Examen ASI 2018

A.1. Loi de Bernoulli $X \leadsto \mathcal{B}(1,p)$ 0,5

$U = \sum_{i=1}^{n} X_i \leadsto \mathcal{B}(n,p)$ Loi Binomiale 0,5

A.2. $V(x_1, \dots, x_n ; p) = \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i)$

$V(x_1, \dots, x_n ; p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}$

$\log V(x_1, \dots, x_n ; p) = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i \ln(p) + (1-x_i) \ln(1-p) \right]$

$\ln V(x_1, \dots, x_n ; p) = \ln(p) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) + \ln(1-p) \times n - \left(\sum x_i \right) \ln(1-p)$

$$\boxed{\ln V(x_1, \dots, x_n ; p) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \ln(p) + n \ln(1-p) - \ln(1-p) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)}$$

dérivée $\frac{\partial \ln V}{\partial p} = \frac{1}{p} \left(\sum x_i \right) - n \frac{1}{1-p} + \frac{1}{1-p} \left(\sum x_i \right)$

annuler $\frac{\partial \ln V}{\partial p} = 0 \quad \frac{1}{p} \left(\sum x_i \right) + \frac{1}{1-p} \left(\sum x_i \right) = \frac{n}{1-p}$

$$\frac{1-p}{p} \left(\sum x_i \right) + \left(\sum x_i \right) = n$$

$$(1-p) \left(\sum x_i \right) + p \left(\sum x_i \right) = np$$

$$\left(\sum x_i \right) \cancel{- p \left(\sum x_i \right) + p \left(\sum x_i \right)} = np$$

$$\boxed{p = \frac{1}{n} \sum x_i}$$

A.3 (i) $\mathbb{E}[\hat{p}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$

X_i copie d'une va de loi parente X

$X_i \rightsquigarrow \mathcal{B}(1,p) \Rightarrow \mathbb{E}[X_i] = p$ par déf loi Bernoulli

$\mathbb{E}[\hat{p}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p = \frac{np}{n} = p$ non biaisé

(ii) Convergence

$Var[\hat{p}] = Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$

$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var[X_i]$ $\quad$ X_i indépendants

$Var[X_i] = p(1-p)$ déf loi Bernoulli

$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} p(1-p)$

$= \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

A.4 $n = 200$
98 oui $\rightarrow$ $\tilde{p} = 0,49$ estim ponctuelle

$f_n = 0,49$

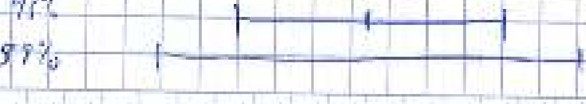
A.5 IC d'1 proportion (calcul possible car $n > 30$)

$f_n \pm q\sqrt{\frac{f_n(1-f_n)}{n}}$ $\quad$ $0,49 \pm q \times 0,0353482673$

Table 2

95% : $\rightarrow q = 1,96$ $\quad$ ~~0,035~~ $[0,42071 , 0,55928]$

98% $\rightarrow q = 2,3263$ $\quad$ $[0,407769 , 0,5722306]$



A.6 $\quad p = 0.52 \quad\quad n\,?$

$$0{,}52 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}52\times 0{,}48}{n}}^{\;0{,}977215}$$ ne doit pas contenir 0,50

il faut que la marge d'erreur $1{,}96\sqrt{\frac{0{,}52\times 0{,}48}{n}}$ soit < 0.02

$$\frac{0{,}9792156}{\sqrt{n}} < 0{,}02 \Rightarrow \sqrt{n} > 48{,}9607$$

$$n > 2397{,}15$$

$\boxed{\text{à partir d' } n = 2398}$

Exo B $\quad \bar{x} = 2{,}1 \quad n = 24 \quad$ risque $\alpha = 10\%$

σ^2 connue $\rightarrow q$ loi normale $\rightarrow 1{,}6449$

σ^2 inconnue, $n < 30$ $\rightarrow q$ Student 23 ddl $\rightarrow 1{,}714$

$$\bar{x} \pm q\,\frac{\sqrt{\sigma^2_{\text{corrigé}}}}{\sqrt{n}}$$

B.7 A.N

$$2{,}1 \pm 1{,}6449 \times \sqrt{\frac{0{,}4}{24}} = [1{,}8876 ; 2{,}312355]$$

B.8 A.N

$$2{,}1 \pm 1{,}714 \times \sqrt{\frac{0{,}4}{24}} = [1{,}878723 ; 2{,}32127]$$

IC students + large car on a moins de précision sur l'écart-type car il s'agit d'1 estimé

C. Poulpes

Dans cet exercice, nous allons comparer les poids de poulpes mâles et femelles au stade adulte. Nous disposons pour cela des données de 15 poulpes mâles et 13 poulpes femelles pêchés au large des côtes mauritaniennes. Nous souhaitons tester l'égalité des moyennes théoriques inconnues des poids des poulpes femelles (μ_1) et mâles (μ_2) avec une erreur de première espèce fixée à 5%.

C.9. (1 point) La figure suivante représente les poids des poulpes par sexe. Que pouvez-vous en dire?

(1) + homogénéité chez femelles que chez mâles
IQR femelle ≈ 900
mâles ≈ 1400

(2) Mâles + lourds que femelles.

