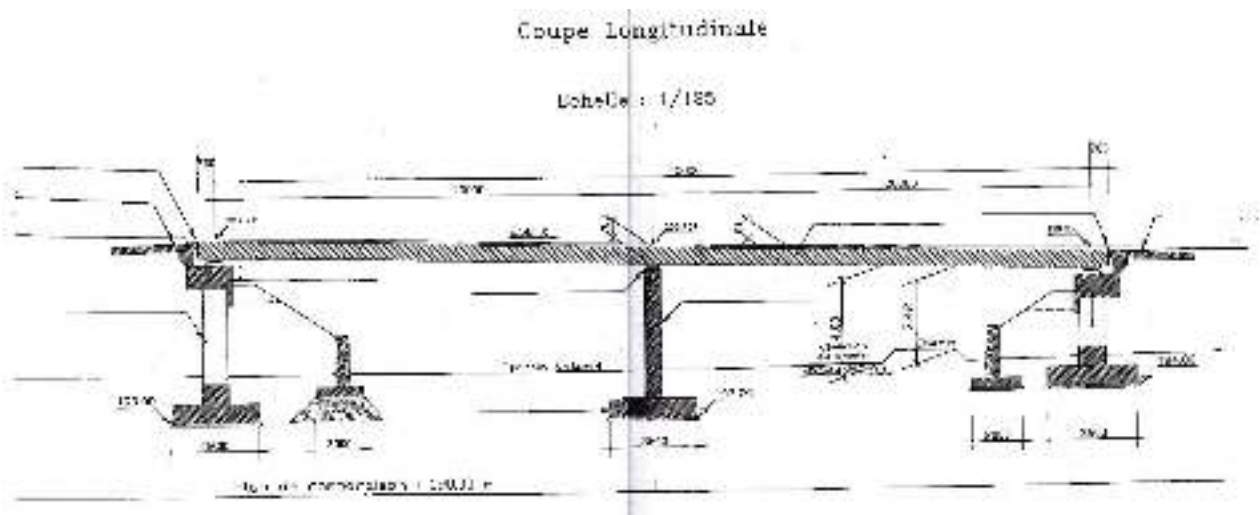
On en déduit donc une section S : $S = 7,15\text{m}^2$

La masse volumique du béton armé est d'environ 2500 kg/m^3 soit 25 kN/m^3 .

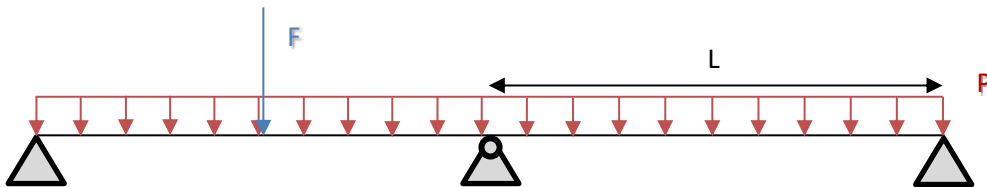
On en déduit donc la charge répartie p :

$$p = \rho_{\text{béton}} * S = 25 * 7,15 \quad \text{donc} \quad p = 179\text{ kN/m}$$

Modélisation de la structure :



Que l'on modélise par un tablier appuyé sur 2 appuis simple et une rotule. Le tablier est composé de 2 travées de longueur $L=20\text{m}$. Ce choix a été réalisé du fait que dans la pratique le tablier n'a pas la possibilité de glisser de droite à gauche, ce qui serait le cas avec 3 appuis simples.



Il est soumis à son poids propre $p \cdot 2L$ et au poids d'un poids lourd.

Chaque essieu du poids lourd exerce une force de 120 kN , il en possède 2 donc on supposera que le poids lourd exerce une force ponctuelle de 240 kN en milieu de travée car c'est dans cette situation que le moment sera maximal.

b)

Formule des 3 moments :

$$M_0 + 4M_1 + M_2 = \frac{6EI}{L}(\omega_2' - \omega_1'')$$

Nos 2 extrémités sont des appuis simples donc : $M_0 = 0$ et $M_2 = 0$, notre problème se réduit donc à :

$$M_1 = \frac{3EI}{2L}(\omega_2' - \omega_1'')$$

D'après les annexes sur les Rotations de poutre isostatique, on a :

$$\omega_2' = -\frac{pL^3}{24EI} \quad \text{et} \quad \omega_1'' = \frac{pL^3}{24EI} + \frac{FL^2}{16EI}$$

