E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1ère année)
Devoir numéro 2
Durée 2 heures

Vendredi 18 Novembre 2005

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Exercice 1 : Cylindre creux soumis à une densité massique radiale de forces Un cylindre creux d'axe de révolution Oz, de rayon intérieur R_0 et de rayon extérieur R_1 est en équilibre sous l'action du champ d'actions mécaniques à distance $\mathbf{b}(\vec{x}) = -\frac{q}{r^2}\vec{e_r}$ où q est une constante strictement positive donnée de dimension L^3T^{-2}. Ce cylindre est constitué d'un matériau homogène de masse volumique ρ ayant un comportement élastique linéaire isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson $\nu = 0$. On suppose alors, compte tenu de ces hypothèses et des symétries du problème, que le champ des déplacements exprimé dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) adopte la forme $\mathbf{u} = u(r)\vec{e_r}$, où u est une fonction inconnue de la variable d'espace r que l'on se propose de déterminer.

1. Donner, en fonction de u et r, l'expression du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ puis en déduire, en fonction cette fois de u, r et E, celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
2. Déduire, en tirant parti de la seule équation indéfinie de l'équilibre non trivialement satisfaite, que u est solution de l'équation différentielle ordinaire
$$u''(r) + \frac{u'(r)}{r} - \frac{u(r)}{r^2} = \frac{\rho q}{Er^2} \qquad r \in]R_0, R_1[\tag{1}$$
3. Montrer que l'équation différentielle ordinaire (1) admet une solution particulière $u^{(1)}(r)$ de la forme $u^{(1)}(r) = a$ et donner, en fonction de ρ, q et E, l'expression de la constante a. Chercher ensuite des solutions $u^{(0)}(r)$ de l'équation homogène associée sous la forme $u^{(0)}(r) = r^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. En déduire alors, en fonction de ρ, q, E, r et de deux constantes d'intégration A et B, l'expression générale de $u(r)$.
4. On suppose que la paroi intérieure du cylindre ($r = R_0$) n'est soumise à aucune action mécanique de contact et que sa paroi extérieure ($r = R_1$) reste fixe. Ecrire alors les conditions aux limites en $r = R_0$ et $r = R_1$ puis donner, en fonction de ρ, q, E, R_0 et R_1, l'expression des deux constantes d'intégration A et B.
5. De la question 4 déduire, en fonction de ρ, q, E, R_0 R_1 et r, l'expression des composantes non nulles de $\mathbf{u}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ puis, en fonction cette fois de ρ, q, R_0, R_1 et r, celle des composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}$.
6. Dans tout ce qui suit on suppose $R_1 = 2R_0$. Représenter les variations des composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}$ en fonction de r.
7. Le matériau obéissant au critère de limite élastique de Tresca, des résultats de la question 6 déduire, en fonction de ρ, R_0 et de la limite élastique en traction simple σ_0, la valeur q_c de q au-delà de laquelle apparaissent les premières déformations plastiques.

Exercice 2 : Ecoulement sphérique d'un fluide visqueux newtonien L'écoulement d'un fluide visqueux newtonien de viscosités dynamiques de volume ξ et de cisaillement η toutes deux constantes est défini par le champ eulérien des vitesses ayant pour expression, dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ associé au système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) (voir la figure B.3, annexe B page 320), $\mathbf{v}(\vec{x}) = \frac{q}{4\Pi r}\vec{e_r}$, $\forall\, \vec{x} \in \mathcal{D} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, r \geq 1\}$, où q est une constante strictement positive donnée de dimension L^2T^{-1}.

1. Donner l'expression du tenseur $\mathbf{D}$ des taux de déformation puis en déduire celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.

2. La masse volumique ρ ne dépendant que de la variable d'espace r (ce qui implique notamment $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) montrer que l'on a alors $\rho = \frac{k}{r}$ où k est une constante strictement positive de dimension ML^{-2}.

3. Montrer que le champ des quantités d'accélération a pour expression $\rho\gamma = \frac{kq^2}{48\Pi^2}\mathbf{grad}_x\frac{1}{r^3}$

4. Montrer que $\mathbf{div}_x\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{grad}_x p + \frac{(\xi+2\eta)q}{4\Pi}\mathbf{grad}_x\frac{1}{r^2}$

5. Les actions mécaniques à distance étant ici négligées, des équations indéfinies du mouvement et des résultats obtenus aux questions 3 et 4 déduire l'expression de la pression p en supposant cette dernière nulle aux points de la sphère unité ayant pour centre l'origine de l'espace physique $\mathbb{R}^3$ (on exprimera p en fonction de k, q, ξ, η et r). Pour quelle valeur de q a-t-on $\lim_{r\to+\infty} p = 0$? Représenter alors, pour cette valeur de q, les variations de p en fonction de $r \in [1, +\infty[$.

Exercice 3 : Sollicitation thermomécanique d'une poutre Une poutre de longueur L et de section droite rectangulaire, symétrique par rapport au plan (Ox_1, Ox_2), repose sur un bâti indéformable comme l'illustre la figure 1. L'extrémité gauche de la poutre est au contact du bâti tandis que son extrémité droite en est distante de δ, avec $\frac{\delta}{L} \ll 1$. Les déplacements de la poutre dans la direction Ox_3 perpendiculaire au plan (Ox_1, Ox_2) sont par ailleurs non empêchés. Cette poutre, constituée d'un matériau homogène au comportement thermoélastique linéaire isotrope de module d'Young E, de coefficient de Poisson $\nu = \frac{1}{3}$ et de coefficient de dilatation thermique linéaire β, est alors soumise, à partir de l'instant initial $t = 0$, à une augmentation de température $\Delta T = at$ où a est une constante strictement positive donnée de dimension θt^{-1}.

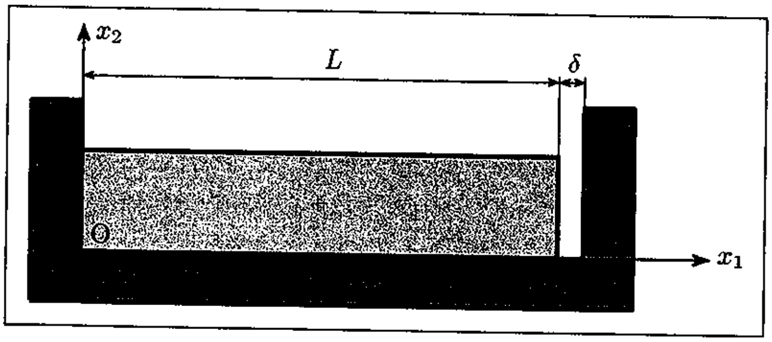


FIG. 1 – Sollicitation thermomécanique d'une poutre

Les actions mécaniques à distance étant ici négligées on suppose qu'en l'absence de frottement entre la poutre et le bâti le champ des déplacements adopte la forme $\mathbf{u} = u_1(x_1,t)\vec{e_1} + u_2(x_2,t)\vec{e_2} + u_3(x_3,t)\vec{e_3}$. La poutre est par ailleurs à chaque instant en état de quasi équilibre, de sorte que les termes d'accélération sont négligeables. Enfin l'on désigne par t_1 l'instant où l'extrémité droite de la poutre entre en contact avec le bâti.

1. Justifier les conditions aux limites cinématiques $u_1(0,t) = 0$, $u_2(0,t) = 0$ et $u_3(0,t) = 0$, $\forall t \geq 0$,

2. Montrer que l'on a, $\forall t \geq 0$, $u_1(x_1,t) = A(t)x_1$, $u_2(x_2,t) = B(t)x_2$ et $u_3(x_3,t) = B(t)x_3$ où A est une fonction à déterminer et où $B(t) = \frac{1}{3}(4\beta at - A(t))$.

3. On suppose $t \in [0, t_1[$. Donner l'expression de $A(t)$ en fonction de β, a et t. En déduire ensuite, en fonction cette fois de δ, a, β et L, celle de t_1.

4. On suppose à présent $t \geq t_1$. Quelle est alors l'expression de $A(t)$?

5. Étudier et représenter les variations en fonction du temps des composantes non nulles du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.

E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus ($1^{ère}$ année)
Devoir numéro 2
Durée 2 heures

Vendredi 19 Novembre 2004

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Problème : Sollicitation thermomécanique d'un cylindre

Un cylindre $(\mathcal{C})$ d'axe de révolution Oz, de rayon R_0 et de hauteur H_0 est enfermé dans une enceinte cylindrique creuse $(\mathcal{E})$ de même axe de révolution Oz, de rayon intérieur égal au rayon de $(\mathcal{C})$ et de hauteur intérieure $H = H_0 + e$, avec $\frac{e}{H_0} \ll 1$, comme le représente la figure 1. L'enceinte $(\mathcal{E})$ est constituée d'un matériau **non déformable** tandis que le cylindre $(\mathcal{C})$ est un solide déformable, homogène et non pesant au comportement thermoélastique linéaire et isotrope, de module d'Young E, de coefficient de Poisson ν et de coefficient de dilatation thermique linéaire β.

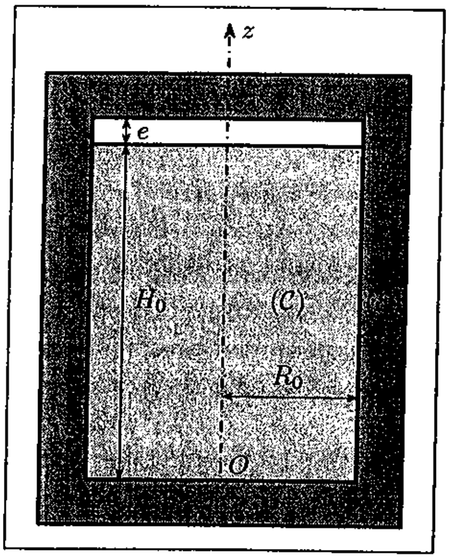


FIG. 1 – Sollicitation thermomécanique d'un cylindre

Le cylindre $(\mathcal{C})$ est soumis, à partir de l'instant initial $t = 0$, à une augmentation progressive $\Delta T(t) = at$ de sa température, où a est une constante donnée et strictement positive, de dimension $\theta \mathrm{T}^{-1}$. L'interface entre la paroi latérale $R = R_0$ du cylindre $(\mathcal{C})$ et l'enceinte $(\mathcal{E})$ est par ailleurs parfaitement lisse, de sorte que les déplacements verticaux de $(\mathcal{C})$ ne sont pas empêchés.

