(2)

ÉNERGÉTIQUE DU BÂTIMENT

Bravissimo

Congratulations !

G5

TEST 25/11/02

20/20

NOM SPATARO

Prénom : François

Les réponses seront portées directement sur la feuille. Seul document autorisé : fiche mémo de format A4.

---

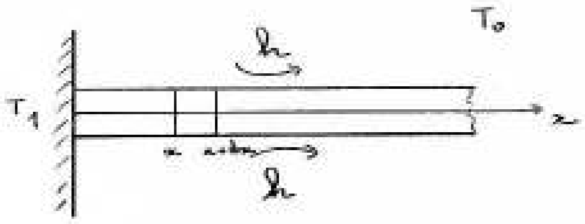
1. On considère une tige de section droite uniforme, chauffée à une extrémité à la température T_1 et placée dans un milieu ambiant à la température T_0.
La paroi latérale de la tige échange de la chaleur avec l'ambiance extérieure suivant un coefficient d'échange superficiel h. À l'intérieur de la tige, la propagation de la chaleur est supposée unidirectionnelle suivant un axe Ox, la température est donc fonction de cette variable.
Les autres caractéristiques de la tige sont les suivantes :

- Coefficient de conductivité supposé constant : λ.
- Périmètre : p
- Section droite : s

1.1 Calculer la répartition de la température T= f(x), dans les cas suivants :

- Tige de longueur infinie.
- Tige de longueur finie, l'extrémité de l'ailette étant thermiquement isolée.
- Tige de longueur finie avec un échange superficiel à l'extrémité, de coefficient d'échange superficiel h.

1.2 Calculer pour chacun des cas le rendement énergétique de la tige, définie comme le rapport de la quantité de chaleur transmise par la tige à la quantité de chaleur transmise à la base de la tige si la tige était supprimée.



1) On considère un petit élément de tige compris entre les abscisses x et x + dx

- quantité de chaleur reçue par la face d'abscisse x

$$d^2Q_1 = -\lambda \frac{dT}{dx}(x) . s . dt$$

- quantité de chaleur cédée par la face d'abscisse x+dx

$$d^2Q_2 = -\lambda \frac{dT}{dx}(x+dx) . s . dt$$

.../...

. quantité de chaleur cédée par convection

$$d^2Q_3 = h\left(T(x) - T_0\right) . p \times dx . dt$$

A l'équilibre, on a

$$d^2Q_1 = d^2Q_2 + d^2Q_3$$

$$-\lambda \frac{dT}{dx}(x) . s . dt = -\lambda \frac{dT}{dx}(x+dx) . s . dt + h\left(T(x) - T_0\right) p . dx . dt$$

$$\lambda s \left[\frac{dT}{dx}(x+dx) - \frac{dT}{dx}(x)\right] = h . p \left(T(x) - T_0\right) dx$$

Or $\frac{dT}{dx}(x+dx) - \frac{dT}{dx}(x) = d\left(\frac{dT}{dx}(x)\right)$

Donc $\lambda s \frac{d}{dx}\left(\frac{dT}{dx}(x)\right) = hp\left(T(x) - T_0\right)$

d'où $\underline{\lambda s \frac{d^2T(x)}{dx^2} = hp\left(T(x) - T_0\right)}$

On pose $X(x) = T(x) - T_0$; on a $\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{d^2T(x)}{dx^2}$

$$\lambda s \frac{d^2X(x)}{dx^2} = hp\left(X(x)\right)$$

L'équation caractéristique donne $r = \pm\sqrt{\frac{hp}{\lambda s}}$

On pose $\alpha = \sqrt{\frac{hp}{\lambda s}}$

On a donc $X(x) = T(x) - T_0 = A e^{\alpha x} + B e^{-\alpha x}$ avec A et B constantes

d'où $\underline{T(x) = A e^{\alpha x} + B e^{-\alpha x} + T_0}$

* <u>Tige de longueur infinie</u>

. Conditions aux limites

à $x = 0$, $T(0) = T_1 = A + B + T_0$

en $x = +\infty$, la température a une valeur finie donc $A = 0$

Donc $\begin{cases} A = 0 \\ B = T_1 - T_0 \end{cases}$

Donc $\underline{T(x) = \left(T_1 - T_0\right) e^{-\sqrt{\frac{hp}{\lambda s}}\, x} + T_0}$ / 3

.../...