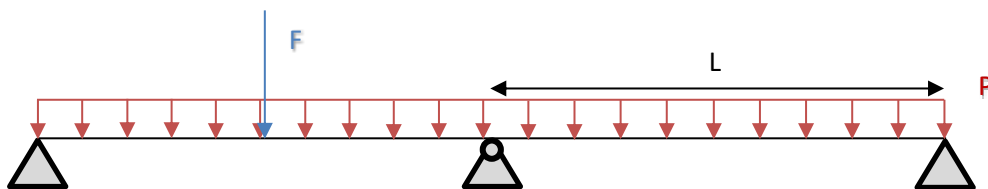
Et donc :

$$M_1 = \frac{3EI}{2L} \left(-\frac{pL^3}{24EI} - \frac{pL^3}{24EI} - \frac{FL^2}{16EI} \right) = \frac{3}{2} \left(-\frac{2pL^2}{24} - \frac{FL}{16} \right) \quad \text{donc} \quad \boxed{M_1 = -\frac{pL^2}{8} - \frac{3FL}{32}}$$

$$\text{AN:} \quad M_1 = -\frac{179 * 20^2}{8} - \frac{3 * 240 * 20}{32} = -9400 \text{ kN.m}$$

Méthode des rotations :

Pour résoudre le problème par la méthode des rotations, on a décidé de modéliser le pont comme pour la résolution de la formule des 3 moments : 2 appuis simples et l'appui du milieu est une rotule.



Pour commencer on remarque que chaque nœud a 3 inconnues en déplacement : U, V et Ω . On a donc :

$$\text{Nœud 1 : } U_1, V_1, \Omega_1$$

$$\text{Nœud 2 : } U_2, V_2, \Omega_2$$

$$\text{Nœud 3 : } U_3, V_3, \Omega_3$$

Cependant, on se rend compte que V_1, U_2, V_2 et V_3 ne sont pas des inconnues car ils sont nuls. Il nous reste donc :

$$\text{Nœud 1 : } U_1, \Omega_1$$

$$\text{Nœud 2 : } \Omega_2$$

$$\text{Nœud 3 : } U_3, \Omega_3$$

De plus, par l'hypothèse de longueurs invariantes dans les barres on obtient que $U_1=U_2=U_3=0$. Il reste alors Ω_1, Ω_2 et Ω_3 .

Ensuite, on applique la formule des moments aux extrémités en fonction des rotations de la poutre :

$$M_{ij} = \frac{4EI}{L}\Omega_i + \frac{2EI}{L}\Omega_j + \frac{6EI}{L}\Omega_{ij} + M_{ij}^o$$

Poutre 1-2 :

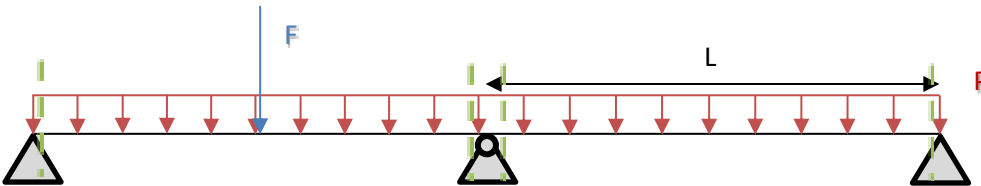
$$\left. \begin{aligned} M_{12} = \frac{4EI}{L}\Omega_1 + \frac{2EI}{L}\Omega_2 + M_{12}^o = \frac{4EI}{L}\Omega_1 + \frac{2EI}{L}\Omega_2 + \frac{FL}{8} + \frac{PL^2}{12} = 0 \\ M_{21} = \frac{2EI}{L}\Omega_1 + \frac{4EI}{L}\Omega_2 + M_{21}^o = \frac{2EI}{L}\Omega_1 + \frac{4EI}{L}\Omega_2 - \frac{FL}{8} - \frac{PL^2}{12} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \Omega_1 &= -\frac{PL^3}{48EI} - \frac{FL^2}{32EI} - \frac{\Omega_2}{2} \\ M_{21} &= -\frac{PL^2}{8} - \frac{3FL}{16} + \frac{3EI\Omega_2}{L} \end{aligned}$$