On suppose alors, compte tenu de l'ensemble des hypothèses précédentes, que le champ des déplacements $\mathbf{u}$ du cylindre $(\mathcal{C})$, exprimé dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) (voir la figure B.2 du polycopié, section B.3.2 page 381), adopte la forme $\mathbf{u}(r, z, t) = u_r(r, t)\,\vec{e_r} + u_z(z, t)\,\vec{e_z}$, où u_r et u_z sont des fonctions inconnues dépendant respectivement des variables r et z ainsi que de la variable temps. On admet toutefois qu'à chaque instant le cylindre $(\mathcal{C})$ se trouve dans un état de quasi-équilibre et que

l'accélération est négligeable. On désigne par ailleurs par ε et σ, respectivement, les champs tensoriels des petites déformations et des contraintes de Cauchy au sein du cylindre $(\mathcal{C})$ et l'on choisit la pression atmosphérique ambiante p_{atm} comme origine des contraintes (i.e. $p_{\text{atm}=0}$). Enfin, on désigne par t_1 la valeur de t où la section supérieure $z = H_0$ du cylindre $(\mathcal{C})$ entre en contact avec l'enceinte $(\mathcal{E})$.

1. On suppose $0 \leq t \leq t_1$. Que vaut alors la contrainte normale σ_{zz} en $z = H_0$? Quel est son signe si $t \geq t_1$?
2. On se propose de montrer (ce que suggère évidemment l'intuition) que l'on a $u_r(R_0, t) = 0$, $\forall t \geq 0$. Justifier tout d'abord, en quelques mots, que l'on ne peut avoir $u_r(R_0, t) > 0$. En supposant ensuite $u_r(R_0, t) < 0$, que peut-on dire de la paroi latérale $R = R_0$ du cylindre puis de l'état de contrainte au sein de ce dernier ? Montrer alors, après avoir tiré parti des équations de la thermoélasticité linéaire isotrope ainsi que de la définition de la déformation orthoradiale $\varepsilon_{\theta\theta}$, que l'on aboutit à une contradiction et conclure.
3. Donner, en fonction de u_r, u_z et r, l'expression des composantes non nulles de ε puis, en fonction cette fois de u_r, u_z, r, β, ΔT et des modules de Lamé λ et μ, celles des composantes non nulles de σ.
4. Soit t un instant quelconque mais fixé. De l'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur $\vec{e_r}$ déduire l'équation différentielle ordinaire que doit satisfaire u_r à cet instant puis montrer, en tirant notamment parti du résultat obtenu à la question 2, que l'on a nécessairement $u_r = 0$.
5. Soit t un instant quelconque mais fixé. De l'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur $\vec{e_z}$ déduire l'équation différentielle ordinaire que doit satisfaire u_z à cet instant puis montrer, en tirant parti des conditions aux limites en $z = 0$, que l'on a $u_z = C(t)z$ où C est une fonction de la variable temps que l'on se propose à présent de déterminer.
6. Donner, en fonction de C, λ, μ, β, a et t, l'expression des composantes non nulles de ε et σ.
7. On suppose tout d'abord $0 \leq t \leq t_1$. Donner alors, en fonction de ν, β, a et t et après avoir tiré parti du résultat obtenu à la question 1, l'expression de C. En déduire ensuite, en fonction de E, ν, β, a et t, celle des composantes non nulles de ε et σ.
8. Donner, en fonction de ν, e, H_0, β et a, l'expression de t_1.
9. On suppose à présent que le matériau constituant le cylindre obéit au critère de limite élastique de Tresca et l'on désigne par σ_0 la limite élastique en traction simple. Pour $0 \leq t \leq t_1$ quelle est, en fonction de σ_0, E, ν et β, l'expression de l'élévation maximale $\Delta T_{\max}$ de température que peut supporter le cylindre si l'on veut éviter l'apparition de déformations plastiques. Montrer alors que l'on ne peut avoir $t = t_1$ sans plastification que si le ratio $k = \frac{e}{H_0}$ n'excède pas une valeur $k_{\max}$ dont on donnera l'expression en fonction de ν, E et σ_0.

   Application numérique Donner la valeur de $k_{\max}$ pour $E = 200000\,\text{MPa}$, $\sigma_0 = 300\,\text{MPa}$ et $\nu = 0.3$. Conclusion.
10. On suppose à présent $k < k_{\max}$ et $t \geq t_1$. Qelle est alors, en fonction de e et H_0, l'expression de C ? Quelle est son expression, en fonction cette fois de ν, β, a et t_1. En déduire ensuite, en fonction de E, ν, β, a, t_1 et t, celle des composantes non nulles de σ et montrer qu'il ne peut y avoir apparition de déformations plastiques. Dire pourquoi ce dernier résultat était prévisible.
11. Les hypothèses de la question 10 étant satisfaites, représenter les variations des déplacements verticaux $u_z(\frac{H_0}{2}, t)$ et $u_z(H_0, t)$ entre les instants $t = 0$ et $t = 2t_1$ puis, sur une seconde figure, celles des composantes non nulles de σ. Retrouver le fait qu'il ne peut y avoir apparition de déformations plastiques.
12. Les hypothèses de la question 10 étant toujours satisfaites, représenter, sur une même figure, l'arbelon du tricercle de Mohr des contraintes aux instants $t = 0$, $t = \frac{t_1}{2}$, $t = t_1$, $t = \frac{3t_1}{2}$ et $t = 2t_1$. Vérifier à nouveau qu'il ne peut y avoir apparition de déformations plastiques.
13. L'espace entre le cylindre $(\mathcal{C})$ et l'enceinte $(\mathcal{E})$ (i.e. $z \in]H_0, H_0 + e[$) est à présent occupé, à l'instant initial $t = 0$, par un liquide incompressible. Déterminer l'état de contrainte au sein du cylindre. Peut-il y avoir apparition de déformations plastiques ?

1. Si $0 \leq t \leq t_1$ la face supérieure $z = H_0$ du cylindre est un bord libre et $\boxed{\sigma_{zz}(r, z=H_0, t) = 0}$ $\forall r \in [0\ R_0]$. Si $t \geq t_1$ elle est en contact avec l'enceinte et $\boxed{\sigma_{zz}(r, z=H_0, t) \leq 0}$ $\forall r \in [0\ R_0]$ (compression).

2. On ne peut avoir $u_r(R_0, t) > 0$ puisque l'enceinte est indéformable. Si $u_r(R_0,t) < 0$, la paroi $r = R_0$ du cylindre est un bord libre. On a alors $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$ avec $\sigma_{zz} = 0$ si $0 \leq t \leq t_1$ et $\sigma_{zz} \leq 0$ si $t \geq t_1$. Donc $\varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{zz} + \beta \Delta T \geq 0$ et $u_r(R_0, t) = R_0\, \varepsilon_{\theta\theta}(R_0, t) \geq 0$ ce qui contredit l'hypothèse initiale. Donc $\boxed{u_r(R_0, t) = 0 \quad \forall t \geq 0}$

3. $\boxed{\varepsilon_{rr} = \partial_r u_r}$, $\boxed{\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}}$, $\boxed{\varepsilon_{zz} = \partial_z u_z}$, $\boxed{\theta = \partial_r u_r + \frac{u_r}{r} + \partial_z u_z}$ puis

$$\boxed{\begin{cases} \sigma_{rr} = \lambda\theta - (3\lambda + 2\mu)\beta\Delta T + 2\mu\, \partial_r u_r \\ \sigma_{\theta\theta} = \lambda\theta - (3\lambda + 2\mu)\beta\Delta T + 2\mu \frac{u_r}{r} \\ \sigma_{zz} = \lambda\theta - (3\lambda + 2\mu)\beta\Delta T + 2\mu\, \partial_z u_z \end{cases}} \qquad (1)$$

4. $\partial_r \sigma_{rr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \Rightarrow \lambda\left(\partial^2_{rr} u_r + \frac{1}{r}\partial_r u_r - \frac{1}{r^2}u_r\right) + 2\mu\, \partial^2_{rr} u_r + \frac{2\mu}{r}\left(\partial_r u_r - \frac{u_r}{r}\right) = 0$

$$\Rightarrow \partial^2_{rr} u_r + \frac{1}{r}\partial_r u_r - \frac{1}{r^2} u_r = 0$$

$$\Rightarrow u_r = A(t)\, r + \frac{B(t)}{r}$$

Alors, $u_r(0,t) < +\infty \Rightarrow B(t) = 0$ puis $u_r(R_0,t) = 0 \Rightarrow A(t) = 0$

Donc $\boxed{u_r(r,t) = 0 \quad \forall r \in [0\ R_0] \quad \forall t \geq 0}$ (2)

5. $\partial_z \sigma_{zz} = 0 \Rightarrow \partial^2_{zz} u_z = 0 \Rightarrow u_z = C(t)\, z + D(t)$.
Mais $u_z(0,t) = 0 \Rightarrow D(t) = 0$. $\boxed{\text{Donc } u_z(z,t) = C(t)\, z}$ (3)

6. De (1), (2), (3) et de $\Delta T(t) = at$ on tire.

$\boxed{\varepsilon_{zz} = C(t)}$, $\boxed{\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \lambda C(t) - (3\lambda + 2\mu)\beta a t}$ (4) et $\boxed{\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)C(t) - (3\lambda + 2\mu)\beta a t}$ (5)

7. De $\sigma_{zz}(z = H_0, t) = 0$ on tire, puisque $\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)\, C(t) - (3\lambda + 2\mu)\beta a t$, $C(t) = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\beta a t$. Or on a $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $2\mu = \frac{E}{1+\nu}$ ce qui donne $3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1-2\nu}$ et $\lambda + 2\mu = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$. Donc $\boxed{C(t) = \frac{1+\nu}{1-\nu}\beta a t}$.

On a ensuite $\boxed{\varepsilon_{zz} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\beta a t}$, $\boxed{u_z = \frac{1+\nu}{1-\nu}\beta a t z}$ ainsi que

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \lambda C(t) - (3\lambda+2\mu)\beta a t = \left(\lambda\frac{1+\nu}{1-\nu} - (3\lambda+2\mu)\right)\beta a t$$
$$= E\left(\frac{\nu}{(1-\nu)(1-2\nu)} - \frac{1}{1-2\nu}\right)\beta a t = -\frac{E}{1-\nu}\beta a t \ : \ \boxed{\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -\frac{E}{1-\nu}\beta a t}$$

<u>Remarque</u> il était inutile de recalculer σ_{zz} qui vaut 0.