* Tige de longueur finie L, l'extrémité de l'ailette étant thermiquement isolée

- Conditions aux limites

  · en $x=0$, $T(0)=T_1=A+B+T_0$

  · en $x=L$, on applique la loi de Fourier

$$\varphi(L) = -\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L} = 0$$

$$0 = A\alpha\, e^{\alpha L} - B\alpha\, e^{-\alpha L}$$

d'où $0 = A\,e^{\alpha L} - B\,e^{-\alpha L}$

On a donc

$$\begin{cases} A = \dfrac{e^{-\alpha L}}{e^{\alpha L}+e^{-\alpha L}}\,(T_1-T_0) \\[2ex] B = \dfrac{e^{\alpha L}}{e^{\alpha L}+e^{-\alpha L}}\,(T_1-T_0) \end{cases}$$

Donc $T(x) = \dfrac{T_1-T_0}{e^{\alpha L}+e^{-\alpha L}}\left[e^{-\alpha(L-x)} + e^{\alpha(L-x)}\right] + T_0$

$$\underline{T(x) = \frac{T_1-T_0}{ch(\alpha L)}\cdot ch\left(\alpha(L-x)\right) + T_0} \qquad \underline{\text{avec } \alpha = \sqrt{\frac{hp}{\lambda s}}}$$

* Tige de longueur finie L avec un échange superficiel à l'extrémité

- Conditions aux limites

  · en $x=0$, $T(0)=T_1=A+B+T_0$

  · en $x=0$, on applique la loi de Fourier

$$\varphi(L) = -\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L} = h\left(T(L)-T(0)\right)$$

$$-\lambda\left[A\alpha\, e^{\alpha L} - B\alpha\, e^{-\alpha L}\right] = h\left[A\,e^{\alpha L} + B\,e^{-\alpha L}\right]$$

$$A\,e^{\alpha L}(h+\lambda\alpha) + B\,e^{-\alpha L}(h-\lambda\alpha) = 0$$

On a donc

$$\begin{cases} A = \dfrac{(\lambda\alpha - h)\,e^{-\alpha L}}{2\left[h\, sh(\alpha L) + \lambda\alpha\, ch(\alpha L)\right]}\,(T_1-T_0) \\[3ex] B = \dfrac{(h+\lambda\alpha)\,e^{\alpha L}}{2\left[h\, sh(\alpha L) + \lambda\alpha\, ch(\alpha L)\right]}\,(T_1-T_0) \end{cases}$$

Donc $$\underline{T(x) = \frac{T_1-T_0}{h\, sh(\alpha L) + \lambda\alpha\, ch(\alpha L)}\left(\lambda\alpha\, ch\left(\alpha(L-x)\right) + h\, sh\left(\alpha(L-x)\right)\right) + T_0}$$

avec $\alpha = \sqrt{\dfrac{hp}{\lambda s}}$

2) Si la tige était supprimée, la quantité de chaleur transmise serait :

$$Q' = h\,(T_1 - T_0)\,.\,s\;dt$$

Soit une densité de flux

$$\varphi' = h\,(T_1 - T_0)$$

* <u>Tige de longueur infinie</u>

en $x=0$, $\varphi_1 = -\lambda\,(A\alpha\, e^{0} - B\alpha\, e^{0})$

$$\varphi_1 = +\lambda B \alpha$$

Donc $n_1 = \dfrac{\varphi_1}{\varphi'}$

$$n_1 = \frac{\lambda\,(T_1 - T_0)}{h\,(T_1 - T_0)}\sqrt{\frac{hp}{\lambda s}} \quad \text{donc} \quad \underline{n_1 = \sqrt{\frac{p\lambda}{s h}}}$$