Poutre 2-3 :

$$\left. \begin{aligned} M_{23} = \frac{4EI}{L}\Omega_2 + \frac{2EI}{L}\Omega_3 + M_{23}^o = \frac{4EI}{L}\Omega_2 + \frac{2EI}{L}\Omega_3 + \frac{PL^2}{12} \\ M_{32} = \frac{2EI}{L}\Omega_2 + \frac{4EI}{L}\Omega_3 + M_{32}^o = \frac{2EI}{L}\Omega_2 + \frac{4EI}{L}\Omega_3 - \frac{PL^2}{12} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \Omega_3 &= \frac{PL^3}{48EI} - \frac{\Omega_2}{2} \\ M_{23} &= \frac{3EI\Omega_2}{L} + \frac{PL^2}{8} \end{aligned}$$

Il ne reste plus que Ω_2 comme inconnue.

Ensuite on découpe la structure pour après appliquer le PTV.



On applique le PTV à Ω_2^* avec Ω_2^* .

$$-M_{21}\Omega_2^* - M_{23}\Omega_2^* = 0$$

$$M_{21} + M_{23} = 0$$

$$\frac{3EI\Omega_2}{L} + \frac{PL^2}{8} - \frac{PL^2}{8} - \frac{3FL}{16} + \frac{3EI\Omega_2}{L} = \frac{6EI\Omega_2}{L} - \frac{3FL}{16} = 0$$

$$\Omega_2 = \frac{FL^2}{32EI}$$

On déduit donc :

$$M_{12} = 0$$

$$M_{21} = -\frac{PL^2}{8} - \frac{3FL}{32}$$

$$M_{23} = \frac{3FL}{32} + \frac{PL^2}{8}$$

$$M_{32} = 0$$

L'application numérique donne :

