
Méthodes statistiques pour l'ingénieur

ENTPE - 2ÈME ANNÉE

ANNÉE 2017-2018

Toutes les réponses devront être justifiées et les résultats mis en valeur.

A. ELECTION PRÉSIDENTIELLE

Barème : 8 points

Le 2^{me} tour d'une élection présidentielle oppose le candidat A au candidat B. Pour évaluer la proportion p d'électeurs de la population souhaitant voter pour le candidat A plutôt que pour le candidat B, on tire au sort un échantillon de n individus dans une population de grande taille et on demande à chacun des individus pour lequel des deux candidats il a l'intention de voter. On associe à chaque individu sondé une variable aléatoire X_i ($i = 1, \dots, n$), telle que :

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si l'individu } i \text{ a l'intention de voter pour A} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

- A..1. (1 point) Quelle est la loi suivie par les variables aléatoires X_1, \dots, X_n ? Quelle est la loi suivie par le nombre total de personnes souhaitant voter pour A?
- A..2. (2 points) On admet que $Pr[X_i = x_i] = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$. Montrez que l'estimateur du Maximum de Vraisemblance (MV) de la probabilité de vote pour le candidat A, noté \hat{p} , est donné par

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Vous détaillerez (i) l'écriture de la log-vraisemblance et (ii) les équations vous permettant d'arriver au résultat.

- A..3. (2 point) Montrez que l'estimateur du MV \hat{p} est (i) sans biais et (ii) convergent.
- A..4. (1 point) On a compté 98 électeurs (parmi les 200 interrogés) déclarant voter pour le candidat A. Proposez une estimation ponctuelle du paramètre p .
- A..5. (1 point) Calculez un intervalle de confiance de niveau 95%, puis de niveau 98% du paramètre p en indiquant comment vous construisez l'intervalle. Comparez les deux intervalles obtenus.
- A..6. (1 point) On suppose que la vraie probabilité p que le candidat soit élu est égale à 52%. A partir de quelle taille d'échantillon, les instituts de sondage donneraient gagnant le candidat A avec une probabilité de 95%? *Remarque : on prévoit que le candidat A sera élu si la fréquence empirique \hat{p} dans l'échantillon excède 50%.*

B. INTERVALLE DE CONFIANCE

Barème : 4 points

On cherche à prévoir le taux de croissance mensuel du volume des ventes, noté X , censé être représenté par une variable aléatoire réelle de distribution normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Pour cela on considère un n -échantillon de 24 valeurs passées, notées $\{x_1, \dots, x_n\}$, supposées être indépendantes et identiquement distribuées, et de même loi que X . A partir de cet échantillon on observe que le taux de croissance moyen des ventes est égal à 2,1% et que la variance empirique corrigée, notée S^C est égale à 0,4.

- B..7. (2 points) Proposez à votre direction un intervalle de confiance pour un risque de 10% sur la valeur du taux de croissance moyen des ventes en supposant que la variance σ^2 est connue et égale à 0,4. Vous détaillerez précisément votre démarche.
- B..8. (2 points) Refaites le même exercice, mais en supposant cette fois que la variance σ^2 est inconnue. Vous détaillerez précisément votre démarche.

C. POULPES

Barème : 8 points

Dans cet exercice, nous allons comparer les poids de poulpes mâles et femelles au stade adulte. Nous disposons pour cela des données de 15 poulpes mâles et 13 poulpes femelles pêchés au large des côtes mauritaniennes. Nous souhaitons tester l'égalité des moyennes théoriques inconnues des poids des poulpes femelles (μ_1) et mâles (μ_2) avec une erreur de première espèce fixée à 5%.

C..9. (1 point) La figure suivante représente les poids des poulpes par sexe. Que pouvez-vous en dire ?

