2006

PROMO A : PREMIER TEST DE CALCUL SCIENTIFIQUE

EXERCICE 1

Dans le plan réel muni d'un repère orthonormé xOy on considère les 6 points : $A(0;3/2)$, $B(3/2;0)$, $C(3;0)$, $D(0;3)$, $E(-3;0)$ et $F(-3/2;0)$. On note Ω l'intrieur du polygone ABCDEF et $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sa frontière, avec $\Gamma_1 = [AB] \cup [CD] \cup [DE] \cup [FA]$ et $\Gamma_2 =]EF[\cup]BC[$.

Considérons alors le problème suivant :

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= y \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u(x,y) &= x \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,y) &= u(x,y) \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \end{aligned}$$

1) Discrétiser le problème par différences finies, en prenant un pas constant $h = 1/2$ dans les deux directions du plan, et en utilisant une méthode d'ordre 2 pour prendre en compte la condition aux limites sur Γ_2. On adoptera une numérotation des points du maillage par ligne de gauche à droite et de haut en bas.

2) Peut-on résoudre ce système linéaire par la méthode de Gauss sans changer de pivot? Justifier soigneusement votre réponse.

EXERCICE 2

Soit N un entier naturel strictement positif. On désire résoudre par une méthode itérative un système linéaire de matrice carrée A d'ordre $N+2$ dont les seuls éléments non nuls sont : $A_{i,i} = A_{1,2} = A_{N+2,N+1} = -2$ pour $i = 1, \dots, N+2$ et $A_{i,i-1} = A_{i,i+1} = 1$ pour $i = 2, \dots, N+1$

1) Calculer la matrice $J(A,N)$ de la méthode itérative de Jacobi.

2) pour $N = 1$ et $N = 2$ la méthode de Jacobi converge-t-elle?

3) Calculer la matrice $L_\omega(A,1)$ de la méthode itérative S.O.R.

4) Calculer (en le factorisant) le polynôme caractéristique de $L_\omega(A,1)$ et montrer qu'il admet la racine réelle $1-\omega$

5) Etudier la convergence de la méthode S.O.R pour $N = 1$ en fonction du paramètre ω.

6) Donner un exemple de problème aux limites dont la discrétisation conduit à un système linéaire de matrice A définie au début de l'exercice. **Cette question est indépendante des questions précédentes.**