$$M_{12} = 0$$

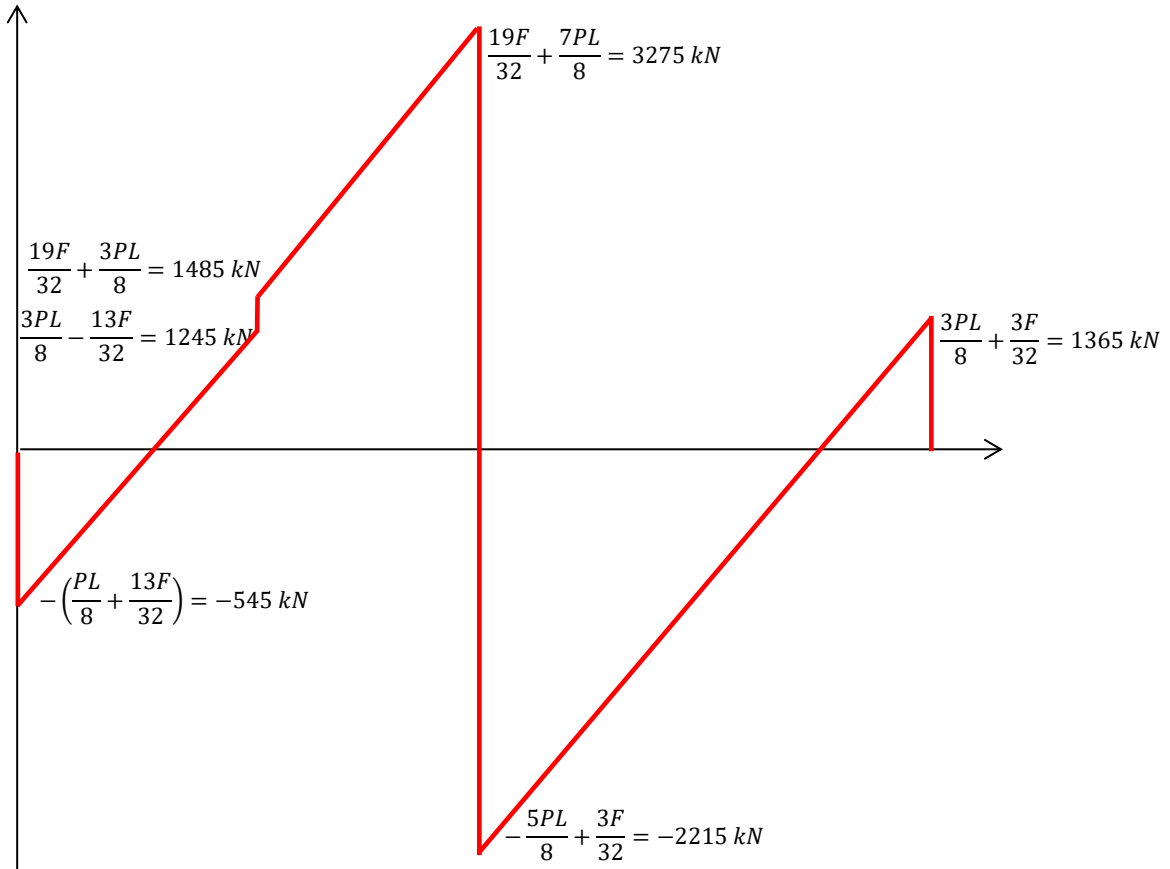
$$M_{21} = -9400 \text{ kN.m}$$

$$M_{23} = 9400 \text{ kN.m}$$

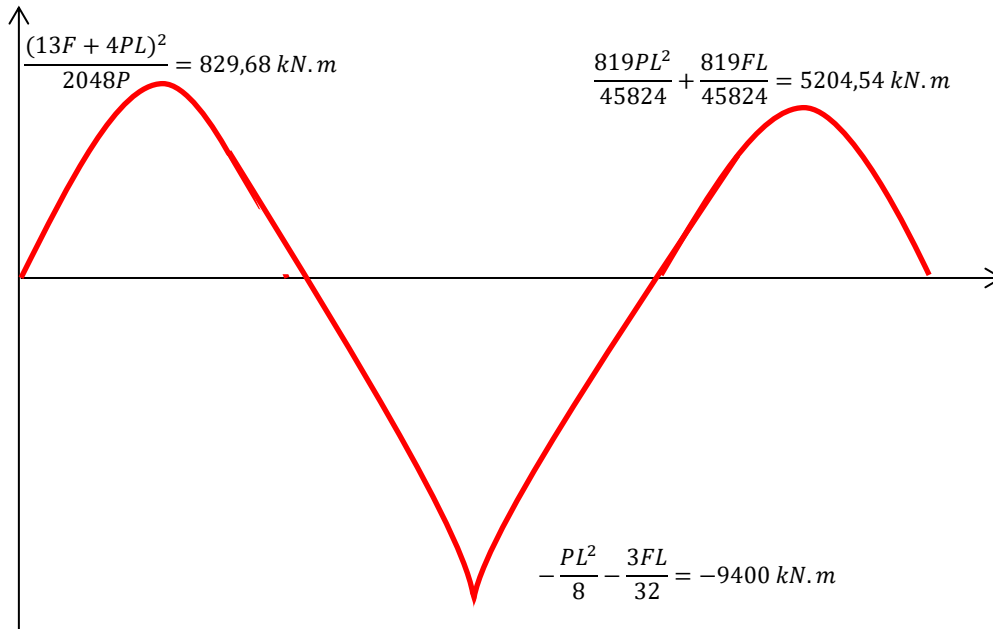
$$M_{32} = 0$$

Tracés :

V (kN)



M (kN.m)

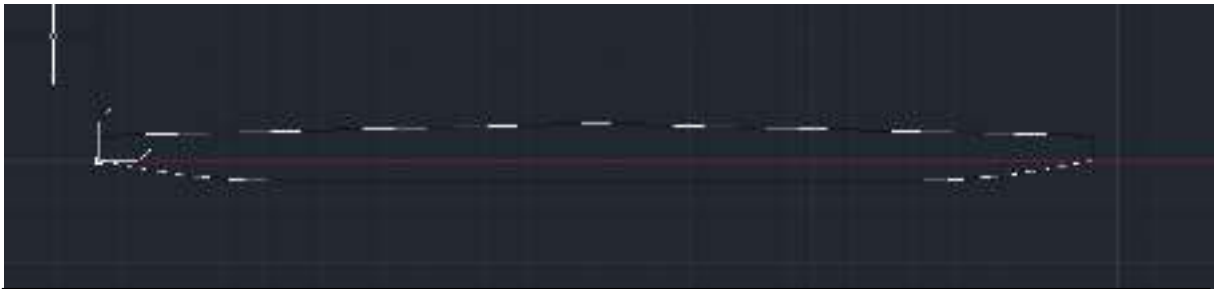


Les 2 méthodes aboutissent à un même résultat mais la méthode des 3 moments y arrive beaucoup plus vite dans cette situation.

