· $\det A \neq 0 \Rightarrow$ A est inversible $\Rightarrow$ décomp LU.

· <u>Jacobi:</u> $J = -D^{-1}(L+U)$

$\rho(J) < 1 \Rightarrow$ méthode est cv

où $\rho(J) = \max_i |\lambda_i|$ λ_i val. propre de J

· <u>GAUSS-Seidel</u>

$G = -(D+L)^{-1} \cdot U$

$G = -(D+L)^{-1} \cdot U$

<u>SOR</u>: $G_\omega = (1-\omega)I + \omega G$

DEMI-PROMO A
PREMIER TEST
DE CALCUL SCIENTIFIQUE
30 MARS 2005 durée 2h

EXERCICE 1 (barème : 4+2)

Dans le plan réel muni d'un repère orthonormé xOy on considère les 12 points : $A(0;1)$, $B(0;2)$, $C(1;3)$, $D(2;3)$, $E(3;2)$, $F(3;1)$, $G(2;0)$, $H(1;0)$, $K(1;1)$, $L(1;2)$, $M(2;2)$, $N(2;1)$. On note Γ_1 la frontière du carré KLMN, Γ_2 la frontière du polygone ABCDEFGH et Ω l'ouvert contenu entre ces deux frontières. On considère alors le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) + u(x,y) = x + y & \text{dans} \quad \Omega \\ u(x,y) = x & \text{sur} \quad \Gamma_1 \\ u(x,y) = y & \text{sur} \quad \Gamma_2 \end{cases}$$

Discrétiser ce problème par différences finies, en prenant un pas constant $h = 1/2$ dans les deux directions du plan. On numérotera les points utiles du maillage $(i/2, j/2)$ avec $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, par lignes, de gauche à droite et de bas en haut. En déduire la matrice A du système linéaire obtenu ainsi que le second membre b. On écrira la matrice A avec des termes diagonaux négatifs.

EXERCICE 2 (barème : 2+4+1)

On considère le système linéaire $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>cholesky</u> $\Leftrightarrow$ A soit $\begin{cases} \cdot \text{ définie positive: } {}^t x \cdot A \cdot x > 0 \\ \cdot \text{ symétrique: } {}^t A = A \end{cases}$

$\Rightarrow A = R \cdot {}^t R$ avec R triangulaire inférieure

appliquer l'algorithme

$(A = {}^t R \cdot R$. R triang. supérieure$)$

1) Déterminer pour quelles valeurs du paramètre réel ϵ, le système peut être résolu par la méthode de Cholesky.

2) Pour $\epsilon = 2$, résoudre $Ax = b$ en utilisant la factorisation de Cholesky de A. On pourra soit faire le calcul exact, soit un calcul numérique avec 6 décimales.

3) Pour $\epsilon = 0$ quel type de factorisation de la matrice A peut-on utiliser pour résoudre le système $Ax = b$ par une méthode directe? Justifier précisément votre réponse.

EXERCICE 3 (barème : 2+1+3+1)

Soit A une matrice carrée d'ordre n, d'éléments a_{ij}. On admettra sans démonstration que le rayon spectral $\rho(A)$ de A vérifie la relation suivante :

$$\rho(A) \leq max_{i=1..n}(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|)$$

1) Démontrer que si A vérifie, pour tout i, l'inégalité $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, le système $Ax = b$ peut être résolu par la méthode de Jacobi.

Dans la suite de cet exercice on considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & c & d \\ 0 & c & a & 0 \\ 0 & d & 0 & a \end{pmatrix}$$

2) En utilisant la question précédente, donner des conditions suffisantes sur les paramètres a, b, c, et d pour que l'on puisse résoudre le système $Ax = b$ par la méthode de Jacobi.

3) Exprimer la matrice d'itération J de la méthode de Jacobi pour le système $Ax = b$ et en déduire les conditions nécessaires et suffisantes de convergence de cette méthode.

4) Donner un exemple de paramètres vérifiant les conditions trouvées en ~~2)~~ 3) mais ne vérifiant pas les conditions trouvées en ~~3)~~. 2)