CARDON Philippe 15 mars 2006 1/2

1re A - G4

1 2a 2b 1 2 3 4 5 6

b c - a a d

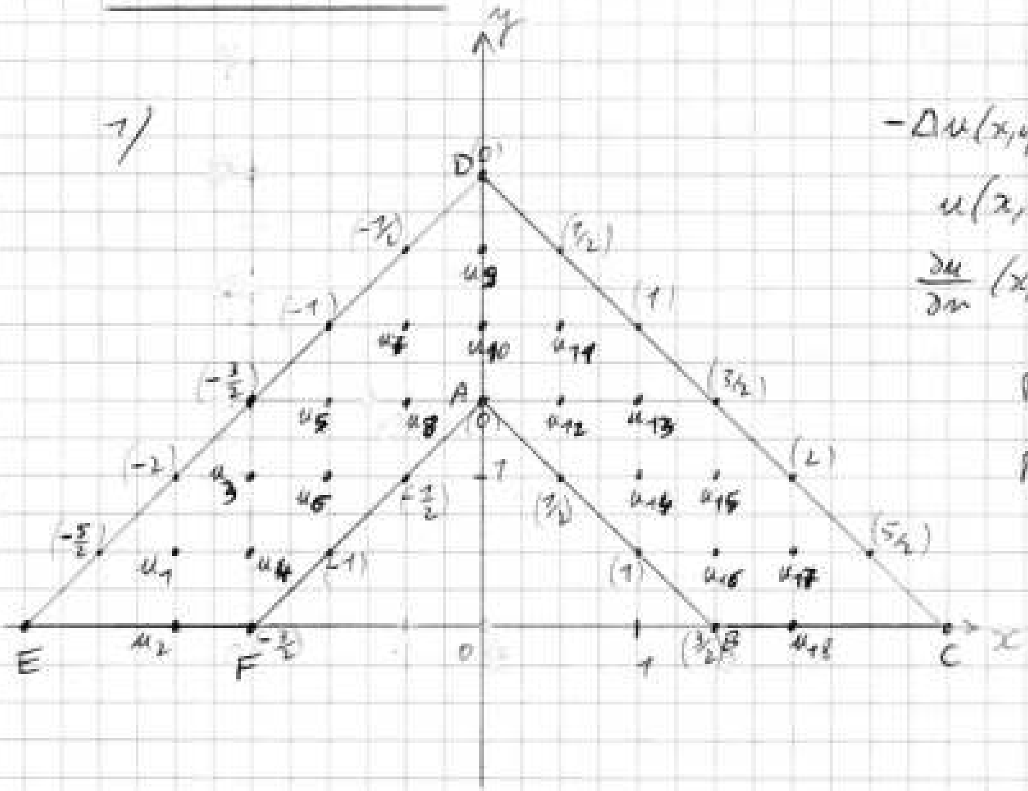
4
1
2
2
0,8

CALCUL SCIENTIFIQUE 9,8

TEST N° 1

Exercice 1 :

1/



$-\Delta u(x,y) = y$ dans Ω

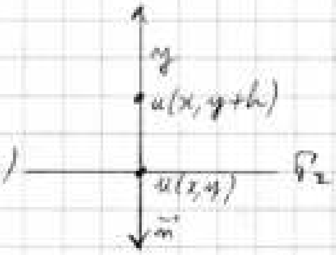
$u(x,y) = x$ sur Γ_1

$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = u(x,y)$ sur Γ_2

$\Gamma_1 = [AB] \cup [CD] \cup [DE] \cup [FA]$

$\Gamma_2 = [EF] \cup [BC]$

Sur Γ_2 :



D.L. à l'ordre 2 : $u(x,y+h) = u(x,y) + h\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)$

Or $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial n} = -u(x,y)$

et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(-u) = \frac{-\partial}{\partial n}(-u) = \frac{\partial u}{\partial n} = u(x,y)$

$\Rightarrow u(x,y+h) = u(x,y) - h\,u(x,y) + \frac{h^2}{2}u(x,y)$

$= \left(1 - h + \frac{h^2}{2}\right)u(x,y)$

avec $h = \frac{1}{2}$: $u(x,y+h) = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) u(x,y) = \frac{5}{8} u(x,y)$

$$u(x,y) = \frac{8}{5} u(x,y+h)$$

$\Rightarrow \quad u_2 = \frac{8}{5} u_1$

et $u_{18} = \frac{8}{5} u_{17}$

ensuite on applique pour les autres points dans Ω la méthode

$$\Delta u(x,y) = \frac{1}{h^2}\left(u(x-h,y) + u(x+h,y) + u(x,y-h) + u(x,y+h) - 4u(x,y)\right)$$

en u_1 : $-4\left(-\frac{5}{2} - 2 + u_2 + u_4 - 4u_1\right) = \frac{1}{2}$

$$-4\left(-\frac{9}{2} + \frac{8}{5}u_1 - 4u_1 + u_4\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{48}{5}u_1 - 4u_4 = \frac{1}{2} - 18 = -\frac{35}{2}$$