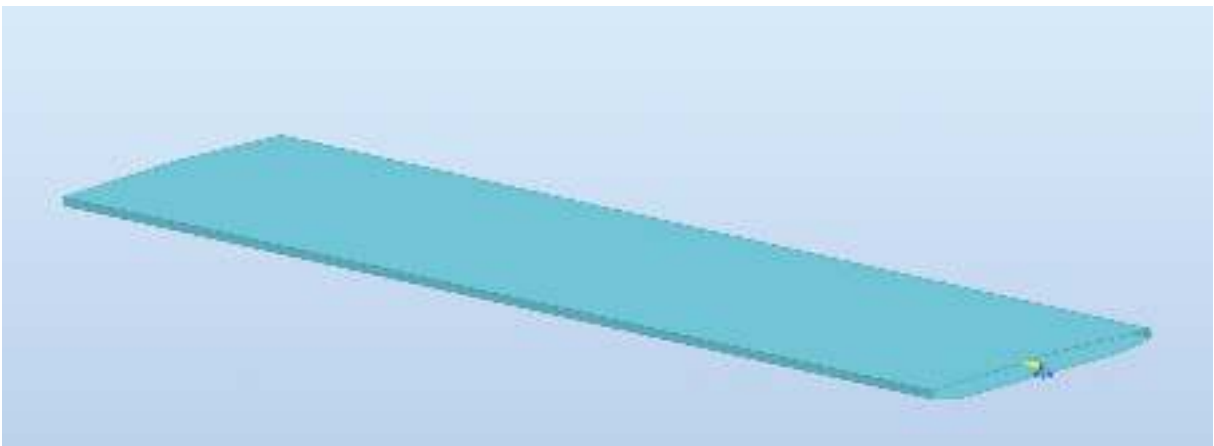
c)

Modélisation du pont :

Pour la modélisation informatique, nous avons choisi d'utiliser le logiciel Robot d'Autodesk. Nous avons dessiné la section dans Autocad puis nous l'avons importé dans Robot pour pouvoir l'exploiter.



La section du pont sur le logiciel Autocad.



Le tablier du pont sur le logiciel Robot.

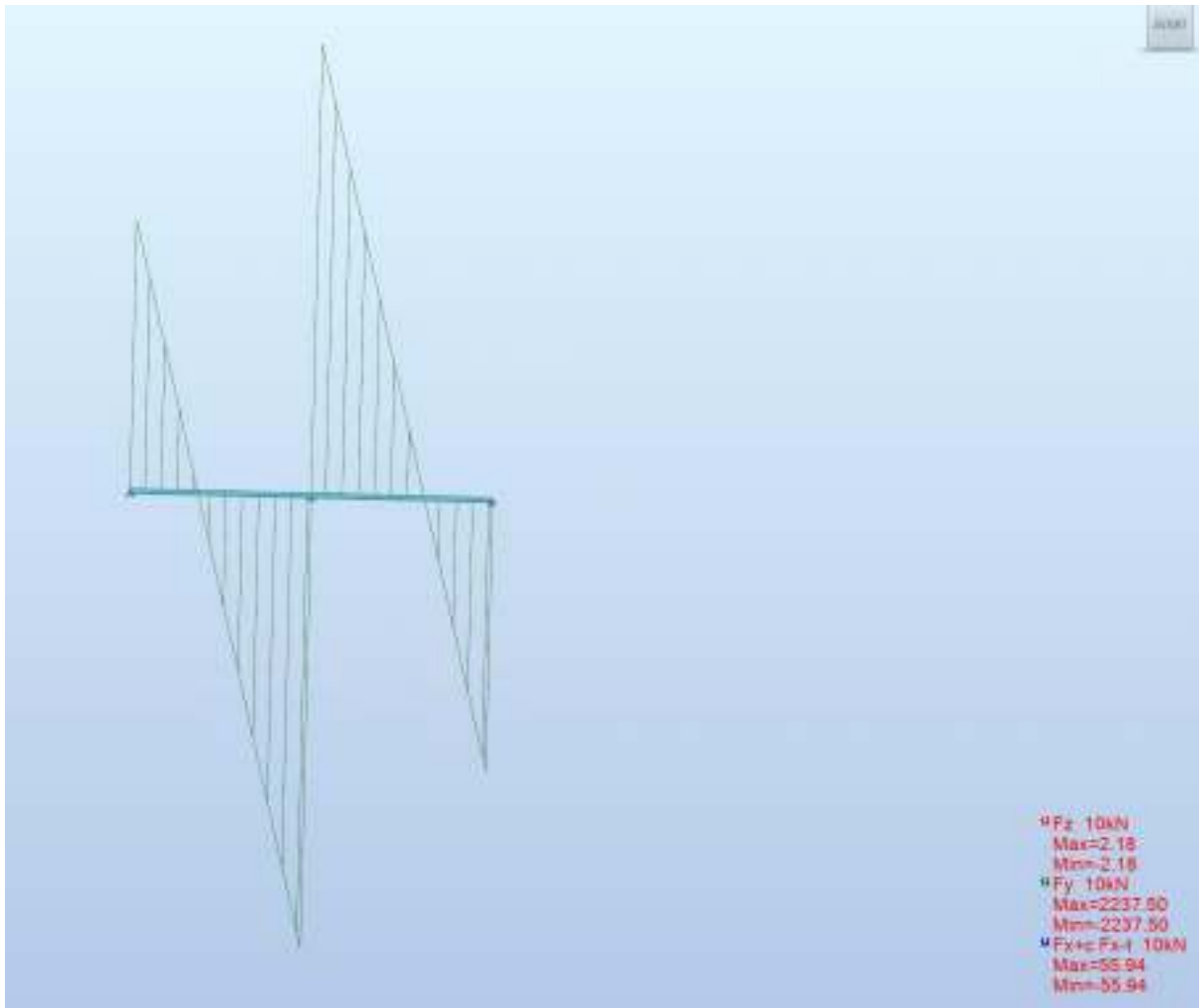
Modélisation du cas de charge permanent :