8. On a $u_z(H_0, t_1) = e$ soit $\frac{1+\nu}{1-\nu}\beta a t_1 H_0 = e$ d'où $\boxed{t_1 = \frac{1}{\beta a}\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{e}{H_0}}$

9. On doit avoir ici, puisque $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$ et que $\sigma_{zz} = 0$, $|\sigma_{rr}| \leq \sigma_0$, soit $\frac{E}{1-\nu}\beta \underbrace{at}_{\Delta T(t)} \leq \sigma_0$ d'où $\Delta T(t) \leq \Delta T_{max}$ avec $\boxed{\Delta T_{max} = \frac{1-\nu}{\beta}\frac{\sigma_0}{E}}$.

Puis $\Delta T(t_1) = a t_1 \leq \Delta T_{max}$ donne, avec les expressions précédentes de t_1 et ΔT_{max}, $\frac{1}{\beta}\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{e}{H_0} \leq \frac{1-\nu}{\beta}\frac{\sigma_0}{E}$ c'est à dire $k = \frac{e}{H_0} \leq k_{max}$ avec $\boxed{k_{max} = (1+\nu)\frac{\sigma_0}{E}}$

A.N. $k_{max} \simeq 2\,10^{-3}$. On reste bien en "petites déformations"

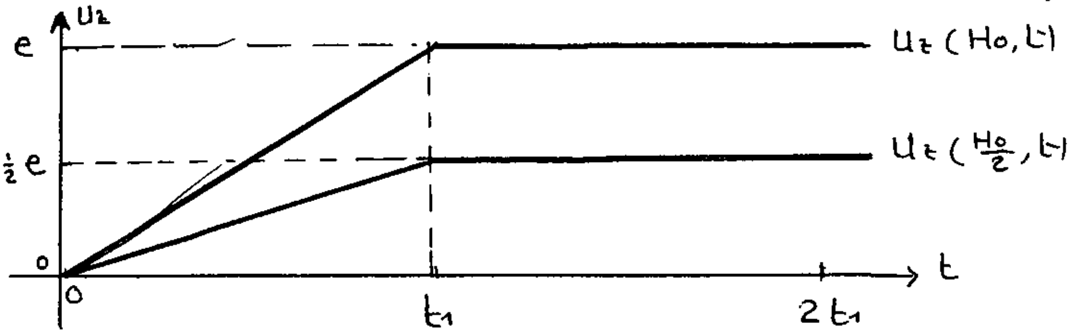
10. Remarquons tout d'abord que $k < k_{max} \Rightarrow \Delta T(t) < \Delta T_{max}$ $\forall\, t \in [0\ t_1]$.
On a ensuite, pour $t \geq t_1$, $u_z(H_0, t) = e$ d'où $C(t) H_0 = e$ et $\boxed{C(t) = \frac{e}{H_0}}$.
Il vient alors, puisque $t_1 = \frac{1}{\beta a}\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{e}{H_0}$, $\boxed{C(t) = \frac{1+\nu}{1-\nu}\beta a t_1}$ et, avec (4) et (5),

$$\sigma_{zz} = (\lambda+2\mu) C(t) - (3\lambda+2\mu)\beta a t = (\lambda+2\mu)\frac{1+\nu}{1-\nu}\beta a t_1 - (3\lambda+2\mu)\beta a t$$
$$= \frac{E}{1-2\nu}\beta a t_1 - \frac{E}{1-2\nu}\beta a t \ \Rightarrow\ \boxed{\sigma_{zz} = -\beta a\frac{E}{1-2\nu}(t - t_1)}$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \lambda C(t) - (3\lambda+2\mu)\beta a t = \lambda\frac{1+\nu}{1-\nu}\beta a t_1 - (3\lambda+2\mu)\beta a t$$
$$= \frac{E\nu}{(1-\nu)(1-2\nu)}\beta a t_1 - \frac{E}{1-2\nu}\beta a t = \frac{E(1-\nu+2\nu-1)}{(1-\nu)(1-2\nu)}\beta a t_1 - \frac{E}{1-2\nu}\beta a t$$
$$= \left(\frac{E}{1-2\nu} - \frac{E}{1-\nu}\right)\beta a t_1 - \frac{E}{1-2\nu}\beta a t \Rightarrow \boxed{\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -\frac{E}{1-\nu}\beta a t_1 - \frac{E}{1-2\nu}\beta a (t - t_1)}$$

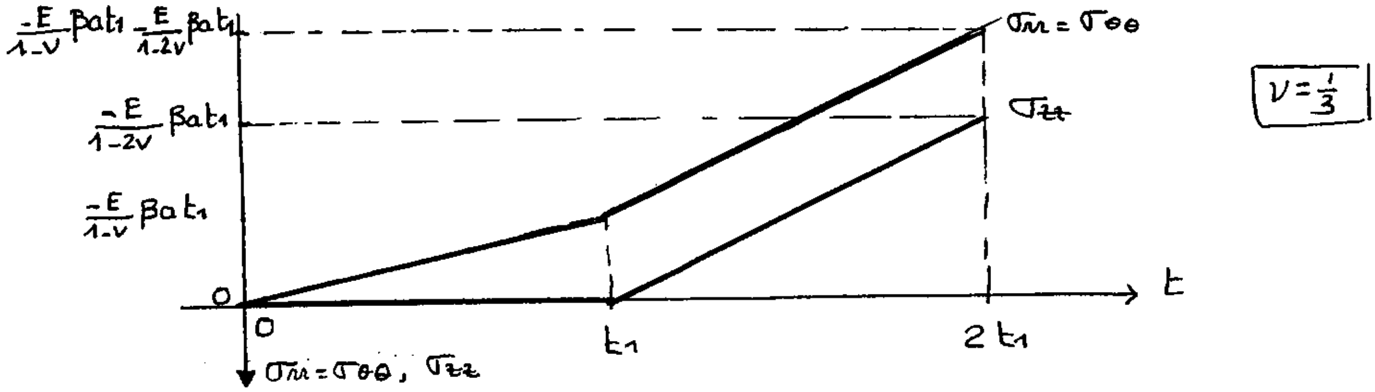
Enfin, $\mathrm{Max}\{|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}|, |\sigma_{rr} - \sigma_{zz}|, |\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}|\} = |\sigma_{rr} - \sigma_{zz}| = \frac{E}{1-\nu}\beta a t_1 = \frac{E}{1-\nu}\beta\Delta T(t_1)$ qui est strictement inférieur à $\frac{E}{1-\nu}\beta\,\Delta T_{max} = \sigma_0$. Il n'y a donc pas de déformations plastiques. Ceci était prévisible puisque l'état de contrainte aux instants $t \geq t_1$ ne diffère de celui relatif à l'instant t_1 que par ~~un~~ terme purement isotrope et égal à $-\frac{E}{1-2\nu}\beta a(t - t_1)\,\delta$

11. $0 \leq t \leq t_1$: $u_z(z,t) = \frac{1+\nu}{1-\nu}\beta a t z$, $t \geq t_1$: $u_z(z,t) = \frac{e}{H_0} z = \frac{1+\nu}{1-\nu} \beta a t_1 z$



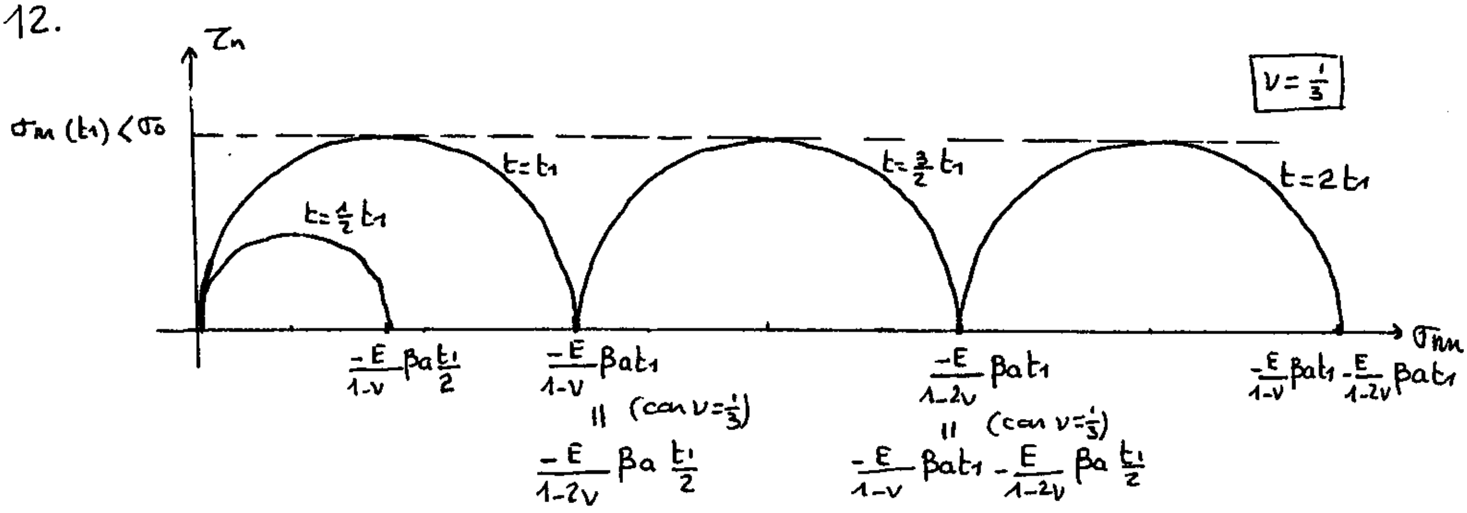
On peut écrire, pour $t \geq 0$:

$$\begin{cases} \sigma_{zz} = -\beta a \frac{E}{1-2\nu}(t-t_1)\, Y(t-t_1) \\ \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -\frac{E}{1-\nu}\beta a t_1 - \frac{E}{1-2\nu}\beta a (t-t_1)\, Y(t-t_1) \end{cases}$$



on retrouve bien $|\sigma_{rr}(t) - \sigma_{zz}(t)| = |\sigma_{rr}(t_1) - \sigma_{zz}(t_1)|$ $\forall\, t \geq t_1$

12.



13. On a ici $u_r = u_z = 0$ d'où $\varepsilon = 0$ et $\sigma = -(3\lambda + 2\mu)\beta a t \delta$

L'état de contrainte étant isotrope, il n'y a pas de déformations plastiques.