en u_3 : $-4\left(-2 - \frac{3}{2} + u_4 + u_6 - 4u_3\right) = 1$

$$16u_3 - 4u_4 - 4u_6 = -13$$

en u_4 : $-4\left(-\frac{3}{2} - 1 + u_1 + u_3 - 4u_4\right) = \frac{1}{2}$

$$-4u_1 - 4u_3 + 16u_4 = -\frac{19}{2}$$

en u_5 : $-4\left(-\frac{3}{2} - 1 + u_6 + u_8 - 4u_5\right) = \frac{3}{2}$

$$16u_5 - 4u_6 - 4u_8 = -\frac{17}{2}$$

en u_6 : $-4\left(-1 - \frac{1}{2} + u_3 + u_5 - 4u_6\right) = 1$

$$-4u_3 - 4u_5 + 16u_6 = -5$$

en u_7 : $-4\left(-1 - \frac{1}{2} + u_8 + u_{10} - 4u_7\right) = 2$

$$16u_7 - 4u_8 - 4u_{10} = -4$$

en u_8 : $-4\left(0 - \frac{1}{2} + u_5 + u_7 - 4u_8\right) = \frac{3}{2}$

$$-4u_5 - 4u_7 + 16u_8 = -\frac{1}{2}$$

en u_9 : $-4\left(-\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} + u_{10} - 4u_9\right) = \frac{5}{2}$

$$16u_9 - 4u_{10} = \frac{5}{2}$$

en u_{10} : $-4\left(0 + u_7 + u_9 + u_{11} - 4u_{10}\right) = 2$

$$-4u_7 - 4u_9 + 16u_{10} - 4u_{11} = 2$$

en u_{11} : $-4\left(\frac{1}{2}+1+u_{10}+u_{12}-4u_{11}\right)=2$

$$-4u_{10}+16u_{11}-4u_{12}=8$$

en u_{12} : $-4\left(\frac{1}{2}+u_{11}+u_{13}-4u_{12}\right)=\frac{3}{2}$

$$-4u_{11}+16u_{12}-4u_{13}=\frac{7}{2}$$

en u_{13} : $-4\left(\frac{5}{2}+u_{12}+u_{14}-4u_{13}\right)=\frac{3}{2}$

$$-4u_{12}+16u_{13}-4u_{14}=\frac{23}{2}$$

en u_{14} : $-4\left(\frac{3}{2}+u_{13}+u_{15}-4u_{14}\right)=1$

$$-4u_{13}+16u_{14}-4u_{15}=7$$

en u_{15} : $-4\left(\frac{7}{2}+u_{14}+u_{16}-4u_{15}\right)=1$

$$-4u_{14}+16u_{15}-4u_{16}=15$$

en u_{16} : $-4\left(\frac{5}{2}+u_{15}+u_{17}-4u_{16}\right)=\frac{1}{2}$

$$-4u_{15}+16u_{16}-4u_{17}=\frac{21}{2}$$

en u_{17} : $-4\left(\frac{9}{2}+u_{16}+u_{18}-4u_{17}\right)=\frac{1}{2}$

$$-18-4u_{16}-4\left(\frac{8}{5}u_{17}-4u_{17}\right)=\frac{1}{2}$$

$$-4u_{16}+\frac{48}{5}u_{17}=\frac{37}{2}$$

?

D'où le système :

$$\begin{pmatrix}
\frac{48}{5} & 0 & -4 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 16 & -4 & 0 & -4 & 0 & \cdots & 0 \\
-4 & -4 & 16 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 16 & -4 & 0 & -4 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -4 & 0 & -4 & 16 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 16 & -4 & 0 & -4 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & -4 & 0 & -4 & 16 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 16 & -4 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & -4 & 0 & -4 & 16 & -4 & 0 \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & -4 & 16 & -4 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & -4 & 16 & -4 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & -4 & 16 & -4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & -4 & 16 & -4 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & -4 & 16 & -4 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & -4 & 16 & -4 \\
0 & \cdots & 0 & -4 & \frac{48}{5}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{14} \\ u_{15} \\ u_{16} \\ u_{17} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} -35/2 \\ -13 \\ -19/2 \\ -17/2 \\ -5 \\ -4 \\ -1/2 \\ 5/2 \\ 2 \\ 8 \\ 7/2 \\ 23/2 \\ 7 \\ 15 \\ 21/2 \\ 37/2 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X \quad = \quad B$$

2/ On montre facilement que la matrice A a tous ses D_k non nuls.
On peut donc résoudre ce système par la méthode de Gauss.