Dans un premier temps, nous avons considéré le pont sans chargement. Nous avons ainsi défini un cas de charge permanent pour modéliser le poids propre du pont :

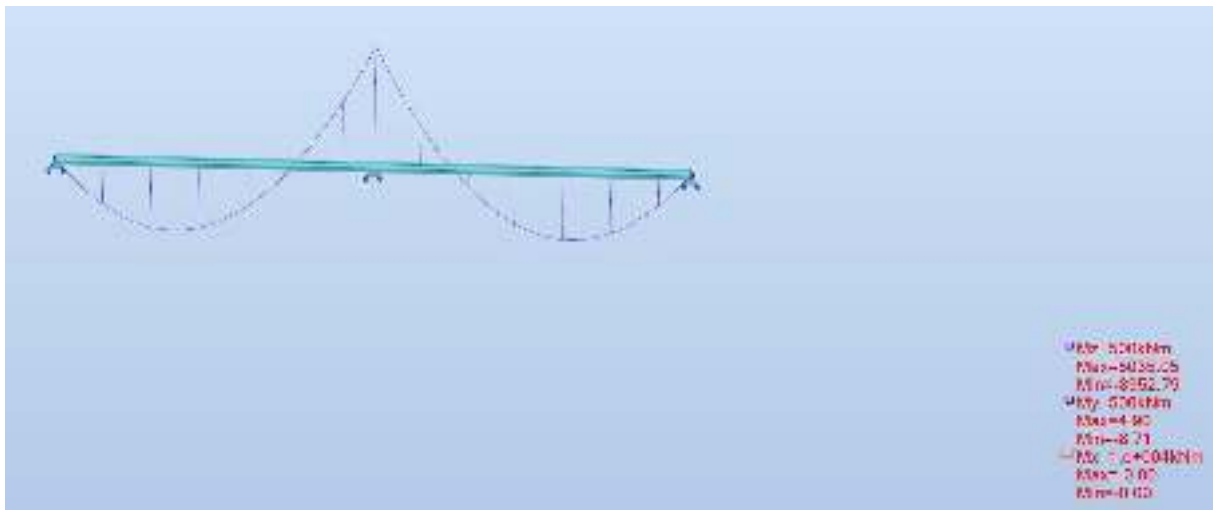


Le poids propre du pont.