E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1ère année)
Devoir numéro 2
Durée 2 heures

Mercredi 10 Décembre 2003

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Problème : Cylindres creux coaxiaux

On considère les cylindres creux $C^{(1)}$ et $C^{(2)}$ représentés sur la figure 1. Ces deux cylindres, de même axe de révolution Oz, sont constitués du même matériau homogène et non pesant au comportement élastique linéaire et isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson $\nu = \frac{1}{3}$.

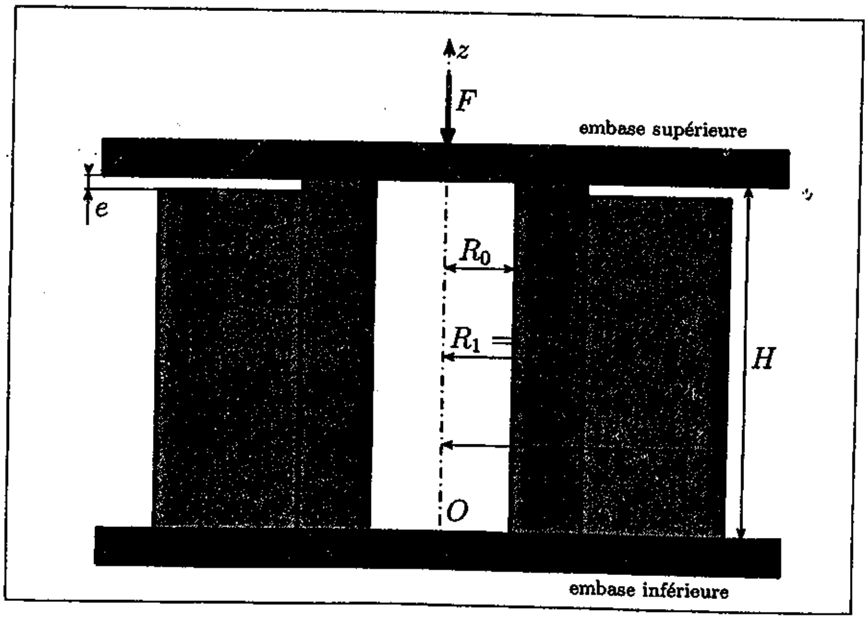


FIG. 1 – Cylindres creux coaxiaux

Le cylindre creux $C^{(1)}$ a pour rayon intérieur R_0, pour rayon extérieur $R_1 = 2R_0$ et pour hauteur H tandis que $C^{(2)}$ a pour rayon intérieur $R_1 = 2R_0$, pour rayon extérieur $R_2 = 4R_0$ et pour hauteur $H - e$ avec $0 < \frac{e}{H} \ll 1$. L'interface $\{r = R_1, 0 \leq z \leq H\}$ entre les deux cylindres est supposée parfaitement lisse et le cylindre $C^{(1)}$ peut donc glisser librement à l'intérieur de

$C^{(2)}$. Conséquemment, les déplacements verticaux des particules initialement situées de part et d'autre de cette interface à une même cote z seront a priori différents. Par ailleurs, l'interface $\{R_0 \leq r \leq R_2, z = 0\}$ entre l'embase inférieure fixe et les cylindres $C^{(2)}$ et $C^{(1)}$ ainsi que l'interface $\{R_0 \leq r \leq R_1, z = H\}$ entre ce dernier cylindre et l'embase supérieure mobile sont elles aussi parfaitement lisses. Les deux embases étant supposées rigides, la force F appliquée au dispositif (voir la figure 1) est donc uniformément répartie à l'interface entre l'embase supérieure et le cylindre $C^{(1)}$.

On souhaite déterminer la valeur F_l de F à partir de laquelle l'embase supérieure entre en contact avec le cylindre $C^{(2)}$. On supposera donc, dans tout ce qui suit, $F \leq F_l$, de sorte que la section supérieure $z = H - e$ de ce cylindre reste libre de toute action mécanique extérieure.

On suppose alors, compte tenu de l'ensemble des hypothèses précédentes, que le champ des déplacements $\mathbf{u}^{(i)}$ du cylindre $C^{(i)}$, $i \in \{1, 2\}$, exprimé dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z), adopte la forme $\mathbf{u}^{(i)}(r, z) = u_r^{(i)}(r)\,\vec{e_r} + u_z^{(i)}(z)\,\vec{e_z}$, où $u_r^{(i)}$ et $u_z^{(i)}$, $i \in \{1, 2\}$, sont des fonctions inconnues dépendant respectivement des variables r et z. Enfin l'on désigne par $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$, respectivement, les champs tensoriels des petites déformations et des contraintes de Cauchy relatifs au cylindre $C^{(i)}$, $i \in \{1, 2\}$.

1. Montrer que les modules de Lamé λ et μ satisfont la relation $\lambda = 2\mu$ et donner l'expression de λ en fonction de E.
2. Donner, en fonction de F et R_0, l'expression de la contrainte normale $\sigma_{zz}^{(1)}$ en tout point du cylindre $C^{(1)}$.
3. Que vaut la contrainte normale $\sigma_{zz}^{(2)}$ au sein du cylindre $C^{(2)}$? $u_r(r) + u_z(z)$
4. Pour $i \in \{1, 2\}$ donner, en fonction de r, $u_r^{(i)}$ et $u_z^{(i)}$, l'expression des composantes non nulles de $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$ puis, en fonction cette fois de λ, r, $u_r^{(i)}$ et $u_z^{(i)}$, celle des composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$.
5. Pour $i \in \{1, 2\}$ montrer, en tirant parti des équations indéfinies de l'équilibre et des conditions aux limites cinématiques en $z = 0$, que les déplacements radiaux adoptent la forme $u_r^{(i)}(r) = A^{(i)}r + \frac{B^{(i)}}{r}$, tandis que les déplacements verticaux ont pour expression $u_z^{(i)}(z) = C^{(i)}z$, où $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, $C^{(1)}$ et $C^{(2)}$ sont des constantes que l'on se propose à présent de déterminer.
6. Pour $i \in \{1, 2\}$ donner, en fonction de E, $A^{(i)}$, $B^{(i)}$, $C^{(i)}$ et r, l'expression des composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$.
7. Du résultat obtenu à la question 2 et des conditions aux limites en contraintes en $r = R_0$ déduire, en fonction de F, E, R_0 et $B^{(1)}$, l'expression des constantes $A^{(1)}$ et $C^{(1)}$.
8. Du résultat obtenu à la question 3 et des conditions aux limites en contraintes en $r = R_2$ déduire, en fonction cette fois de R_0 et $B^{(2)}$, l'expression des constantes $A^{(2)}$ et $C^{(2)}$.

9. De la continuité du déplacement radial u_r et de la contrainte normale σ_{rr} à l'interface $\{r = R_1, 0 \leq z \leq H\}$ entre les deux cylindres jointe aux expressions de $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $C^{(1)}$ et $C^{(2)}$ trouvées aux questions 7 et 8 tirer le système de deux équations linéaires satisfaites par $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$ puis donner, en fonction de F et E, l'expression de ces deux constantes. En déduire alors, en fonction cette fois de F, E et R_0, celle des constantes $A^{(1)}$, $C^{(1)}$, $A^{(2)}$ et $C^{(2)}$.

10. Pour $i \in \{1,2\}$ donner, en fonction de F, R_0 et r, l'expression des composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$.

11. Donner, en fonction de E, H, e et R_0, l'expression de la force F_l à partir de laquelle l'embase supérieure entre en contact avec le cylindre $C^{(2)}$, puis simplifier cette expression en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à deux en $\frac{e}{H}$.

12. On suppose à présent que le matériau constituant les deux cylindres obéit au critère de limite élastique de Tresca et l'on désigne par τ_0 la valeur de la contrainte de cisaillement τ_n à la limite élastique. Pour $F \leq F_l$ dire lequel des deux cylindres $C^{(1)}$ et $C^{(2)}$ est susceptible de plastifier en premier et donner, en fonction de τ_0 et R_0, l'expression F_e de F à la limite élastique.

13. On souhaite que l'embase supérieure puisse entrer en contact avec le cylindre $C^{(2)}$ sans qu'apparaissent de déformations plastiques. En utilisant l'expression simplifiée de F_l trouvée à la question 11 , montrer que la grandeur adimensionnelle $\frac{e}{H}$ ne peut alors excéder une limite proportionnelle à la grandeur adimensionnelle $\frac{\tau_0}{E}$ (on vérifiera que la simplification opérée sur l'expression de F_l va dans le sens de la sécurité).
Application numérique $E = 200000$ MPa, $\tau_0 = 150$ MPa.

1. On a, puisque $\nu = \frac{1}{3}$, $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{E\,1/3}{4/3 \cdot 1/3} = \frac{3}{4}E$ et $2\mu = \frac{E}{1+\nu} = \frac{E}{4/3} = \frac{3}{4}E$
Donc $\lambda = 2\mu = \frac{3}{4}E$.

2. On a $\sigma_{zz}^{(1)} = \frac{-F}{\pi(R_1^2 - R_0^2)}$ c'est-à-dire, puisque $R_1 = 2R_0$, $\sigma_{zz}^{(1)} = \frac{-F}{3\pi R_0^2}$

3. La section supérieure du cylindre $\mathcal{C}^{(2)}$ est libre. On a donc $\sigma_{zz}^{(2)} = 0$

4. On a, $\forall i \in \{1,2\}$, $\varepsilon_{rr}^{(i)} = u_r^{(i)\prime}$, $\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)} = \frac{u_r^{(i)}}{r}$ et $\varepsilon_{zz}^{(i)} = u_z^{(i)\prime}$. Les autres composantes de $\varepsilon^{(i)}$ sont nulles. Par ailleurs, $\sigma^{(i)} = \lambda \operatorname{tr}\varepsilon^{(i)}\delta + 2\mu\,\varepsilon^{(i)}$ et $2\mu = \lambda$ donnent $\sigma^{(i)} = \lambda(\operatorname{tr}\varepsilon^{(i)}\delta + \varepsilon^{(i)})$. Les composantes non nulles de $\sigma^{(i)}$ sont donc $\sigma_{rr}^{(i)} = \lambda\left(2u_r^{(i)\prime} + \frac{u_r^{(i)}}{r} + u_z^{(i)\prime}\right)$, $\sigma_{\theta\theta}^{(i)} = \lambda\left(u_r^{(i)\prime} + 2\frac{u_r^{(i)}}{r} + u_z^{(i)\prime}\right)$ et $\sigma_{zz}^{(i)} = \lambda\left(u_r^{(i)\prime} + \frac{u_r^{(i)}}{r} + 2u_z^{(i)\prime}\right)$.