Exercice 2 :

$N \in \mathbb{N}^*$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & & & (0) \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & -2 & 1 \\ & & & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

1/ $J = D^{-1}(E+F)$ avec $A = D - E - F$

avec $D = -2\, Id$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ -1 & \ddots & \\ (0) & -1 \quad 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & +2 & & (0) \\ & \ddots & -1 & \\ & & \ddots & -1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

$D^{-1} = -\frac{1}{2}\, Id$

$$E+F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & & (0) \\ -1 & \ddots & -1 & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 \quad 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow J(A,N) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & (0) \\ \frac{1}{2} & \ddots & \frac{1}{2} & \\ & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ (0) & & \frac{1}{2} \quad -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2/ $\underline{N=1}$:

$$J(A,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La méthode converge si $\rho(J(A,1)) < 1$

Résolvons $\det(J - \lambda I_d) = 0$ pour trouver le spectre de J

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff -\lambda\left(\lambda^2 + \frac{1}{2}\right) + 1\left(-\frac{\lambda}{2}\right) = 0$$

$$\iff -\lambda^3 - \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} = 0$$

$$\iff \lambda^3 + \lambda = 0$$

$$\iff \lambda(\lambda^2 + 1) = 0$$

$Sp(J) = \{-1, 0, 1\}$

$\longrightarrow \rho(J) = 1$

La méthode de Jacobi, ici, ne converge pas.

$\underline{N=2}$:

$$J(A,2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda\left(-\lambda^3 - \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}\right) + \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^4 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^4 + \frac{3}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4} = 0$$

$$\cancel{\Leftrightarrow \left(\lambda^2 + \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{9}{64} + \frac{1}{4} = 0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda^2 + \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{7}{16}$$

$$\lambda^2 = \frac{-\frac{3}{4} \pm i\sqrt{\left|\frac{9}{16} - 1\right|}}{2}$$

$$= \frac{-3/4 \pm i\sqrt{+\frac{7}{16}}}{2} = -\frac{3}{8} \pm i\sqrt{\frac{7}{64}}$$

$$\lambda^2 = -\frac{3}{8} \pm i\sqrt{\frac{7}{64}}$$

$$|\lambda^2| = \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{7}{64}} = \sqrt{\frac{16}{64}} = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow |\lambda| = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \rho(J(A,2)) = \frac{1}{2} < 1$$

Donc pour $N=2$, la méthode de Jacobi converge

3/ $$L_\omega(A,1) = (I - \omega D^{-1}E)^{-1}((1-\omega)I + \omega D^{-1}F)$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = -\frac{1}{2} I \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