GOUBY Catherine

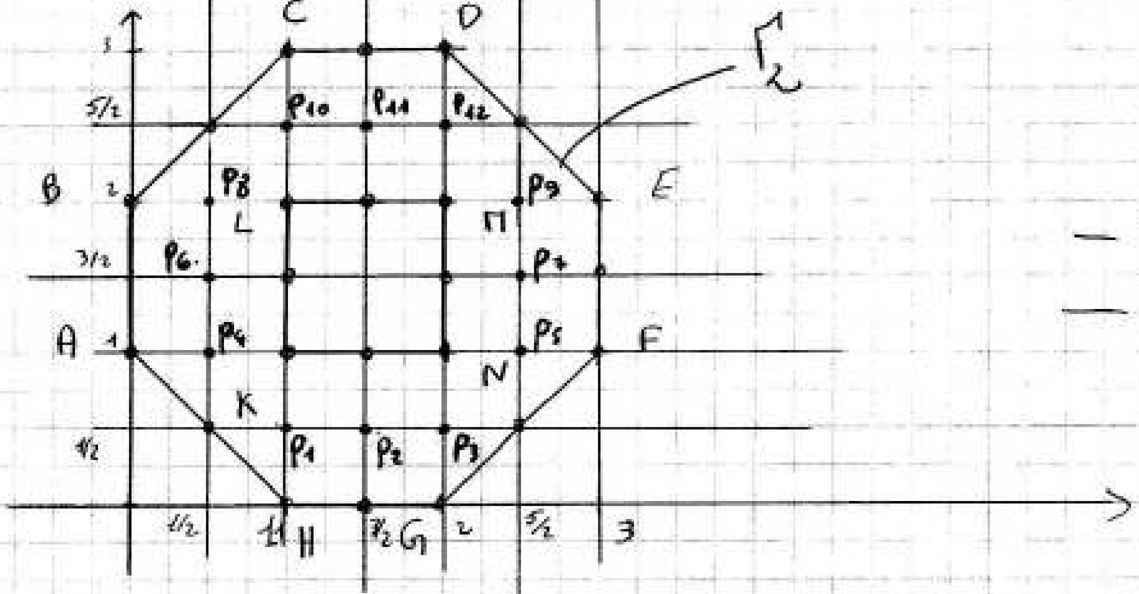
30 mars 2005

Calcul Scientifique

Test n° 1

15/20

Exercice n° 1



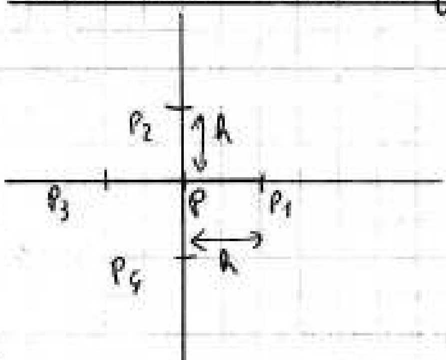
— Γ_1

— Γ_2

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) + u(x,y) = x+y & \text{ds } \Omega \\ u(x,y) = x & \text{sur } \Gamma_1 \\ u(x,y) = y & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

$h = \frac{1}{2}$

Schéma de référence :



on a alors

$$\Delta u(P) = \frac{-4u(P) + u(P_1) + u(P_2) + u(P_3) + u(P_4)}{h^2}$$

Dans notre problème on obtient :

$$u(P)(h^2 - 4) + u(P_1) + u(P_2) + u(P_3) + u(P_4) = h^2(x+y)$$

on note $u_i = u(P_i)$ $\forall i \in \{1, 12\}$

On obtient

$$\begin{cases} u_1(h^2-4) + u_2 + \frac{1}{2} + 0 + 1 = \frac{3}{2} \\ u_2(h^2-4) + u_1 + u_3 + \frac{3}{2} + 0 = 2 \\ u_3(h^2-4) + u_2 + 0 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \\ u_4(h^2-4) + u_6 + 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \\ u_5(h^2-4) + u_7 + 1 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{2} \\ u_6(h^2-4) + u_4 + u_8 + \frac{3}{2} + 1 = 2 \\ u_7(h^2-4) + u_5 + u_9 + \frac{3}{2} + 2 = 4 \\ u_8(h^2-4) + u_6 + 2 + \frac{5}{2} + 1 = \frac{5}{2} \\ u_9(h^2-4) + u_7 + 2 + 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2} \\ u_{10}(h^2-4) + u_{11} + 1 + 3 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2} \\ u_{11}(h^2-4) + u_{10} + u_{12} + 3 + \frac{3}{2} = 4 \\ u_{12}(h^2-4) + u_{11} + 2 + 3 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2} \end{cases}$$