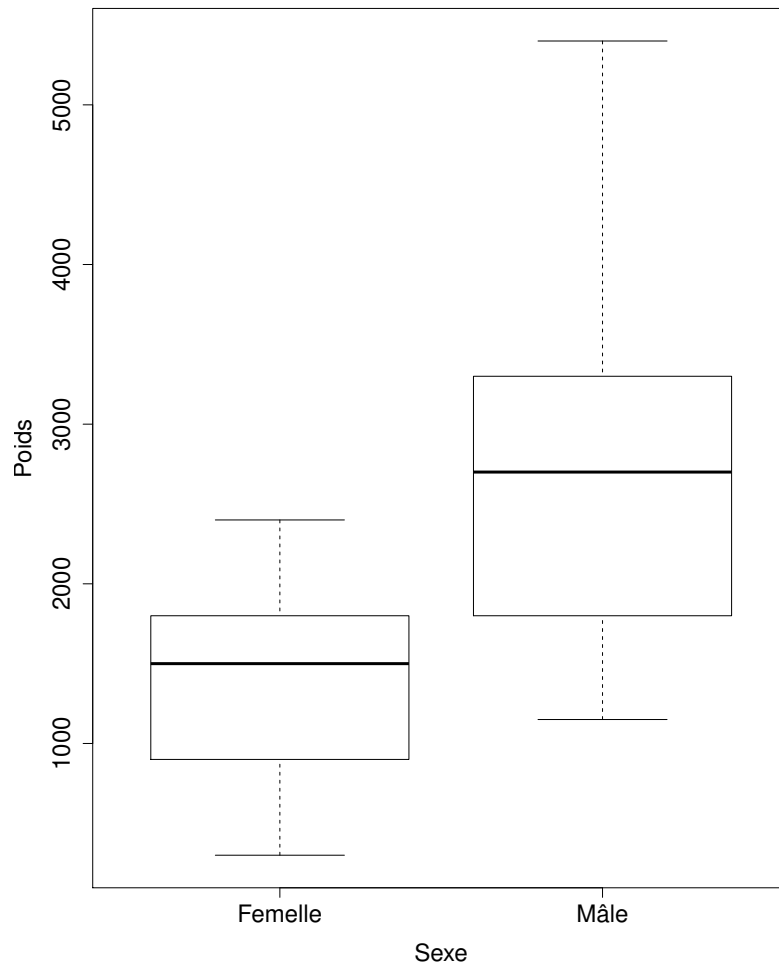


Figure 1 – Boîtes à moustaches des poids des poulpes par sexe

C..10. (1 point) La normalité des données est testée pour chaque sous-population à l'aide d'un test de Shapiro-Wilk (voir figures sur la page suivante). Interprétez les résultats de ce test pour les femelles et pour les mâles.

```

shapiro-wilk normality test
data: donnees[select.males, "Poids"]
W = 0.93501, p value = 0.3238

```

Figure 2 – Test de normalité pour les mâles

```

shapiro-wilk normality test
data: donnees[select.fem, "Poids"]
W = 0.97109, p-value = 0.9060

```

Figure 3 – Test de normalité pour les femelles

C..11. Pour comparer les moyennes des deux sous-populations mâle et femelle, il existe deux types de tests : l'un quand les variances inconnues des deux sous-populations sont différentes et l'autre quand elles sont égales. Nous devons donc commencer par tester l'égalité des variances.

C..11.a. (1 point) Ecrivez l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative relatives à ce test d'égalité des variances.

C..11.b. (1 point) De quel type de test s'agit-il?

C..11.c. (1 point) Interprétez les résultats du test donné ci-dessous :

```

F test to compare two variances
data: Poids by Sexe
F = 0.28833, num df = 12, denom df = 14, p value = 0.08713
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.09452959 0.97444656
sample estimates:
ratio of variances
 0.2883299

```

Figure 4 – Test d'égalité des variances

C..12. Nous allons maintenant mettre en œuvre le test d'égalité des moyennes des deux sous-populations. Sous R, la fonction qui permet de faire un test d'égalité des moyennes est la fonction t.test.