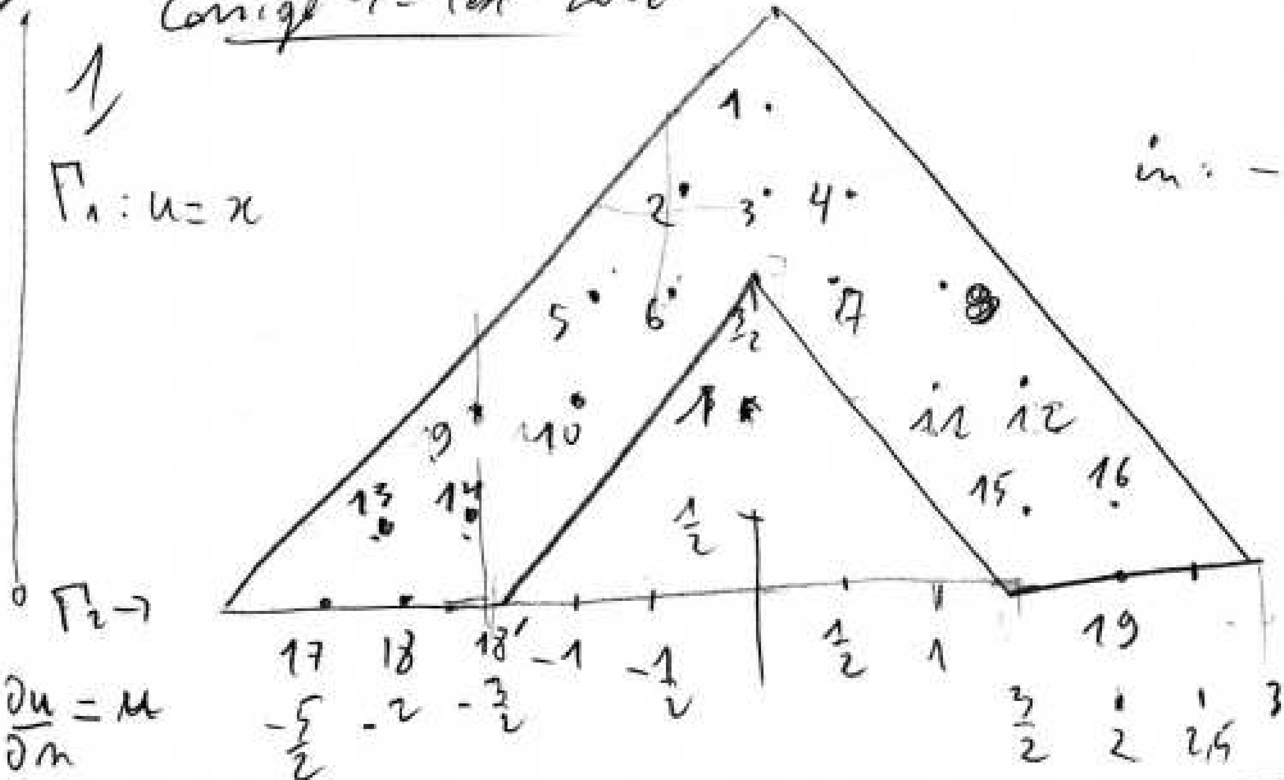
$$\omega D^{-1}E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\omega}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}$$

$$(I - \omega D^{-1}E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\omega}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\omega & 1 \end{pmatrix}$$

1/ Corrigé 1er test 2006

1/

in : $-\Delta u = y$



$$\frac{\partial u}{\partial n} = \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \quad \boxed{\text{sur } \Gamma_2,\ u = -\frac{\partial u}{\partial y}}$$

<u>en 1</u> : $-\Delta u(P) = \frac{1}{h^2}\left(4u_1 - u_3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$

soit $16u_1 - 4u_3 = \frac{5}{2}$

<u>en 2</u> : $-\Delta u(2) = \frac{1}{h^2}\left(4u_2 - u_3 - u_6 + 1 + \frac{1}{2}\right) = 2$

soit $16u_2 - 4u_3 - 4u_6 + 6 = 2$

<u>en 3</u> $-\Delta u(3) = \frac{1}{h^2}\left(4u_3 - u_4 - u_2 - u_1 + 0\right) = 2$

soit $16u_3 - 4u_4 - 4u_2 - 4u_1 = 2$

en 4 : $-\Delta(u_4) = \frac{1}{h^2}\left(4u_4 - u_3 - u_7 - \frac{1}{2} - 1\right) = 2$

soit $16u_4 - 4u_3 - 4u_7 = 8$

en 5 $-\Delta(u_5) = \frac{1}{h^2}\left(4u_5 - u_6 - u_{10} + 1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$

soit $16u_5 - 4u_6 - 4u_{10} + 4 \times \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$

soit $16u_5 - 4u_6 - 4u_{10} + 10 = \frac{3}{2}$

soit $16u_5 - 4u_6 - 4u_{10} = -\frac{17}{2}$

en 6 $-\Delta(u_6) = \frac{1}{h^2}\left(4u_6 - u_5 - u_2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

soit $16u_6 - 4u_5 - 4u_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times 4$

soit $16u_6 - 4u_2 - 4u_5 = -\frac{1}{2}$

en 7 $-\Delta(u_7) = \frac{1}{h^2}\left(4u_7 - u_4 - u_8 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