4/4'

$$h^2 - 4 = \frac{1}{4} - 4 = \frac{-15}{4}$$

$$\begin{cases} \frac{-15}{4} u_1 + u_2 = 0 \\ \frac{-15}{4} u_2 + u_1 + u_3 = \frac{1}{2} \\ -\frac{15}{4} u_3 + u_2 = 0 \\ -\frac{15}{4} u_4 + u_6 = -1 \\ -\frac{15}{4} u_5 + u_7 = 0 \\ -\frac{15}{4} u_6 + u_4 + u_8 = -1/2 \\ -\frac{15}{4} u_7 + u_5 + u_9 = 1/2 \\ -\frac{15}{4} u_8 + u_6 = -3 \\ -\frac{15}{4} u_9 + u_7 = -2 \\ -\frac{15}{4} u_{10} + u_{11} = -3 \\ -\frac{15}{4} u_{11} + u_{10} + u_{12} = -1/2 \\ -\frac{15}{4} u_{12} + u_{11} = -3 \end{cases}$$

oui.

$$
A = \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{array}
\left(\begin{array}{cccccccccccc}
-\frac{15}{4} & 1 & 0 & & & & & & & & & \\
1 & -\frac{15}{4} & 1 & 0 & & & & & & & & \\
 & 1 & -\frac{15}{4} & 0 & 0 & & & & & (0) & & \\
 & 0 & 0 & -\frac{15}{4} & 0 & 1 & & & & & & \\
 & & 0 & & -\frac{15}{4} & 0 & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & 0 & -\frac{15}{4} & 0 & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & 0 & -\frac{15}{4} & 0 & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & 0 & -\frac{15}{4} & 0 & & & \\
 & & (0) & & & & 1 & 0 & -\frac{15}{4} & 0 & & \\
 & & & & & & & 0 & 0 & -\frac{15}{4} & 1 & \\
 & & & & & & & & 0 & 1 & -\frac{15}{4} & 1 \\
 & & & & & & & & & 0 & 1 & -\frac{15}{4}
\end{array}\right)
$$

$$
b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -3 \\ -2 \\ -3 \\ -1/2 \\ -3 \end{pmatrix}
$$

erreurs sur le 2nd membre

0/2

Exercice n° 2

$$A x = b$$

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1°) Le système peut être résolu par la méthode de Cholesky ssi la matrice A est symétrique définie positive.

• $x^t A x = (u \ v \ w) \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

$$= (u, v, w) \begin{pmatrix} \varepsilon u + v + 2w \\ u + 3v + w \\ 2u + v + 3w \end{pmatrix}$$

$$= (\varepsilon u^2 + uv + 2uw) + (uv + 3v^2 + 3vw) + 2uw + wv + 3w^2$$

$$= \varepsilon u^2 + 3v^2 + 3w^2 + 2uv + 4uw + 4wv$$

Il faut $x^t A x > 0 \quad \forall (u, v, w)$

en particulier

Pour $x = (1,0,0)$ $\quad x^t A x = \varepsilon > 0$

Pour $x = (0,1,0)$ $\quad x^t A x = 3 > 0$

Pour $x = (0,0,1)$ $\quad x^t A x = 3 > 0$

donc il faut $\boxed{\varepsilon > 0}$

A priori oui mais c'est une CN pas suffisante

(1,5/2)

groupe 2

Exercice n: 2 (suite)

1°] (suite)

•] De plus $\forall \varepsilon$, $A^t = A$

donc A symétrique

DONC le système peut être résolu par la méthode de Cholesky pour $\varepsilon > 0$

2] Pour $\varepsilon = 2$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Par Cholesky : $A = \tilde{L} \, \tilde{L}^t$

avec

$$\tilde{L} = (l_{ij})_{\substack{1 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 3}}$$

Application de l'algorithme de Cholesky :

$k = 1$

$$l_{11} = [a_{11}]^{1/2} = \sqrt{2}$$

$i = 2$

$$l_{21} = [a_{21}] / l_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$i = 3$ $$l_{31} = (a_{31}) / l_{11} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$k = 2$ $$l_{22} = [a_{22} - (l_{21})^2]^{1/2} = \sqrt{3 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$i = 3$

$$l_{32} = (a_{32} - (l_{31} l_{21})) / l_{22} = \frac{1 - 1}{\sqrt{\frac{5}{2}}} = 0$$

pour $k = 3$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - \left(l_{31}^2 + l_{32}^2\right)}$$

$$l_{33} = \sqrt{3 - \left(2 + 0^2\right)}$$

$$l_{33} = 1$$

Bilan

$l_{11} = \sqrt{2}$ $\qquad l_{21} = 1/\sqrt{2}$

$l_{22} = \sqrt{3}/\sqrt{2}$ $\qquad l_{31} = \sqrt{2}$

$l_{33} = 1$ $\qquad l_{32} = 0$

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A x = b$$

$$\tilde{L} \tilde{L}^t x = b$$

on résoud : $\tilde{L} y = b$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{y_1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left[1 - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{2}\, y_1 + y_3 = 1 \Rightarrow y_3 = 0$$

$$y = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On résoud

$$\tilde{L}^t x = y$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{5}/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 0$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} x_2 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}$$

4/4

$$\sqrt{2}\, x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{5} + 0 \times \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{5\sqrt{2}}\right]$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{5}\right] = \frac{2}{5}$$

bien

donc la solution est:

$$x = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

7°)

pour $\varepsilon = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \times (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \times 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(9-1) + 2(1-6) = -8 - 10 = -18 \neq 0$$

11/1

$\det A \neq 0$ donc on peut utiliser la décomposition LU pour le cas $\varepsilon = 0$.