5. Soit $i \in \{1,2\}$. L'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur $\vec{e_r}$ s'écrit ici $\partial_r\sigma_{rr}^{(i)} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr}^{(i)} - \sigma_{\theta\theta}^{(i)}) = 0$ ce qui donne, compte tenu des expressions de $\sigma_{rr}^{(i)}$ et $\sigma_{\theta\theta}^{(i)}$ obtenues à la question 4 :
$\lambda\left(2u_r^{(i)\prime\prime} + \frac{u_r^{(i)\prime}}{r} - \frac{u_r^{(i)}}{r^2}\right) + \frac{\lambda}{r}\left(u_r^{(i)\prime} - \frac{u_r^{(i)}}{r}\right) = 0$
c'est-à-dire $u_r^{(i)\prime\prime} + \frac{u_r^{(i)\prime}}{r} - \frac{u_r^{(i)}}{r^2} = 0$ et l'on a donc $u_r^{(i)}(r) = A^{(i)}r + \frac{B^{(i)}}{r}$
L'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur $\vec{e_\theta}$ est quant à elle trivialement satisfaite, tandis que celle en projection sur $\vec{e_z}$ donne $2\lambda u_z^{(i)\prime\prime} = 0$ c'est-à-dire, puisque $u_z^{(i)}(z=0) = 0$ $u_z^{(i)}(z) = C^{(i)}z$.

6. De $u_r^{(i)}(r) = A^{(i)}r + \frac{B^{(i)}}{r}$, de $u_z^{(i)}(z) = C^{(i)}z$, des expressions de $\sigma_{rr}^{(i)}$, $\sigma_{\theta\theta}^{(i)}$ et $\sigma_{zz}^{(i)}$ trouvées à la question 4 et de $\lambda = \frac{3}{4}E$ on tire, $\forall i \in \{1,2\}$

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_{rr}^{(i)} = \frac{3}{4}E\left(3A^{(i)} - \frac{B^{(i)}}{r^2} + C^{(i)}\right) \\ \sigma_{\theta\theta}^{(i)} = \frac{3}{4}E\left(3A^{(i)} + \frac{B^{(i)}}{r^2} + C^{(i)}\right) \\ \sigma_{zz}^{(i)} = \frac{3}{2}E\left(A^{(i)} + C^{(i)}\right) \end{array}\right. \quad (1)$$

7. De $\sigma_{zz}^{(1)} = \frac{-F}{3\pi R_0^2}$ et de $\sigma_{rr}^{(1)}(r = R_0) = 0$ on tire :

$$\left\{\begin{array}{ll} 3A^{(1)} + C^{(1)} = \frac{B^{(1)}}{R_0^2} & (2') \\ A^{(1)} + C^{(1)} = \frac{-2F}{9\pi E R_0^2} & (3') \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} A^{(1)} = \frac{B^{(1)}}{2R_0^2} + \frac{F}{9\pi R_0^2 E} & (2) \\ C^{(1)} = \frac{-B^{(1)}}{2R_0^2} - \frac{F}{3\pi R_0^2 E} & (3) \end{array}\right.$$

8. De $\sigma_{zz}^{(2)} = 0$ et de $\sigma_{rr}^{(2)}(r = R_2) = 0$ on tire, puisque $R_2 = 4R_0$

$$\left\{\begin{array}{ll} 3A^{(2)} + C^{(2)} = \frac{B^{(2)}}{16R_0^2} & (4') \\ A^{(2)} + C^{(2)} = 0 & \end{array}\right. \Rightarrow \left\{ A^{(2)} = -C^{(2)} = \frac{B^{(2)}}{32R_0^2} \quad (4) \right.$$

9. $u_r^{(1)}(R_1) = u_r^{(2)}(R_1) \Rightarrow A^{(1)}R_1 + \frac{B^{(1)}}{R_1} = A^{(2)}R_1 + \frac{B^{(2)}}{R_1}$ ce qui donne avec $R_1 = 2R_0$, $A^{(1)} + \frac{B^{(1)}}{4R_0^2} = A^{(2)} + \frac{B^{(2)}}{4R_0^2}$ c'est-à-dire, avec (2) et (4) :

$\frac{3B^{(1)}}{4R_0^2} + \frac{F}{9\pi R_0^2 E} = \frac{9B^{(2)}}{32R_0^2}$ ou encore $B^{(1)} - \frac{3}{8}B^{(2)} = \frac{-4F}{27\pi E}$.

Par ailleurs, $\sigma_{rr}^{(1)}(R_1) = \sigma_{rr}^{(2)}(R_1) \Rightarrow 3A^{(1)} - \frac{B^{(1)}}{R_1^2} + C^{(1)} = 3A^{(2)} - \frac{B^{(2)}}{R_1^2} + C^{(2)}$ ce qui donne, avec (2'), (4) et $R_1 = 2R_0$, $\frac{3B^{(1)}}{4R_0^2} = \frac{-3B^{(2)}}{16R_0^2}$ c'est-à-dire $B^{(2)} = -4B^{(1)}$. On a donc finalement

$$\begin{cases} B^{(2)} = -4B^{(1)} \\ B^{(1)} - \frac{3}{8}B^{(2)} = \frac{-4F}{27\pi E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B^{(1)} = \frac{-8F}{135\pi E} \\ B^{(2)} = \frac{32F}{135\pi E} \end{cases} \quad (5)$$

puis, avec (2)(3) et (4) :

$$\left\{ A^{(1)} = \frac{11F}{135\pi E R_0^2}, \quad C^{(1)} = \frac{-41F}{135\pi E R_0^2}, \quad A^{(2)} = -C^{(2)} = \frac{F}{135\pi E R_0^2} \right. \quad (6)$$

10. On a, avec (1) (5) et (6) et compte tenu de (2') (3') et (4')

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^{(1)} = \frac{-2F}{45\pi}\left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{r^2}\right) \\ \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{-2F}{45\pi}\left(\frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{r^2}\right) \\ \sigma_{zz}^{(1)} = \frac{-F}{3\pi R_0^2} \end{cases} (7) \qquad \begin{cases} \sigma_{rr}^{(2)} = \frac{8F}{45\pi}\left(\frac{1}{16R_0^2} - \frac{1}{r^2}\right) \\ \sigma_{\theta\theta}^{(2)} = \frac{8F}{45\pi}\left(\frac{1}{16R_0^2} + \frac{1}{r^2}\right) \\ \sigma_{zz}^{(2)} = 0 \end{cases} (8)$$

11. Pour $F = F_\ell$ on a $H + u_z^{(1)}(z=H) = H - e + u_z^{(2)}(z = H-e)$. c'est-à-dire.
$H + C^{(1)}H = H - e + C^{(2)}(H-e) \Rightarrow \frac{e}{H} = C^{(2)} - C^{(1)} - C^{(2)}\frac{e}{H}$ ce qui donne, avec (6),
$\frac{F_\ell}{135\pi E R_0^2}\left(40 + \frac{e}{H}\right) = \frac{e}{H}$ d'où : $F_\ell = 135\pi E R_0^2 \frac{e/H}{40 + e/H} \simeq \frac{27}{8}\pi E R_0^2 \frac{e}{H}$

12. On a, dans le cylindre $\mathcal{C}^{(1)}$, $\sigma_{zz}^{(1)} < \sigma_{\theta\theta}^{(1)} < \sigma_{rr}^{(1)}$ $\forall r$ et $\underset{r\in[R_0 R_1]}{\mathrm{Max}} |\sigma_{rr}^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1)}| = \frac{F}{3\pi R_0^2}$. Dans le cylindre $\mathcal{C}^{(2)}$, $\sigma_{rr}^{(2)} \leq \sigma_{zz}^{(2)} < \sigma_{\theta\theta}^{(2)}$ et $\underset{r\in[R_1 R_2]}{\mathrm{Max}} |\sigma_{\theta\theta}^{(2)} - \sigma_{rr}^{(2)}| = \frac{4F}{45\pi R_0^2}$?
C'est donc $\mathcal{C}^{(1)}$ qui est susceptible de plastifier le premier et l'on a donc $\frac{F_e}{3\pi R_0^2} = 2\tau_0$ d'où $F_e = 6\pi\tau_0 R_0^2$

13. On a $F_\ell = 135\pi E R_0^2 \frac{e/H}{40 + e/H} < F_{\ell\,simp.} = \frac{27}{8}\pi E R_0^2 \frac{e}{H}$. La simplification va donc dans le sens de la sécurité et l'on a alors :
$\frac{27}{8}\pi E R_0^2 \frac{e}{H} \leq F_e = 6\pi\tau_0 R_0^2 \Rightarrow \frac{e}{H} \leq \frac{16}{9}\frac{\tau_0}{E}$

A.N: $\tau_0 = 150$ MPa et $E = 200000$ MPa $\Rightarrow \frac{e}{H} \leq \frac{16}{9}\frac{3}{4}10^{-3} = \frac{4}{3}10^{-3}$

E.N.T.P.E

Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus ($1^{\text{ère}}$ année)
Devoir numéro 2
Durée 2 heures

Jeudi 5 décembre 2002

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Exercice 1 : Cylindre creux soumis à une densité massique orthoradiale de forces Un cylindre creux d'axe de révolution Oz, de rayon intérieur R_0 et de rayon extérieur R_1 est soumis au champ d'actions mécaniques à distance $\mathbf{b}(\vec{x}) = \Omega\,\vec{e_z} \wedge \vec{x}$ où Ω est une constante strictement positive donnée de dimension T^{-2}. Ce cylindre est constitué d'un matériau de masse volumique ρ ayant un comportement élastique linéaire isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson $\nu = 0$. On suppose alors, compte tenu des symétries du problème, que le champ des déplacements exprimé dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) adopte la forme $\mathbf{u} = u(r)\,\vec{e_\theta}$, où u est une fonction inconnue de la variable d'espace r que l'on se propose de déterminer.