2

* <u>Tige de longueur finie thermiquement isolée à son extrémité</u>

en $x=0$, $\varphi_2 = -\lambda\left(\dfrac{dT}{dx}\right)_{x=0} = \lambda\alpha\,(T_1 - T_0)\,th\,(\alpha L)$

Donc $n_2 = \dfrac{\varphi_2}{\varphi'}$

$$n_2 = \frac{\lambda\alpha}{h}\,th\,(\alpha L) \quad \text{donc} \quad \underline{n_2 = \sqrt{\frac{p\lambda}{s.h}} \times th\,(\alpha L)} \quad \text{avec } \underline{\alpha = \sqrt{\frac{hp}{\lambda s}}}$$

2

* <u>Tige de longueur finie avec un échange superficiel à l'extrémité</u>

en $x=0$, $\varphi_3 = -\lambda\left(\dfrac{dT}{dx}\right)_{x=0}$

$$\varphi_3 = \frac{\lambda\alpha\,(T_1 - T_0)}{h\,sh\,(\alpha L) + \lambda\alpha\,ch\,(\alpha L)}\left(\lambda\alpha\,sh(\alpha L) + h\,ch\,(\alpha L)\right)$$

Donc

$$n_3 = \frac{\varphi_3}{\varphi'}$$

2

$$\underline{n_3 = \frac{\lambda\alpha}{h} \times \frac{\lambda\alpha\,sh\,(\alpha L) + h\,ch\,(\alpha L)}{h\,sh\,(\alpha L) + \lambda\alpha\,ch\,(\alpha L)}} \quad \text{avec } \underline{\alpha = \sqrt{\frac{hp}{\lambda s}}}$$

2. Soit une piscine couverte dont l'air intérieur est à la température de 26 °C pour une humidité relative de 70%. Déterminer la valeur minimale de la température superficielle des baies vitrées pour éviter la condensation de l'humidité de l'air ambiant sur les vitrages.

On a $t(i) = 26°C$ (température sèche)

$\varepsilon = 70\%$

Le diagramme de l'air humide donne une température de rosée égale à

$t_r(i) = 20,2°C$ environ

Donc la température minimale des baies vitrées pour éviter la condensation est

$\underline{t_{min} = 20,2°C}$

3

3. Un bureau est climatisé par une injection d'air à 22 °C et 50 % d'humidité. Déterminer l'enthalpie de l'air repris dans ce volume compte tenu d'un réchauffement de l'air de 3 °C pour un taux d'humidité de 60 %.

On considère une transformation en 3 étapes

. Etape 1 : de A $\begin{cases} t = 22°C \\ \varepsilon = 50\% \end{cases}$ à B $\begin{cases} t = 11°C \\ \varepsilon = 100\% \end{cases}$ (transformation à humidité spécifique constante)

$\Delta q'_{A \to B} = 32 - 43,5 = -11,5$ kJ/kg$_{as}$ d'après le diagramme de l'air humide

. Etape 2 : de B $\begin{cases} t = 11°C \\ \varepsilon = 100\% \end{cases}$ à C $\begin{cases} t = 17°C \\ \varepsilon = 100\% \end{cases}$ (transformation à humidité relative constante)

$\Delta q'_{B \to C} = 47,5 - 32 = 15,5$ kJ/kg$_{as}$

. Etape 3 : de C $\begin{cases} t = 17°C \\ \varepsilon = 100\% \end{cases}$ à D $\begin{cases} t = 25°C \\ \varepsilon = 60\% \end{cases}$ (transformation à humidité spécifique constante)

$\Delta q'_{C \to D} = 56 - 47,5 = 8,5$ kJ/kg$_{as}$

L'enthalpie spécifique de l'air repris dans ce volume est

$$q' = \Delta q'_{A \to B} + \Delta q'_{B \to C} + \Delta q'_{C \to D}$$

donc $\underline{q' = 12,5 \text{ kJ/kg}_{as}}$

/ 3

DIAGRAMME DE L'AIR HUMIDE

© SEDIT – 78, rue Boissière – 75116 PARIS – Tél : 727-13-32

PRESSION : 100 000 Pa (ALTITUDES : – 200 à 250 m)

SPATARO François

1A – GS