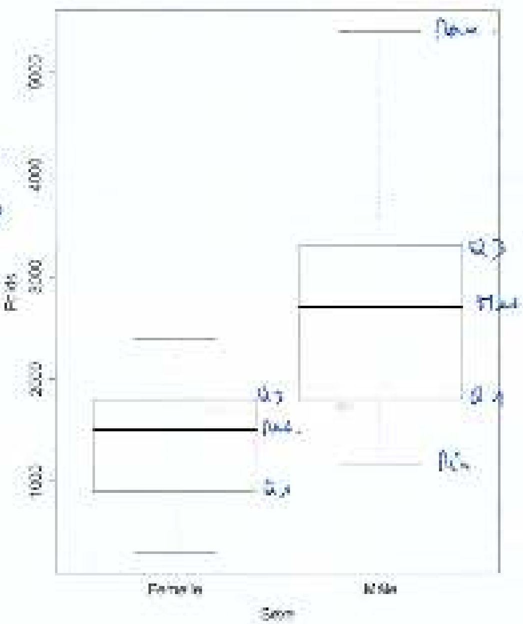


Figure 1 – Boîtes à moustaches des poids des poulpes par sexe

> **Solution:** La figure nous montre que les mâles apparaissent graphiquement comme étant en général plus lourds que les femelles puisque médiane et quantiles de poids sont supérieurs chez les mâles. Mais un test statistique est nécessaire pour pouvoir conclure.

C.10. (1 point) La normalité des données est testée pour chaque sous-population à l'aide d'un test de Shapiro-Wilk. Interprétez les résultats de ce test pour les femelles et pour les mâles.


```
        Shapiro-Wilk normality test

data:  poulpes[poulpes$Sexe == "Male", "Poids"]
W = 0.[illegible], p-value = [illegible]
```

Figure 2 – Test de normalité pour les mâles

```
        Shapiro-Wilk normality test

data:  poulpes[poulpes$Sexe == "Femelle", "Poids"]
W = 0.[illegible], p-value = [illegible]
```

Figure 3 – Test de normalité pour les femelles

> **Solution:** La probabilité critique associée au test étant supérieure à 5%, on ne rejette pas l'hypothèse nulle de normalité des poids des mâles et des femelles.

. niveau de significativité chez femelles > chez mâles.

C.11. Nous testons ensuite l'égalité des variances.

C.11.a. (0,5 point) Pourquoi est-il nécessaire de faire ce test?

> **Solution:** Pour comparer les moyennes des deux sous-populations mâle et femelle, il existe deux types de tests : l'un quand les variances inconnues des deux sous-populations sont différentes et l'autre quand elles sont égales. Nous devons donc commencer par tester l'égalité des variances.

C.11.b. (0,5 point) Écrire l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative relatives à ce test. [illegible]

C.11.c. (0,5 point) De quel type de test s'agit-il?

> **Solution:** C'est un test bilatéral.

C.11.d. (1 point) Interprétez les résultats du test donné ci-dessous :

pour conclure avec IC regarder si la vraie ratio (= 1) est dans IC

ici 1 ∉ IC → rejet(H_0)

```
        F test to compare two variances

data:  Poids by Sexe
F = 0.2883, num df = 12, denom df = 14, p-value = 0.03[illegible]
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.09[illegible] 0.8[illegible]
sample estimates:
ratio of variances
         0.288[illegible]
```

var femelle / var mâle

Figure 4 – Test d'égalité des variances

> **Solution:** La probabilité critique associée au test de comparaison de variances vaut 0,037 : on rejette H_0 et on peut donc considérer que les variances sont significativement différentes. Le rapport des variances est égal à 0,288 et l'intervalle de confiance de ce rapport (au seuil 95%) est [0,094; 0,897]. *Pour information : Dans le rapport des variances, le numérateur est la variance des poids du premier niveau de la variable sexe (Femelle) et le dénominateur la variance des poids du second niveau (Mâle).*

num df = 12 → (n−1) → 13 → femelle

den df = 14 → (n−1) → 15 → mâle.

Fin de l'examen

C.12. (1 point) Nous allons maintenant mettre en œuvre le test d'égalité des moyennes.

C.12.a. (0.5 point) Sous R : quelle est la fonction qui permet de faire un test d'égalité des moyennes.

> **Solution:** C'est la fonction t.test. *Pour information : Les variances étant différentes, ont utilise le test de Welch. Si les variances étaient égales, on aurait utilisé le test de Student.*

C.12.b. (1,5 point) Écrire l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative pour réaliser :
- Un test bilatéral
- Un test unilatéral à droite
- Un test unilatéral à gauche

> **Solution:**
> - $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ contre $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$
> - $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$ contre $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ ou $\leq$ $>$
> - $H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$ contre $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ $\geq$ $<$

C.12.c. (1,5 point) Interprétez les résultats du test donné ci-dessous. Lequel des trois tests mentionnés à la question précédente a été mis en œuvre ?

```
        Welch Two Sample t-test

data:  poids by sexe
t = -4.[illegible], df = [illegible], p-value = [illegible]
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -2015.[illegible] -[illegible]
sample estimates:
mean in group femelle   mean in group male
             [illegible]             [illegible]
```

test bilatéral

Figure 5 – Test d'égalité des moyennes.

> **Solution:** La probabilité critique (0,00?) associée au test avec variances inégales indique que les moyennes sont significativement différentes. La moyenne des mâles dans la population (estimée à 2700g à partir de l'échantillon) est donc significativement différente de celle des femelles (estimée à 1405g).

rejet de (H_0)

$\boxed{\text{t.test}}$ avec paramètre var.equal = FALSE

Test de Welch

stat de test $t = \dfrac{m_A - m_B}{\sqrt{\dfrac{S_A^2}{n_A} + \dfrac{S_B^2}{n_B}}}$