1. Donner, en fonction de u et r, l'expression du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ puis en déduire, en fonction cette fois de u, r et E, celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
2. Déduire, en tirant parti de la seule équation indéfinie de l'équilibre non trivialement satisfaite, que u est solution de l'équation différentielle ordinaire
$$u''(r) + \frac{u'(r)}{r} - \frac{u(r)}{r^2} = -2\frac{\rho\Omega}{E}r \qquad r \in]R_0, R_1[\tag{1}$$
3. Montrer que l'équation différentielle ordinaire (1) admet une solution particulière $u^{(1)}(r)$ de la forme $u^{(1)}(r) = ar^3$ et donner, en fonction de ρ, Ω et E, l'expression de la constante a. Chercher ensuite des solutions $u^{(0)}(r)$ de l'équation homogène associée sous la forme $u^{(0)}(r) = r^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^\star$. En déduire alors, en fonction de ρ, Ω, E, r et de deux constantes d'intégration A et B, l'expression générale de $u(r)$. $\Rightarrow \sigma_{r\theta}(R_0) = 0$
4. On suppose que la paroi intérieure du cylindre ($r = R_0$) n'est soumise à aucune action mécanique de contact et que sa paroi extérieure ($r = R_1$) reste fixe. $\Rightarrow u(r=R_1)=0$ Ecrire alors les conditions aux limites en $r = R_0$ et $r = R_1$ puis donner, en fonction de ρ, Ω, E, R_0 et R_1, l'expression des deux constantes d'intégration A et B.
5. De la question 4 déduire, en fonction de ρ, Ω, E, R_0 R_1 et r, l'expression des composantes non nulles de $\mathbf{u}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ puis, en fonction cette fois de ρ, Ω, R_0 et r, celle des composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}$. Que vaut la rotation subie par la paroi intérieure du cylindre ?
6. Le matériau obéissant au critère de limite élastique de Tresca, déduire, en fonction de ρ, R_0, R_1 et de la limite élastique en traction simple σ_0, la valeur maximale de Ω.

Exercice 2 : Translation-rotation d'une conduite cylindrique Une conduite cylindrique de rayon intérieur R_0 est animée d'un mouvement de rotation uniforme à vitesse angulaire ω autour de son axe de révolution Oz, combiné à un mouvement de translation à vitesse uniforme a dans la direction Oz. Le domaine de l'espace physique intérieur à la conduite est en totalité occupé par un fluide visqueux newtonien incompressible de viscosité dynamique de cisaillement η et de masse volumique ρ indépendantes des variables d'espace. Le mouvement du fluide induit par celui de la conduite ayant atteint un régime permanent, on suppose alors, compte tenu des symétries du problème, que le champ eulérien des vitesses exprimé dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) adopte la forme $\mathbf{v} = v_\theta(r)\,\vec{e_\theta} + v_z(r)\,\vec{e_z}$, où v_θ et v_z sont deux fonctions inconnues de la variable d'espace r que l'on se propose de déterminer. On suppose par ailleurs qu'en raison de ces mêmes symétries la pression p est indépendante de θ.

1. Vérifier rapidement l'incompressibilité du fluide puis donner, en fonction de v_θ et r, l'expression eulérienne du champ des accélérations $\boldsymbol{\gamma}$.
2. Donner, en fonction de v_θ, v_z et r, l'expression du tenseur $\mathbf{D}$ des taux de déformation puis en déduire, en fonction cette fois de v_θ, v_z, r, η et p, celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
3. Les actions mécaniques à distance étant ici négligées, de la question 2 déduire, en tirant parti de la projection sur $\vec{e_\theta}$ des équations indéfinies du mouvement, que v_θ est solution de l'équation différentielle ordinaire
$$v_\theta''(r) + \frac{v_\theta'(r)}{r} - \frac{v_\theta(r)}{r^2} = 0 \qquad r \in]0, R_0[\tag{2}$$
4. Donner la solution générale de l'équation différentielle ordinaire (2) puis déterminer les constantes d'intégration en tirant notamment parti des conditions aux limites cinématiques en $r = R_0$. En déduire alors, en fonction de ω et r, l'expression finale de v_θ.
5. De la projection des équations indéfinies du mouvement sur $\vec{e_r}$ et de l'expression de v_θ trouvée à la question 4 déduire celle de la pression p lorsqu'on la suppose nulle en tout point de l'axe Oz.
6. De la projection sur $\vec{e_z}$ des équations indéfinies du mouvement et de l'exppression de p trouvée à la question 5 déduire, en tirant notamment parti des conditions aux limites cinématiques en $r = R_0$, celle de v_z.

Exercice 3 : Traction uniaxiale d'un ruban déformable Un ruban constitué d'un matériau capable de subir de grandes déformations est soumis à un essai de traction uniaxiale ainsi que l'illustre la figure 1 où le contour en trait discontinu est celui du ruban dans sa configuration initiale tandis que le domaine grisé représente sa configuration déformée à l'instant t.

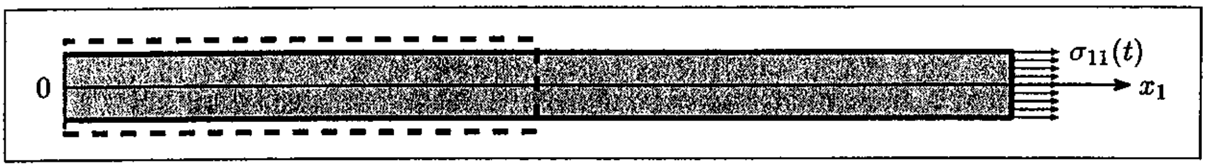


FIG. 1 – Traction uniaxiale d'un ruban déformable

La transformation de ce ruban est supposée adopter la forme
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & (1+\alpha t)X_1 \\ x_2 & = & (1+g(t))X_2 \\ x_3 & = & (1+g(t))X_3 \end{array} \right. \qquad t \geq 0 \tag{3}$$
où $\alpha > 0$ est une constante donnée de dimension T^{-1} et g une fonction de la variable temps t que l'on se propose de déterminer. Enfin, Le comportement hypoélastique linéaire et isotrope du matériau est régi par la relation $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda \,\mathrm{tr}\mathbf{D}\, \boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbf{D}$ où $\mathbf{D}$ et $\mathbf{W}$ sont respectivement les tenseurs des taux de déformation et de rotation, où $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ désigne la dérivée objective de Jaumann du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, définie par $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{W} - \mathbf{W}.\boldsymbol{\sigma}$, et où λ et μ sont deux constantes mécaniques définies par $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ et $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, avec $E > 0$ et $\nu \in [0, \frac{1}{2}[$ donnés.

1. Déterminer l'expression eulérienne du champ des vitesses $\mathbf{v}$ puis en déduire, en fonction de α, t et de la fonction inconnue g, celles des tenseurs $\mathbf{D}$ et $\mathbf{W}$.
2. Donner, en tirant parti de la loi de comportement du matériau ainsi que des résultats obtenus à la question 1, le système de trois équations différentielles ordinaires satisfaites par σ_{11}, σ_{22} et σ_{33}. On exprimera ces équations en fonction de λ, μ, α, t et de la fonction inconnue g.
3. Résoudre le système précédent en supposant les contraintes nulles à l'instant initial $t = 0$. Là encore, on donnera les expressions de σ_{11}, σ_{22} et σ_{33} en fonction de λ, μ, α, t et de la fonction inconnue g.
4. Des conditions aux limites en contrainte sur les parois latérales du ruban déduire, en fonction de α, t et ν, l'expression de g.
5. Donner, en fonction de α, t et E, l'expression finale de σ_{11}.

Exercice 1

1. Les seules composantes non nulles de ε et σ sont $\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}(u'(r) - \frac{u(r)}{r})$ et $\sigma_{r\theta} = 2\mu\,\varepsilon_{r\theta}$ c'est-à-dire, puisque $2\mu = \frac{E}{1+\nu} = E$, $\sigma_{r\theta} = \frac{E}{2}(u'(r) - \frac{u(r)}{r})$.

2. Seule l'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur $\vec{e}_\theta$ est non satisfaite et se réduit ici à $\partial_r \sigma_{r\theta} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} + \rho b_\theta = 0$. De $b_\theta = \Omega r$ et de l'expression de $\sigma_{r\theta}$ trouvée à la question 1 on tire alors :

$$u''(r) + \frac{u'(r)}{r} - \frac{u(r)}{r^2} = -2\frac{\rho\Omega}{E} r \qquad (1)$$

3. $u^{(1)}(r) = ar^3 \Rightarrow u^{(1)\prime}(r) = 3ar^2$ et $u^{(1)\prime\prime}(r) = 6ar$ ce qui donne, avec (1), $8ar = -2\frac{\rho\Omega}{E}r$, et l'on a donc $a = -\frac{\rho\Omega}{4E}$.

$u^{(0)}(r) = r^\alpha \Rightarrow u^{(0)\prime}(r) = \alpha r^{\alpha-1}$ et $u^{(0)\prime\prime}(r) = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}$. Les solutions de l'équation homogène associée à (1) satisfaisant $u''(r) + \frac{u'(r)}{r} - \frac{u(r)}{r^2} = 0$, on a nécessairement $\alpha(\alpha-1) + \alpha - 1 = 0$ c'est-à-dire $\alpha = \pm 1$. La solution générale de (1) est donc

$$u(r) = Ar + \frac{B}{r} - \frac{\rho\Omega}{4E}r^3$$

4. En $r = R_0$ on a $\sigma_{r\theta} = 0$ et donc $u'(R_0) - \frac{u(R_0)}{R_0} = 0$ ce qui donne $B = -\frac{\rho\Omega}{4E}R_0^4$

En $r = R_1$, $u(R_1) = 0$ ce qui donne $A = -\frac{B}{R_1^2} + \frac{\rho\Omega}{4E}R_1^2$ et donc $A = \frac{\rho\Omega}{4E}\,\frac{R_0^4 + R_1^4}{R_1^2}$

5. $u(r) = \frac{\rho\Omega}{4E}\left(\frac{R_0^4 + R_1^4}{R_1^2}r - \frac{R_0^4}{r} - r^3\right)$

$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}(u'(r) - \frac{u(r)}{r}) = \frac{\rho\Omega}{4E}\left(\frac{R_0^4}{r^2} - r^2\right)$ et $\sigma_{r\theta} = E\,\varepsilon_{r\theta} = \frac{\rho\Omega}{4}\left(\frac{R_0^4}{r^2} - r^2\right)$

La rotation subie par la paroi intérieure du cylindre est $\omega = \frac{u(R_0)}{R_0} = \frac{\rho\Omega}{4E}\left(\frac{R_1^2 - R_0^2}{R_1}\right)^2$.

