Calcul Scientifique

Test n°1 – Promo B

Mercredi 10 Février 2010

Les documents et les calculettes ne sont pas autorisés et tout résultat non démontré ne sera pas pris en compte lors de la correction.

PROBLEME

Dans le plan réel muni d'un repère orthonormé (xOy), on considère les 5 points : $A(0\,;0)$, $B(0\,;\frac{1}{4})$, $C(\frac{1}{2}\,;\frac{3}{4})$, $D(1\,;\frac{1}{4})$ et $E(1\,;0)$. On note Ω l'intérieur du pentagone $ABCDE$ et $\partial\Omega$ sa frontière.

Considérons le problème suivant :

$$(\mathcal{P})\begin{cases} -\Delta u\,(x,y) = 512\,xy & \text{dans } \Omega \\ u\,(x,y) = 2\,x & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

(1 pt) 1. Etablir à l'ordre 2 le schéma classique à 5 points (ou schéma en croix) de $-\Delta u$ avec le même pas h dans les deux directions.

(4 pts) 2. Discrétiser le problème $(\mathcal{P})$ en prenant un pas constant $h = \frac{1}{4}$. On adoptera une numérotation des points du maillage par colonne de bas en haut et de gauche à droite. On notera le système linéaire obtenu $A\,u = b$ avec $A = \begin{bmatrix} U & {}^tV \\ V & 4\,I_2 \end{bmatrix}$ où U et V sont deux matrices carrées de même ordre, I_2 est la matrice unité d'ordre 2 et b un vecteur qu'on déterminera.

(2 pt) 3. Utiliser l'algorithme d'élimination de Gauss pour ramener, sans changement de pivot, ce système linéaire à un système triangulaire supérieur. On notera la matrice triangulaire obtenue $\tilde{A}$ et $\tilde{b}$ le second membre correspondant.

(2 pt) 4. Résoudre le système linéaire $\tilde{A}\,u = \tilde{b}$.

(2 pt) 5. Peut-on utiliser la méthode de Cholesky pour résoudre $A\,x = b$?

(1 pt) 6. Déterminer la matrice J de la méthode itérative de Jacobi associée à la matrice A.

(2 pt) 7. La méthode de Jacobi converge-t-elle ?

(3 pt) 8. Déterminer la matrice L de la méthode itérative de Gauss-Seidel associée à la matrice A.

(2 pt) 9. La méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle ?

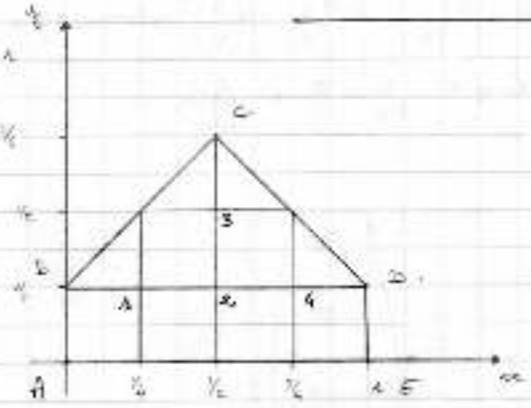
(1 pt) 10. Quelle méthode itérative, étudiée dans ce problème, converge le plus rapidement ?

HICHUBÉ Hélène
Gpe 6B TREX

Mercredi 10 Février

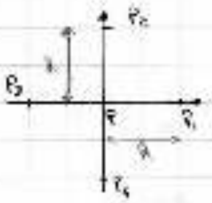
18

Calcul scientifique
Test 1 - promo B



$$P \quad \begin{cases} -\Delta u(x,y) = 3\pi^2\, xy & \text{dans } \Omega \\ u(x,y) = 2x & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

1.



$$\left.\begin{aligned} u(P_1) &= u(P) + h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^3) \\ u(P_3) &= u(P) - h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2u(P) - u(P_1) - u(P_3)}{h^2}$$

$$\left.\begin{aligned} u(P_2) &= u(P) + h\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + O(h^3) \\ u(P_4) &= u(P) - h\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + O(h^3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2u(P) - u(P_2) - u(P_4)}{h^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\Delta u = \frac{4u(P) - u(P_1) - u(P_2) - u(P_3) - u(P_4)}{h^2}} \quad \checkmark$$

2- point 1. $4u(1) - u(2) - 2\left(\frac{1}{4}\right) - 2(0) - 2\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times 512 \; \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$

$\underline{4u(1) - u(2)} = \frac{1}{4^4}\, 512 + 1 = \underline{3}$ ✓

point 2 $\quad 4u(2) - u(1) - u(3) - u(4) - 2\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times 512 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$

$\underline{4u(2) - u(1) - u(3) - u(4)} = 4 + 1 = \underline{5}$ ✓

point 3 $\quad 4u(3) - u(2) - 2\left(\frac{3}{4}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times 512 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 8$

$\underline{4u(3) - u(2)} = 8 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2} = \underline{11}$ ✓

point 4 $\quad 4u(4) - u(2) - 2(1) - 2\left(\frac{3}{4}\right) - 2\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times 512 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 6$

$\underline{4u(4) - u(2)} = 6 + 2 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \underline{11}$ ✓

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}} \checkmark \qquad \boxed{B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}} \checkmark$$

ou $\quad A = \begin{pmatrix} U & {}^tV \\ V & 4I_2 \end{pmatrix}$ ✓ où $\quad U = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