Exercice n° 3

1] ?

2] $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & c & d \\ 0 & c & a & 0 \\ 0 & d & 0 & a \end{bmatrix}$

Pour pouvoir résoudre par la méthode de Jacobi :

il faut $\forall i \in [\![1, 4]\!]$, $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

d'après 1]

Il faut :

$$\begin{cases} |a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| \\ |a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| \\ |a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}| \\ |a_{44}| > |a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}| \end{cases}$$

soit ici :

1/1

$$\begin{cases} |a| > |b| \\ |a| > |b| + |c| + |d| \\ |a| > |c| \\ |a| > |d| \end{cases}$$

groupe 2

Exercice 3 (suite)

2] (suite)

Les conditions suffisantes pour que l'on puisse résoudre $Ax = b$ sont

donc $\left\{\begin{array}{l} |a| > |b| \\ |a| > |c| \\ |a| > |d| \\ |a| > |b| + |c| + |d| \end{array}\right.$

Vu-

3°] La matrice d'itération de la méthode Jacobi est :

$$M = -D^{-1}(L+U) = J$$

où $D = \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & 0 & \\ & & a & \\ & 0 & & a \end{pmatrix}$

$$L + U = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ b & 0 & c & d \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = -\frac{1}{a}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ b & 0 & c & d \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{a}\begin{bmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ b & 0 & c & d \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donc $\boxed{M = -\frac{1}{a}\begin{bmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ b & 0 & c & d \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \end{bmatrix}}$

Cette méthode converge

ssi $\rho(M) < 1$

$\rho(M) = \mathrm{Max}\, |\lambda_i|$

où λ_i = valeurs propres de M

$\det(M - \lambda I) =$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -b/a & 0 & 0 \\ -\frac{b}{a} & -\lambda & -c/a & -d/a \\ 0 & -c/a & -\lambda & 0 \\ 0 & -d/a & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -c/a & -d/a \\ -c/a & -\lambda & 0 \\ -d/a & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \frac{b}{a} \begin{vmatrix} -b/a & 0 & 0 \\ -c/a & -\lambda & 0 \\ -d/a & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$-\lambda\left(-\frac{d}{a}\right) \begin{vmatrix} -c/a & -d/a \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix} + \lambda^2 \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{c}{a} \\ -c/a & -\lambda \end{vmatrix} + \frac{-b^2}{a^2} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$\det(M - \lambda I) =$

$$\lambda \frac{d}{a}\left(-\lambda \frac{d}{a}\right) + \lambda^2\left(+\lambda^2 - \frac{c^2}{a^2}\right) - \frac{b^2}{a^2}\lambda^2 = 0$$

$$-\lambda^2 \frac{d^2}{a^2} + \lambda^2\left(+\lambda^2 - \frac{c^2}{a^2}\right) - \frac{b^2}{a^2}\lambda^2 = 0$$

$$-\lambda^2\left[\frac{d^2}{a^2} - \lambda^2 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}\right] = 0$$

ou $\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda^2 = \dfrac{c^2 + b^2 + d^2}{a^2} \end{cases}$

$$\begin{cases} d = 0 \\ \text{ou} \\ d = \pm \dfrac{\sqrt{c^2+b^2+d^2}}{a} \end{cases}$$

donc
$$\rho(M) = \left| \frac{\sqrt{c^2+b^2+d^2}}{a} \right|$$

3/3

Une condition nécessaire et suffisante pour que cette méthode converge est :

oui.

$$\boxed{\left| \frac{\sqrt{c^2+b^2+d^2}}{a} \right| < 1}$$

4] on cherche a, b, c et d tels que

à justifier [illegible]

0,5/1,5

$$\begin{cases} |a| < |b| \\ |a| < |c| \\ |a| < |d| \\ |a| < |b| + |c| + |d| \\ \text{et } |a| \geq \left| \sqrt{b^2+c^2+d^2} \right| \end{cases}$$

ne vérifient pas conditions de 2]

vérifie cond. de 1]