soit $16u_7 - 4u_4 - 4u_8 - 2 = \frac{3}{2}$

soit $16u_7 - 4u_4 - 4u_8 = \frac{7}{2}$

<u>en 8</u> $-\Delta u(8) = \frac{1}{h^2}\left(4u_8 - u_7 - u_{11} - \frac{3}{2} - 1\right) = \frac{3}{2}$

ssi $16u_8 - 4u_7 - 4u_{11} - 4\times 1 - 4\times\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

ssi $16u_8 - 4u_7 - 4u_{11} - 4 - 6 = \frac{3}{2}$

ssi $16u_8 - 4u_7 - 4u_{11} = \frac{23}{2}$

<u>en 9</u> $-\Delta u(9) = \frac{1}{h^2}\left(4u_9 - u_{10} - u_{14} + \frac{3}{2} + 2\right) = 1$

ssi $16u_9 - 4u_{10} - 4u_{14} + 6 + 8 = 1$

ssi $16u_9 - 4u_{10} - 4u_{14} = -13$

<u>en 10</u> $-\Delta u(10) = \frac{1}{h^2}\left(4u_{10} - u_9 - u_5 + \frac{1}{2} + 1\right) = 1$

ssi $16u_{10} - 4u_9 - 4u_5 + 4 + 2 = 1$

ssi $16u_{10} - 4u_9 - 4u_5 = -5$

<u>en 11</u> $-\Delta(u_{11}) = \frac{1}{h^2}\left(4u_{11} - u_{12} - u_8 - 1 - \frac{1}{2}\right) = 1$

soit $16u_{11} - 4u_{12} - 4u_8 - 4 - 2 = 1$

soit $16u_{11} - 4u_{12} - 4u_8 = 7$

<u>en 12</u> : $-\Delta u(12) = \frac{1}{h^2}\left(4u_{12} - u_{11} - u_{15} - 2 - \frac{3}{2}\right) = 1$

soit $16u_{12} - 4u_{11} - 4u_{15} - 8 - 6 = 1$

soit $16u_{12} - 4u_{11} - 4u_{15} = 15$

<u>en 13</u> $-\Delta(u_{13}) = \frac{1}{h^2}\left(4u_{13} - u_{14} + 2 - u_{18} + \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}$

soit $16u_{13} - 4u_{14} - 4u_{18} + 8 + 10 = \frac{1}{2}$

soit $16u_{13} - 4u_{14} - 4u_{18} = -\frac{35}{2}$

<u>en 14</u> $-\Delta u(14) = \frac{1}{h^2}\left(4u_{14} - u_9 - u_{13} + \frac{3}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}$

soit $16u_{14} - 4u_9 - 4u_{13} + 6 + 4 = \frac{1}{2}$

soit $16u_{14} - 4u_9 - 4u_{13} = -\frac{19}{2}$

<u>en 15</u> $\Delta u(15) = \frac{1}{h^2}\left(4u_{15} - u_{16} - u_{12} - \frac{3}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}$

soit $16u_{15} - 4u_{16} - 4u_{12} - 10 = \frac{1}{2}$

soit $16u_{15} - 4u_{16} - 4u_{12} = \frac{21}{2}$.

<u>en 16</u> $\Delta u(16) = \frac{1}{h^2}\left(4u_{16} - u_{15} - u_{19} - 2 - 2,5\right) = \frac{1}{2}$

soit $16u_{16} - 4u_{15} - 4u_{19} - (2,5+2)\times 4 = 0,5$

soit $16u_{16} - 4u_{15} - 4u_{19} = 18,5 = \frac{37}{2}$

(ordre 1)

<u>en 18</u> : $u(18) = -(u_{13}-u_{18})\times 2 \quad \left(\simeq \frac{u_{13}-u_{18}}{h}\right)$

$\Rightarrow \quad u_{18} = 2u_{18} - 2u_{13} \Rightarrow \quad u_{13} = \frac{u_{18}}{2}$