C..12.a. (1,5 point) Ecrire l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative pour réaliser :

- Un test bilatéral
- Un test unilatéral à droite
- Un test unilatéral à gauche

C..12.b. (1,5 point) Interprétez les résultats du test donné ci-dessous. Lequel des trois tests mentionnés à la question précédente a été mis en œuvre?

```

welch two sample t test
data: Poids by Sexe
t = -3.7496, df = 22.071, p-value = 0.001107
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -2010.624 -578.607
sample estimates:
mean in group femelle    mean in group mâle
      1403.385              2709.000

```

Figure 5 – Test d'égalité des moyennes

A.1. FONCTION DE RÉPARTITION DE LA LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE.65

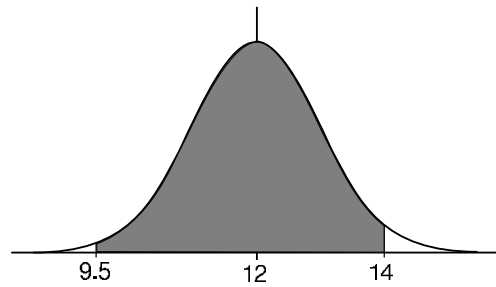


TABLE 1.

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5348	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

TABLE 2.

P	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010	
0,00	∞	3,0902	2,8782	2,7478	2,6521	2,5758	2,5121	2,4573	2,4089	2,3656	2,3263	0,99
0,01	2,3263	2,2904	2,2571	2,2262	2,1973	2,1701	2,1444	2,1201	2,0969	2,0749	2,0537	0,98
0,02	2,0537	2,0335	2,0141	1,9954	1,9774	1,9600	1,9421	1,9268	1,9110	1,8957	1,8808	0,97
0,03	1,8808	1,8663	1,8522	1,8384	1,8250	1,8119	1,7991	1,7866	1,7744	1,7624	1,7507	0,96
0,04	1,7507	1,7392	1,7279	1,7169	1,7060	1,6954	1,6849	1,6747	1,6646	1,6546	1,6449	0,95
0,05	1,6449	1,6352	1,6258	1,6164	1,6072	1,5982	1,5893	1,5805	1,5718	1,5632	1,5548	0,94
0,06	1,5548	1,5464	1,5382	1,5301	1,5220	1,5141	1,5063	1,4985	1,4909	1,4833	1,4758	0,93
0,07	1,4758	1,4684	1,4611	1,4538	1,4466	1,4395	1,4325	1,4255	1,4187	1,4118	1,4051	0,92
0,08	1,4051	1,3984	1,3917	1,3852	1,3787	1,3722	1,3658	1,3595	1,3532	1,3469	1,3408	0,91
0,09	1,3408	1,3346	1,3285	1,3225	1,3165	1,3106	1,3047	1,2988	1,1930	1,2873	1,2816	0,90
0,10	1,2816	1,2759	1,2702	1,2646	1,2591	1,2536	1,2481	1,2426	1,2372	1,2319	1,2265	0,89
0,11	1,2265	1,2212	1,2160	1,2107	1,2055	1,2004	1,1952	1,1901	1,1850	1,1800	1,1750	0,88
0,12	1,1750	1,1700	1,1650	1,1601	1,1552	1,1503	1,1455	1,1407	1,1359	1,1311	1,1264	0,87
0,13	1,1264	1,1217	1,1170	1,1123	1,1077	1,1031	1,0985	1,0939	1,0893	1,0848	1,0803	0,86
0,14	1,0803	1,0758	1,0714	1,0669	1,0625	1,0581	1,0537	1,0494	1,0450	1,0407	1,0364	0,85
0,15	1,0364	1,0322	1,0279	1,0237	1,0194	1,0152	1,0110	1,0069	1,0027	0,9986	0,9945	0,84
0,16	0,9945	0,9904	0,9863	0,9822	0,9782	0,9741	0,9701	0,9661	0,9621	0,9581	0,9542	0,83
0,17	0,9542	0,9502	0,9463	0,9424	0,9385	0,9346	0,9307	0,9269	0,9230	0,9192	0,9154	0,82
0,18	0,9154	0,9116	0,9078	0,9040	0,9002	0,8965	0,8927	0,8890	0,8853	0,8816	0,8779	0,81
0,19	0,8779	0,8742	0,8705	0,8669	0,8633	0,8596	0,8560	0,8524	0,8488	0,8452	0,8416	0,80