6. Le critère de Tresca se réduit ici à $|\sigma_{r\theta}| \leq \tau_0 = \frac{\sigma_0}{2}$, $\forall r$. La valeur maximale Ω_ℓ de Ω est alors donnée par $\frac{\rho\Omega_\ell}{4}\frac{R_1^4 - R_0^4}{R_1^2} = \frac{\sigma_0}{2}$ d'où $\Omega_\ell = \frac{2\sigma_0}{\rho}\frac{R_1^2}{R_1^4 - R_0^4}$.

Exercice 2

1. $\operatorname{div}\vec{v} = \partial_r v_r + \frac{1}{r}\partial_\theta v_\theta + \partial_z v_z + \frac{1}{r}v_r = 0$ puisque $v_r = 0$ et que v_θ et v_z ne dépendent que de r.

Par ailleurs, $\vec{\gamma} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\frac{\vec{v}^2}{2} + (\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v}) \wedge \vec{v}$.

$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$, $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\frac{\vec{v}^2}{2} = (v_\theta v_\theta' + v_z v_z')\vec{e_r}$, $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v_z' \\ v_\theta' + \frac{v_\theta}{r} \end{pmatrix}$, $(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v}) \wedge \vec{v} = -(v_z v_z' + v_\theta v_\theta' + \frac{v_\theta^2}{r})\vec{e_r}$

On a donc $\vec{\gamma} = -\frac{v_\theta^2}{r}\vec{e_r}$

2. On a

$$D = \begin{bmatrix} 0 & D_{r\theta} & D_{rz} \\ D_{r\theta} & 0 & 0 \\ D_{rz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ d'où } \sigma = \begin{bmatrix} -p & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} & -p & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & -p \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} D_{r\theta} = \frac{1}{2}(v_\theta' - \frac{v_\theta}{r}), & \sigma_{r\theta} = 2\eta D_{r\theta} = \eta(v_\theta' - \frac{v_\theta}{r}) \\ D_{rz} = \frac{1}{2}v_z', & \sigma_{rz} = 2\eta D_{rz} = \eta v_z' \end{cases}$$

3. L'équation indéfinie du mouvement en projection sur $\vec{e_\theta}$ se réduit ici à $\partial_r \sigma_{r\theta} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} = 0$ ce qui donne, puisque $\sigma_{r\theta} = \eta(v_\theta' - \frac{v_\theta}{r})$.

$$v_\theta''(r) + \frac{v_\theta'(r)}{r} - \frac{v_\theta(r)}{r^2} = 0 \qquad (2)$$

4. La solution générale de (2) est $v_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r}$. La vitesse ne pouvant être infinie en $r=0$, on a $B=0$. On a par ailleurs, en $r=R_0$, $v_\theta = R_0\omega$ ce qui donne $A=\omega$. On a donc finalement $v_\theta(r) = \omega r$

5. L'équation indéfinie du mouvement en projection sur $\vec{e}_r$ se réduit ici à $-\partial_r p = \rho\gamma_r = -\rho\frac{v_\theta^2}{r}$ ce qui donne, puisque $v_\theta(r)=\omega r$ et $p(r=0,z)=0$, $p=\frac{\rho\omega^2}{2}r^2$

6. L'équation indéfinie du mouvement en projection sur $\vec{e}_z$ se réduit ici, puisque p ne dépend pas de z, à $\partial_r\sigma_{rz}+\frac{1}{r}\sigma_{rz}=0$ ce qui donne, avec $\sigma_{rz}=\eta v_z'$, $v_z''(r)+\frac{1}{r}v_z'(r)=0$, et l'on a donc $v_z(r)=A\ln r+B$. La vitesse ne pouvant être infinie en $r=0$, on a $A=0$. Par ailleurs on a, en $r=R_0$, $v_z=a$, ce qui donne finalement $v_z(r)=a$, $\forall r$.

Exercice 3

1. On a $\vec{U}=\begin{pmatrix}\alpha X_1\\ g'(t)X_2\\ g'(t)X_3\end{pmatrix}$ en variables de Lagrange. On obtient ensuite l'expression eulérienne de $\vec{U}$ en tirant parti de l'expression de la transformation, ce qui donne

$$\begin{cases} U_1=\frac{\alpha}{1+\alpha t}x_1\\ U_2=\frac{g'(t)}{1+g(t)}x_2\\ U_3=\frac{g'(t)}{1+g(t)}x_3\end{cases} \quad \text{d'où} \quad D=\begin{bmatrix}\frac{\alpha}{1+\alpha t} & 0 & 0\\ 0 & \frac{g'(t)}{1+g(t)} & 0\\ 0 & 0 & \frac{g'(t)}{1+g(t)}\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad W=0$$

2. On obtient aisément

$$\begin{cases}\dot{\sigma}_{11}=(\lambda+2\mu)\frac{\alpha}{1+\alpha t}+2\lambda\frac{g'(t)}{1+g(t)}\\ \dot{\sigma}_{22}=\dot{\sigma}_{33}=2(\lambda+\mu)\frac{g'(t)}{1+g(t)}+\lambda\frac{\alpha}{1+\alpha t}\end{cases}$$

3. $$\begin{cases}\sigma_{11}(t)=\operatorname{Ln}\left[(1+\alpha t)^{\lambda+2\mu}(1+g(t))^{2\lambda}\right]\\ \sigma_{22}(t)=\sigma_{33}(t)=\operatorname{Ln}\left[(1+\alpha t)^{\lambda}(1+g(t))^{2(\lambda+\mu)}\right]\end{cases}$$

4. De $\sigma_{22}=\sigma_{33}=0$ on tire $1+g(t)=(1+\alpha t)^{\frac{-\lambda}{2(\lambda+\mu)}}$ ce qui donne, avec $\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ et $\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}$, $1+g(t)=(1+\alpha t)^{-\nu}$, et l'on a donc $g(t)=\frac{1}{(1+\alpha t)^{\nu}}-1$

5. $\sigma_{11}(t)=\operatorname{Ln}\left[(1+\alpha t)^{\lambda+2\mu}(1+g(t))^{2\lambda}\right]=\operatorname{Ln}\left[(1+\alpha t)^{\lambda+2\mu-2\lambda\nu}\right]=\operatorname{Ln}(1+\alpha t)^{E}$ et donc $\sigma_{11}(t)=E\operatorname{Ln}(1+\alpha t)$

E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus ($1^{\text{ère}}$ année)
Devoir numéro 2
Durée 2 heures

Jeudi 13 Décembre 2001

Problème 1 : Sphère creuse soumise à une source attractive Une sphère creuse de rayon intérieur R_0 et de rayon extérieur R_1 est soumise au champ d'actions mécaniques extérieures à distance $\mathrm{b}(\vec{x}) = -k\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$, où $\vec{x}$ désigne la position d'une particule quelconque mais fixée et où k est une constante strictement positive donnée de dimension $\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2}$. Cette sphère est constituée d'un matériau de masse volumique ρ ayant un comportement élastique linéaire isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson $\nu = \frac{1}{3}$. On suppose alors, compte tenu des symétries du problème, que le champ des déplacements exprimé dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ associé au système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) adopte la forme $\mathbf{u} = u(r)\,\vec{e_r}$, où u est une fonction inconnue de la variable d'espace r que l'on se propose de déterminer.

1. Montrer que les modules de Lamé λ et μ satisfont la relation $\lambda = 2\mu$ et donner l'expression de λ en fonction de E.
2. Donner, en fonction de u et r, l'expression du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ puis en déduire, en fonction cette fois de u, r et λ, celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
3. On pose, dans tout ce qui suit, $C = \frac{\rho k}{4\lambda}$. Montrer que la constante C ainsi définie est homogène à une longueur puis vérifier, en tirant parti de la question 1, que l'on a aussi $C = \frac{\rho k}{3E}$.
4. Des questions 1, 2 et 3 déduire, en tirant parti de la seule équation indéfinie de l'équilibre non trivialement satisfaite, que u est solution de l'équation différentielle ordinaire
$$u''(r) + 2\frac{u'(r)}{r} - 2\frac{u(r)}{r^2} = 2\frac{C}{r^2} \qquad r \in]R_0, R_1[\tag{1}$$
5. Montrer que l'équation différentielle ordinaire (1) admet une solution particulière $u^{(1)}(r)$ de la forme $u^{(1)}(r) = a$ et donner, en fonction de C, l'expression de la constante a. Chercher ensuite des solutions $u^{(0)}(r)$ de l'équation homogène associée sous la forme $u^{(0)}(r) = r^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. En déduire alors, en fonction de C, r et de deux constantes d'intégration A et B, l'expression générale de $u(r)$.
6. La sphère n'étant soumise à aucune action mécanique de contact, écrire les conditions aux limites en contrainte en $r = R_0$ et $r = R_1$ puis donner, en fonction de C, R_0 et R_1 et sous la forme la plus simple possible, l'expression des deux constantes d'intégration A et B.
7. De la question 6 déduire, en fonction de C, R_0 R_1 et r, l'expression des composantes non nulles de $\mathbf{u}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ puis, en fonction cette fois de ρ, k, R_0 R_1 et r, celle des composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}$.
8. Le matériau obéissant au critère de limite élastique de Tresca, déduire, en fonction de ρ, k, R_0, R_1 et de la limite élastique en traction simple σ_0, la condition de non plastification de la sphère.
9. Le ratio $\alpha = \frac{R_1}{R_0}$ étant imposé par le constructeur, quelle est, en fonction de ρ, k, σ_0 et α, la valeur minimale que l'on doit donner à R_0 pour qu'il n'y ait aucune déformation plastique ? Quelle valeur faut-il retenir si α est inconnu ?
Application numérique : $\rho = 7\,10^4\,\mathrm{Nm^{-3}}$, $k = 100\,\mathrm{m^3s^{-2}}$, $\sigma_0 = 350\,\mathrm{Mpa}$ et $\alpha = 2$.

10. Les actions mécaniques à distance **b** étant maintenues, la sphère creuse est à présent soumise à des pressions intérieure p_0 et extérieure p_1 que l'on souhaite ajuster de façon à obtenir un champ de déplacement **u** indépendant de r. Quelles sont alors, en fonction de ρ, k, R_0 et R_1, les expressions de p_0 et p_1 ? Quelle valeur minimale doit-on à présent donner à R_0 si l'on veut qu'il n'y ait aucune déformation plastique ?
    Application numérique : $\rho = 7\,10^4\,\mathrm{Nm}^{-3}$, $k = 100\,\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-2}$ et $\sigma_0 = 350\,\mathrm{Mpa}$.