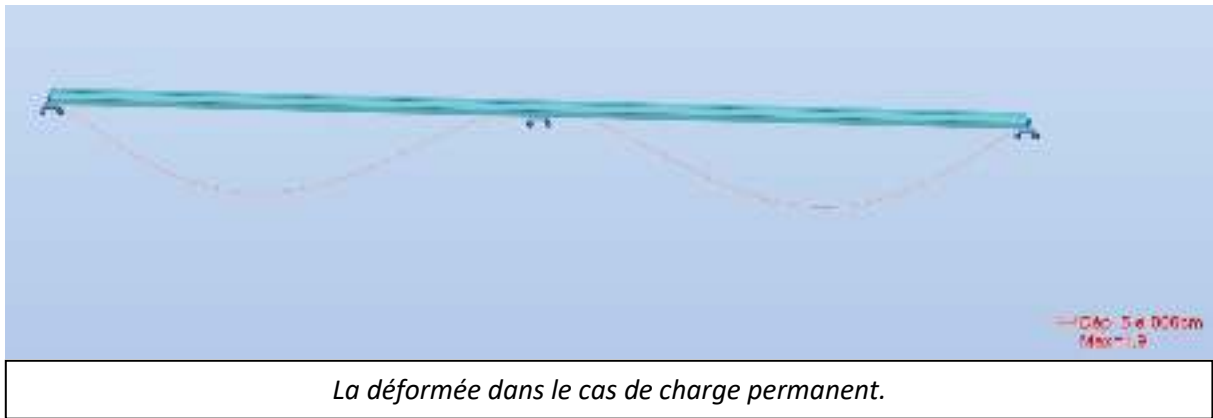
Nous avons ensuite calculé l'effort tranchant, le moment et la déformée dans le cas de ce chargement permanent.



Les efforts tranchants dans le cas de charge permanent.



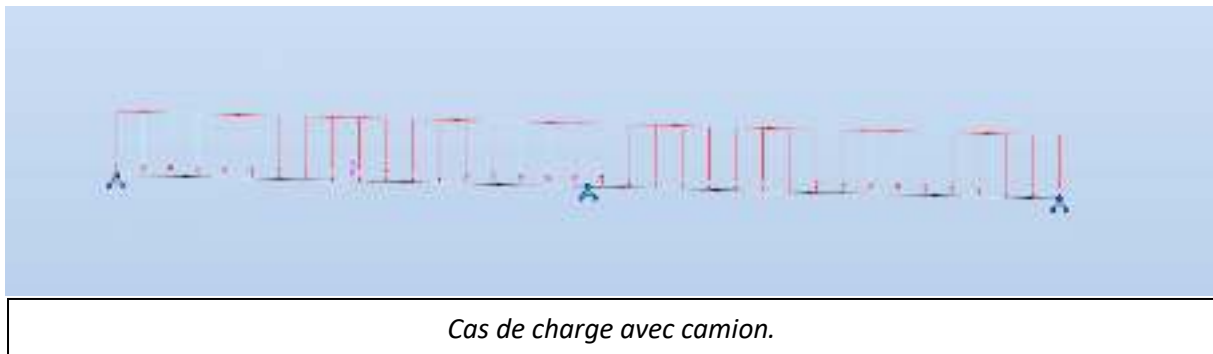
Le moment dans le cas de charge permanent



La déformée dans le cas de charge permanent.

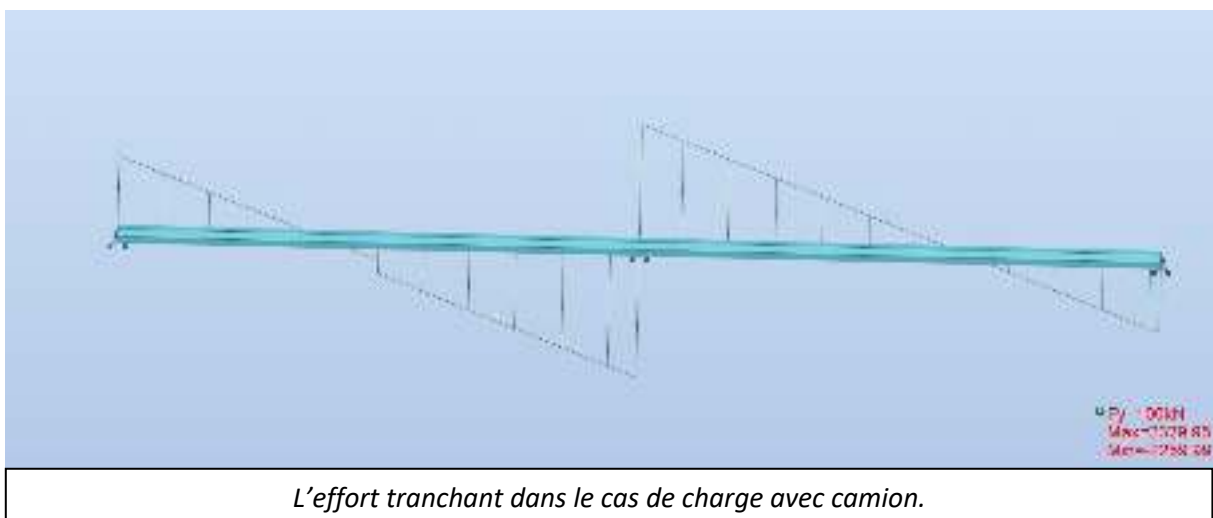
Modélisation du cas de charge avec le camion :