<u>ou mieux</u> (ordre 2)

$$u_{13} = u_{18} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}(18) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(18)$$

or $\frac{\partial u}{\partial y} = -u \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial u}{\partial y} = u$

donc $u_{13} = u_{18} + \frac{1}{2}(-u_{18}) + \frac{1}{8} u_{18}$

$\Rightarrow u_{13} = \frac{5}{8} u_{18} \Rightarrow \quad 8u_{13} - 5u_{18} = 0$

<u>en 19</u> : de m̂, ordre 2

$$u_{16} = \frac{5}{8} u_{19} \Rightarrow \quad 8u_{16} - 5u_{19} = 0$$

~~2a~~ on obtient la matrice (à ×4)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18	19
1	4	0	-1															
2		4	-1			-1												
3	-1	-1	4	-1														
4			-1	4			-1											
5					4	-1				-1								
6		-1			-1	4												
7				-1			4	-1										
8							-1	4			-1							
9									4	-1				-1				
10					-1				-1	4								
11								-1			4	-1						
12											-1	4			-1			
13													4	-1				-1
14									-1				-1	4				
15												-1			4	-1		
16															-1	4		-1
18													8				-5	
19																8		-5

Les deux dernières lignes peuvent être différentes si l'on a évalué autrement $\frac{\partial u}{\partial n}$.

2 b/ en appliquant la méthode de Gauss
on observe qu'il n'apparaît pas
de zéro sur la diagonale

La matrice peut être diagonalisée en une matrice de la forme exo 2 (le 1 est évident)

2) a) $-J = -D^{-1} \times (E+F) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(K - x\,Id) = \begin{vmatrix} -x & +1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -x & -\frac{1}{2} \\ 0 & +1 & -x \end{vmatrix}$$

$$= -x\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(-x) = -x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{x}{2} = -x^3 - x$$

les valeurs propres sont $0 ; -i ; i$

Dans la base adéquate,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \; ; \; D^2 = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

les puissances de D ne convergent pas

celles de J non plus

3/b/ $J_2 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(J - x\,Id) = x^4 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}$

vp: $\pm\frac{1}{4} \pm \sqrt{7}\, i$; leurs normes sont toutes égales à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ qui est < 1

convergence

3/ (2 façons)

$$L_\omega = (I - \omega D^{-1} E)^{-1} \left[(1-\omega) I + \omega D^{-1} F \right]$$
$$= (D - \omega E)^{-1} \left[(1-\omega) D + \omega F \right]$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad D^{-1} = -\frac{1}{2}\, Id_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & +2 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & +2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D - \omega E = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{pmatrix} - \omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & +2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ \omega & -2 & 0 \\ 0 & -2\omega & -2 \end{pmatrix}$$

$$(D - \omega E)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\omega}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\omega^2}{4} & \frac{\omega}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{vérification}}$$

$$(1-\omega)D + \omega F = \begin{pmatrix} -2(1-\omega) & 0 & 0 \\ 0 & -2(1-\omega) & 0 \\ 0 & 0 & -2(1-\omega) \end{pmatrix}$$

$$+ \omega \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2(\omega-1) & 2\omega & 0 \\ 0 & 2(\omega-1) & -\omega \\ 0 & 0 & 2(\omega-1) \end{pmatrix}$$

$$(D-\omega E)^{-1}\left[(1-\omega)D + \omega F\right] =$$

$$\begin{pmatrix} 2(\omega-1) & 2\omega & 0 \\ 0 & 2(\omega-1) & -\omega \\ 0 & 0 & 2(\omega-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\omega}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\omega^2}{4} & \frac{\omega}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\omega & -\omega & 0 \\ \frac{\omega}{2}(1-\omega) & -\frac{\omega^2}{2}+1-\omega & \frac{\omega}{2} \\ \frac{\omega^2}{2}(\omega-1) & +\frac{\omega^3}{2}+\omega(\omega-1) & -\frac{\omega^2}{2}+1-\omega \end{pmatrix}$$

voilà quand tombe philippe