0,20	0,8416	0,8381	0,8345	0,8310	0,8274	0,8239	0,8204	0,8169	0,8134	0,8099	0,8064	0,79
0,21	0,8064	0,8030	0,7995	0,7961	0,7926	0,7892	0,7858	0,7824	0,7790	0,7756	0,7722	0,78
0,22	0,7722	0,7688	0,7655	0,7621	0,7588	0,7554	0,7521	0,7488	0,7454	0,7421	0,7388	0,77
0,23	0,7388	0,7356	0,7323	0,7290	0,7257	0,7225	0,7192	0,7160	0,7128	0,7095	0,7063	0,76
0,24	0,7063	0,7031	0,6999	0,6967	0,6935	0,6903	0,6871	0,6840	0,6808	0,6776	0,6745	0,75
0,25	0,6745	0,6713	0,6682	0,6651	0,6620	0,6588	0,6557	0,6526	0,6495	0,6464	0,6433	0,74
0,26	0,6433	0,6403	0,6372	0,6341	0,6311	0,6280	0,6250	0,6219	0,6189	0,6158	0,6128	0,73
0,27	0,6128	0,6098	0,6068	0,6038	0,6008	0,5978	0,5948	0,5918	0,5888	0,5858	0,5828	0,72
0,28	0,5828	0,5799	0,5769	0,5740	0,5710	0,5681	0,5651	0,5622	0,5592	0,5563	0,5534	0,71
0,29	0,5534	0,5505	0,5476	0,5446	0,5417	0,5388	0,5359	0,5330	0,5302	0,5273	0,5244	0,70
0,30	0,5244	0,5215	0,5187	0,5158	0,5129	0,5101	0,5072	0,5044	0,5015	0,4987	0,4959	0,69
0,31	0,4959	0,4930	0,4902	0,4874	0,4845	0,4817	0,4789	0,4761	0,4733	0,4705	0,4677	0,68
0,32	0,4677	0,4649	0,4621	0,4593	0,4565	0,4538	0,4510	0,4482	0,4454	0,4427	0,4399	0,67
0,33	0,4399	0,4372	0,4344	0,4316	0,4289	0,4261	0,4234	0,4207	0,4179	0,4152	0,4125	0,66
0,34	0,4125	0,4097	0,4070	0,4043	0,4016	0,3989	0,3961	0,3934	0,3907	0,3880	0,3853	0,65
0,35	0,3853	0,3826	0,3799	0,3772	0,3745	0,3719	0,3692	0,3665	0,3638	0,3611	0,3585	0,64
0,36	0,3585	0,3558	0,3531	0,3505	0,3478	0,3451	0,3425	0,3398	0,3372	0,3345	0,3319	0,63
0,37	0,3319	0,3292	0,3266	0,3239	0,3213	0,3186	0,3160	0,3134	0,3107	0,3081	0,3055	0,62
0,38	0,3055	0,3029	0,3002	0,2976	0,2950	0,2924	0,2898	0,2871	0,2845	0,2819	0,2793	0,61
0,39	0,2793	0,2767	0,2741	0,2715	0,2689	0,2663	0,2637	0,2611	0,2585	0,2559	0,2533	0,60
0,40	0,2533	0,2508	0,2482	0,2456	0,2430	0,2404	0,2378	0,2353	0,2327	0,2301	0,2275	0,59
0,41	0,2275	0,2250	0,2224	0,2198	0,2173	0,2147	0,2121	0,2096	0,2070	0,2045	0,2019	0,58
0,42	0,2019	0,1993	0,1968	0,1942	0,1917	0,1891	0,1866	0,1840	0,1815	0,1789	0,1764	0,57
0,43	0,1764	0,1738	0,1713	0,1687	0,1662	0,1637	0,1611	0,1586	0,1560	0,1535	0,1510	0,56
0,44	0,1510	0,1484	0,1459	0,1434	0,1408	0,1383	0,1358	0,1332	0,1307	0,1282	0,1257	0,55
0,45	0,1257	0,1231	0,1206	0,1181	0,1156	0,1130	0,1105	0,1080	0,1055	0,1030	0,1004	0,54
0,46	0,1004	0,0979	0,0954	0,0929	0,0904	0,0878	0,0853	0,0828	0,0803	0,0778	0,0753	0,53
0,47	0,0753	0,0728	0,0702	0,0677	0,0652	0,0627	0,0602	0,0577	0,0552	0,0527	0,0502	0,52
0,48	0,0502	0,0476	0,0451	0,0426	0,0401	0,0376	0,0351	0,0326	0,0301	0,0276	0,0251	0,51
0,49	0,0251	0,0226	0,0201	0,0175	0,0150	0,0125	0,0100	0,0075	0,0050	0,0025	0,0000	0,50
	0,010	0,009	0,008	0,007	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,001	0,000	P

TABLE 3.