Nous avons ensuite ajouté la force induite par le camion sous la forme d'une charge ponctuelle placée entre deux appuis. Le choix de cette modélisation est motivé par le fait que ce point est le point critique du positionnement du camion.

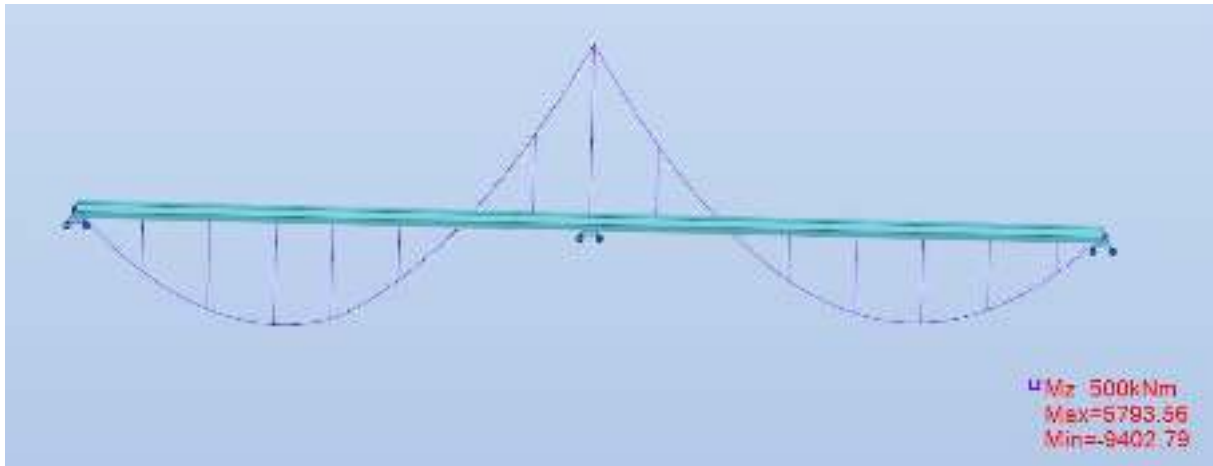


Cas de charge avec camion.

Comme précédemment nous avons calculé l'effort tranchant, le moment et la déformée.



L'effort tranchant dans le cas de charge avec camion.



Le moment dans le cas de charge avec camion.



La déformée dans le cas de charge avec camion

d)

Comparaison avec l'étude théorique :

	Effort tranchant (Max) en kN	Effort tranchant (Min) en kN	Moment Mz (Max) en kN.m	Moment Mz (Min) en kN.m
Cas théorique	3275	-2215	5204	-9400
Modélisation informatique	2379	-2259	5793	-9402
Variations	-38%	1,9%	10%	0,0%

On peut remarquer que les valeurs minimales sont très proches ce qui montre que la pertinence de notre modèle. En revanche, les valeurs maximales sont fortement différentes, notamment pour l'effort tranchant. Cela peut venir d'une modélisation trop simpliste du cas de charge ou d'hypothèses simplificatrices trop fortes. Cependant, cette différence peut être négligée au moment du calcul de l'effort normal car le moment a une plus forte influence dans le calcul de celui-ci. De plus, l'utilisation de coefficient de sécurité rend cette différence encore plus négligeable.