3-

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15/4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 23/4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15/4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 56/15 & -4/15 \\ 0 & 0 & -4 & 56 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 23/4 \\ 188/15 \\ 188 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15/4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 56/15 & -4/15 \\ 0 & 0 & 0 & [illegible] \end{pmatrix}} \qquad \boxed{\tilde{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 23/4 \\ 188/15 \\ [illegible] \end{pmatrix}}$$

$\tilde{A}x = \tilde{b}$ $\qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

4. $\iff \begin{cases} 4x_1 - x_2 = 3 \\ \frac{15}{4}x_2 - x_3 - x_4 = 23/4 \\ \frac{56}{15}x_3 - \frac{4}{15}x_4 = 188/15 \\ 78\, x_4 = 282 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 4x_1 - x_2 = 3 \\ 15x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 23 \\ 56x_3 - 4x_4 = 188 \\ 78\, x_4 = 282 \end{cases}$

$\iff$

$\underline{x_4} = 282/78 = \underline{47/13}$ ✓

$\underline{x_3} = \frac{1}{56}\left(188 + 4\,\frac{47}{13}\right) = \cancel{\frac{633}{182}}\ \frac{47}{13}$

$\underline{x_2} = \frac{1}{15}\left(23 + 4\times\frac{633}{182} + 4\times\frac{47}{13}\right) = \frac{1}{15}\left(23 + \frac{2612}{182} + \frac{2632}{182}\right)$

$= \frac{4186 + 2612 + 2632}{15\times 182}$

$= \frac{19430}{2730} = \cancel{\frac{1943}{273}}\ \frac{45}{13}$

$\underline{x_1} = \frac{1}{4}\left(3 + x_2\right) = \frac{1}{4}\left(3 + \frac{1943}{273}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{819 + 1943}{273}\right)$

$= \frac{2762}{4} = \cancel{\frac{1381}{2}}\ \frac{21}{13}$

5- Pour utiliser la méthode de Cholesky

Il faut que A soit symétrique et définie positive ✓

- <u>A est symétrique</u> ✓
- étude des déterminants principaux.

$\underline{4 > 0}$

$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 1 = \underline{15 > 0}$

$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \times 15 + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 60 - 4 = \underline{56 > 0}$

$\det A = 4 \times 56 - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 224 - 4 \times 4 = \underline{208 > 0}$

Donc <u>A est définie positive</u>

<u>on peut utiliser la méthode de Cholesky</u> pour résoudre $Au = b$ ✓

6. <u>Méthode de Jacobi</u>

$J = D^{-1}(E + F)$

où

$D^{-1} = \frac{1}{4} I \qquad E + F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{J = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$ ✓

7. <u>déterminons $\rho(J)$</u>

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & -\lambda & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -\lambda & 0 \\ 1/4 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 1/4 \begin{vmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda)\left[(-\lambda)\left(\lambda^2 - \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{4} \times \frac{\lambda}{4}\right] - \frac{1}{4}(-\lambda)\left(-\frac{\lambda}{4}\right)$$

$$= -\lambda\left(-\lambda^3 + \frac{\lambda}{16} + \frac{\lambda}{16}\right) - \frac{\lambda^2}{16}$$

$$= \lambda^4 - \frac{\lambda^2}{8} - \frac{\lambda^2}{16} = \lambda^4 - \frac{3\lambda^2}{16}$$

$$= \lambda^2\left(\lambda^2 - \frac{3}{16}\right)$$

HICAUBE
Hélène

donc $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $\lambda_3 = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

donc $\underline{\rho(J) = \frac{\sqrt{3}}{4}} < 1$ ✓

Donc <u>la méthode de Jacobi converge</u> ✓

8. <u>Méthode de Gauss Seidel</u>

$$\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1} F$$

où $(D-E) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ on cherche $(D-E)^{-1}$ $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & j \end{pmatrix}$

$$(D-E)(D-E)^{-1} = I \Rightarrow \begin{cases} 4a = 1 & 0 = 0 \\ -a + 4b = 0 & 4c = 1 \\ -b + 4d = 0 & -c + 4e = 0 \quad 4f = 1 \\ -b + 4g = 0 & -c + 4h = 0 \quad 4i = 0 \quad 4j = 1 \end{cases}$$ ✓

$\Rightarrow$ $a = 1/4$
$b = a/4 = 1/16$ $\quad c = 1/4$ $\quad f = 1/4$ ✓
$d = b/4 = 1/64$ $\quad e = 1/16$ $\quad i = 0$
$g = b/4 = 1/64$ $\quad h = 1/16$ $\quad j = 1/4$

$$(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/16 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/64 & 1/16 & 1/4 & 0 \\ 1/64 & 1/16 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \checkmark \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(D-E)^{-1} F = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/16 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/64 & 1/16 & 1/16 \\ 0 & 1/64 & 1/16 & 1/16 \end{pmatrix} = \mathcal{L}_1} \checkmark$$

9. <u>Déterminons $\rho(\mathcal{L}_1)$</u>

$$\det(\mathcal{L}_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/16 - \lambda & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/64 & 1/16 - \lambda & 1/16 \\ 0 & 1/64 & 1/16 & \frac{1}{16} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} - \lambda & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda)\left(\frac{3}{16} - \lambda\right)\lambda^2 = +\lambda^3\left(\lambda - \frac{3}{16}\right)$$

donc $\underline{\rho(\mathcal{L}_1) = \frac{3}{16} < 1}$ <u>la méthode de Gauss Seidel Converge</u>

✓

10. $\frac{1}{16} < \frac{\sqrt{3}}{4}$ donc $\rho(\mathcal{L}_1) < \rho(J)$

<u>La méthode de Gauss Seidel converge plus rapidement</u> ✓