ν	P	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.975	0.990	0.995	0.999	0.9995
1		0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.3	636.6
2		0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.33	31.60
3		0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.22	12.94
4		0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5		0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.859
6		0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7		0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.405
8		0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9		0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10		0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11		0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12		0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13		0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14		0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15		0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16		0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17		0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18		0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.611	3.922
19		0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20		0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21		0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22		0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23		0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24		0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25		0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26		0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27		0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28		0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29		0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30		0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
32		0.256	0.530	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622
34		0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601
36		0.255	0.529	0.852	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582
38		0.255	0.529	0.851	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566
40		0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50		0.255	0.528	0.849	1.298	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
60		0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
70		0.254	0.527	0.847	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211	3.435
80		0.254	0.527	0.846	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.415
90		0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183	3.402
100		0.254	0.526	0.845	1.290	1.660	1.984	2.365	2.626	3.174	3.389
200		0.254	0.525	0.843	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	3.131	3.339
500		0.253	0.525	0.842	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586	3.106	3.310
∞		0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

TABLE 4.

ν	P	0.001	0.005	0.010	0.025	0.05	0.10	0.50	0.90	0.95	0.975	0.990	0.995	0.999
1	—	—	—	—	0.001	0.004	0.016	0.455	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	0.002	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8	13.8
3	0.024	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	2.37	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3	16.3
4	0.091	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	3.36	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5	18.5
5	0.210	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	4.35	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5	20.5
6	0.381	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	5.35	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5	22.5
7	0.598	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	6.35	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3	24.3
8	0.857	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	7.34	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1	26.1
9	1.15	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	8.34	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9	27.9
10	1.48	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	9.34	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6	29.6
11	1.83	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	10.3	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3	31.3
12	2.21	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	11.3	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9	32.9
13	2.62	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	12.3	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5	34.5
14	3.04	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	13.3	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1	36.1
15	3.48	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	14.3	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7	37.7
16	3.94	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	15.3	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3	39.3
17	4.42	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	16.3	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8	40.8
18	4.90	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	17.3	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3	42.3
19	5.41	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	18.3	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8	43.8
20	5.92	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	19.3	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3	45.3
21	6.45	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	20.3	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8	46.8
22	6.98	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	21.3	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3	48.3
23	7.53	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	22.3	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7	49.7
24	8.08	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	23.3	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2	51.2
25	8.65	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	24.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6	52.6
26	9.22	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	25.3	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1	54.1
27	9.80	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	26.3	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5	55.5
28	10.4	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	27.3	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9	56.9
29	11.0	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	28.3	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3	58.3
30	11.6	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	29.3	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7	59.7
32	12.8	15.1	16.4	18.3	20.1	22.3	31.3	42.6	46.2	49.5	53.5	56.3	62.5	62.5
34	14.1	16.5	17.8	19.8	21.7	24.0	33.3	44.9	48.6	52.0	56.1	59.0	65.2	65.2
36	15.3	17.9	19.2	21.3	23.3	25.6	35.3	47.2	51.0	54.4	58.6	61.6	68.0	68.0
38	16.6	19.3	20.7	22.9	24.9	27.3	37.3	49.5	53.4	56.9	61.2	64.2	70.7	70.7
40	17.9	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	39.3	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	73.4	73.4
50	24.7	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	49.3	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7	86.7
60	31.7	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	59.3	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0	99.6	99.6
70	39.0	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	69.3	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2	112.3	112.3
80	46.5	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	79.3	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3	124.8	124.8
90	54.2	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	89.3	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	137.2	137.2
100	61.9	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	99.3	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	149.4	149.4