11. Les actions mécaniques à distance **b** étant toujours maintenues et les pressions intérieure p_0 et extérieure p_1 ayant les valeurs déterminées à la question 10, la sphère creuse est à présent soumise à une élévation de température ΔT. Quelle est alors, en fonction de C, r, ΔT et du coefficient de dilatation thermique linéaire β, l'expression du champ des déplacements ? Quelle valeur faut-il donner à ΔT si l'on veut annuler ce déplacement en $r = R_0$?
    Application numérique : $\rho = 7\,10^4\,\mathrm{Nm}^{-3}$, $k = 100\,\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-2}$, $E = 200000\,\mathrm{MPa}$, $\beta = 10^{-5}\,{}^\circ\mathrm{C}^{-1}$ et $R_0 = 2\,\mathrm{cm}$.

Problème 2 : Ecoulement concentrique d'un fluide visqueux newtonien Un solide cylindrique de rayon R_0 (rotor) est animé d'un mouvement de rotation uniforme à vitesse angulaire ω autour de son axe de révolution Oz. Le domaine extérieur au cylindre et compris entre les plans $z = 0$ et $z = H$ est en totalité occupé par un fluide visqueux newtonien incompressible de viscosité dynamique de cisaillement η et de masse volumique ρ indépendantes des variables d'espace. Le mouvement du fluide induit par celui du rotor ayant atteint un régime permanent, on suppose alors, compte tenu des symétries du problème, que le champ eulérien des vitesses exprimé dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) adopte la forme $\mathbf{v} = v(r)\,\vec{e_\theta}$, où v est une fonction inconnue de la variable d'espace r que l'on se propose de déterminer. On suppose par ailleurs qu'en raison de ces mêmes symétries la pression p est indépendante de θ.

1. Vérifier rapidement l'incompressibilité du fluide puis donner, en fonction de v et r, l'expression eulérienne du champ des accélérations $\boldsymbol{\gamma}$.

2. Donner, en fonction de v et r, l'expression du tenseur **D** des taux de déformation puis en déduire, en fonction cette fois de v, r, η et p, celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.

3. Les actions mécaniques à distance étant ici négligées, de la question 2 déduire, en tirant parti de la projection sur $\vec{e_\theta}$ des équations indéfinies du mouvement, que v est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$v''(r) + \frac{v'(r)}{r} - \frac{v(r)}{r^2} = 0 \qquad r > R_0 \tag{2}$$

4. Donner la solution générale l'équation différentielle ordinaire (2) puis déterminer les constantes d'intégration A et B en tirant parti des conditions aux limites cinématiques en $r = r_0$ et $r = +\infty$. En déduire alors, en fonction de ω, r_0 et r, l'expression finale de v. $r_0 = R_0$

5. Des projections des équations indéfinies du mouvement sur $\vec{e_r}$ et $\vec{e_z}$ et de l'expression de v trouvée à la question 4 déduire celle de la pression p lorsqu'on la suppose nulle en $r = r_0$.

6. Donner l'expression des composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}$ puis en déduire, en fonction de η, ω, r_0 et H, celle du couple C nécessaire à entretenir le mouvement du fluide.

Problème 1

1. $$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{E \cdot 1/3}{4/3 \cdot 1/3} = \frac{3}{4}E \\ 2\mu &= \frac{E}{1+\nu} = \frac{E}{4/3} = \frac{3}{4}E \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = 2\mu = \frac{3}{4}E$$

2. De $\mathbf{u} = u(r)\vec{e}_r$ on tire $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}$ avec $\begin{cases} \varepsilon_{rr} = u'(r) \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \dfrac{u(r)}{r} \end{cases}$

De $\sigma = \lambda \operatorname{tr}\varepsilon\, \delta + 2\mu\varepsilon$ on déduit ensuite $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}$ avec, puisque $2\mu = \lambda$,

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = 2\lambda\left(u'(r) + \dfrac{u(r)}{r}\right) \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\left(u'(r) + 3\dfrac{u(r)}{r}\right) \end{cases}$$

3. $$C = \frac{\overbrace{\rho}^{\dim ML^{-3}}\, \underbrace{k}_{\dim L^3T^{-2}}}{4\underbrace{\lambda}_{\dim ML^{-1}T^{-2}}} \Rightarrow \dim C = L \;; \quad C = \frac{\rho k}{4\lambda} = \frac{\rho k}{4\frac{3}{4}E} \Rightarrow C = \frac{\rho k}{3E}$$

4. De $\vec{x} = r\vec{e}_r$ on tire $b(\vec{x}) = -\dfrac{k}{r^2}\vec{e}_r$. L'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur $\vec{e}_r$ s'écrit alors ici :

$$\sigma_{rr,r} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} - \frac{\rho k}{r^2} = 0$$

ce qui donne :

$$2\lambda\left(u''(r) + \frac{u'(r)}{r} - \frac{u(r)}{r^2}\right) + \frac{2\lambda}{r}\left(2u'(r) + 2\frac{u(r)}{r} - u'(r) - 3\frac{u(r)}{r}\right) - \frac{\rho k}{r^2} = 0$$

c'est-à-dire, avec $C = \dfrac{\rho k}{4\lambda}$

$$u''(r) + 2\frac{u'(r)}{r} - 2\frac{u(r)}{r^2} = 2\frac{C}{r^2} \qquad R_0 < r < R_1 \qquad (1)$$

5. Il est évident que $u^{(1)}(r) = -C$ est une solution particulière de (1). Cherchons des solutions de l'équation homogène associée de la forme $u^{(0)}(r) = r^\alpha$. On a alors $u^{(0)\prime}(r) = \alpha r^{\alpha-1}$ et $u^{(0)\prime\prime}(r) = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}$ ce qui donne $(\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - 2)r^{\alpha-2} = 0$ c'est-à-dire $\alpha^2 + \alpha - 2 = (\alpha-1)(\alpha+2) = 0$ d'où $\alpha = 1$ ou $\alpha = -2$. La solution générale de (1) est donc

$$u(r) = Ar + \frac{B}{r^2} - C$$

6. On a $\sigma_{rr}(r = R_0) = \sigma_{rr}(r = R_1) = 0$. De $\sigma_{rr} = 2\lambda\left(u'(r) + \dfrac{u(r)}{r}\right) = 2\lambda\left(2A - \dfrac{B}{r^3} - \dfrac{C}{r}\right)$ on tire alors

$$\begin{cases} 2A - \dfrac{B}{R_0^3} = \dfrac{C}{R_0} \\ 2A - \dfrac{B}{R_1^3} = \dfrac{C}{R_1} \end{cases} \quad \text{ce qui donne} \quad \begin{cases} A = \dfrac{C}{2}\dfrac{R_0 + R_1}{R_0^2 + R_1^2 + R_0R_1} \\ B = -C\dfrac{R_0^2R_1^2}{R_0^2 + R_1^2 + R_0R_1} \end{cases}$$

7. $$u(r) = -C\left[1 - \frac{1}{2}\frac{R_0 + R_1}{R_0^2 + R_1^2 + R_0R_1}\, r + \frac{R_0^2R_1^2}{R_0^2 + R_1^2 + R_0R_1}\frac{1}{r^2}\right]$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = C\left[\dfrac{1}{2}\dfrac{R_0 + R_1}{R_0^2 + R_1^2 + R_0R_1} + 2\dfrac{R_0^2R_1^2}{R_0^2 + R_1^2 + R_0R_1}\dfrac{1}{r^3}\right] = u'(r) \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = C\left[-\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{2}\dfrac{R_0 + R_1}{R_0^2 + R_1^2 + R_0R_1} - \dfrac{R_0^2R_1^2}{R_0^2 + R_1^2 + R_0R_1}\dfrac{1}{r^3}\right] = \dfrac{u(r)}{r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \dfrac{\rho k}{2}\left[-\dfrac{1}{r} + \dfrac{R_0 + R_1}{R_0^2 + R_1^2 + R_0R_1} + \dfrac{R_0^2R_1^2}{R_0^2 + R_1^2 + R_0R_1}\dfrac{1}{r^3}\right] \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \dfrac{\rho k}{4}\left[-\dfrac{3}{r} + 2\dfrac{R_0 + R_1}{R_0^2 + R_1^2 + R_0R_1} - \dfrac{R_0^2R_1^2}{R_0^2 + R_1^2 + R_0R_1}\dfrac{1}{r^3}\right] \end{cases}$$

8. Le critère de Tresca s'écrit ici $|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}| \leq \sigma_0 \;\forall r$ c'est-à-dire $\dfrac{\rho k}{4}\left[\dfrac{1}{r} + \dfrac{3R_0^2R_1^2}{R_0^2 + R_1^2 + R_0R_1}\dfrac{1}{r^3}\right] \leq \sigma_0 \;\forall r$ et l'on a donc

$$\frac{\rho k}{4R_0}\,\frac{R_0^2 + 4R_1^2 + R_0R_1}{R_0^2 + R_1^2 + R_0R_1} \leq \sigma_0$$

9. De $\frac{ek}{4R_0}\frac{R_0^2+4R_1^2+R_0R_1}{R_0^2+R_1^2+R_0R_1} \leq \sigma_0$ et de $R_1 = \alpha R_0$ on tire $R_0 \geq \frac{ek}{4\sigma_0}\frac{1+4\alpha^2+\alpha}{1+\alpha^2+\alpha}$

A.N. $R_0 \geq \frac{7\,10^4 \times 10^2}{4 \times 3{,}5\,10^8} \cdot \frac{19}{7} = \frac{19}{14}10^{-2} \Rightarrow R_0 \geq \frac{19}{14}\text{ cm}$

Si α est inconnu on retiendra $R_0 \geq \frac{ek}{4\sigma_0}\sup_{\alpha\geq 1}\frac{1+4\alpha^2+\alpha}{1+\alpha^2+\alpha} = \frac{ek}{\sigma_0} \Rightarrow R_0 \geq \frac{ek}{\sigma_0}$

A.N. $R_0 \geq \frac{7\,10^4 \cdot 10^2}{3.5\,10^8} \Rightarrow R_0 \geq 2\text{cm}$

10. On a cette fois $\sigma_{rr}(r=R_0) = -p_0$ et $\sigma_{rr}(r=R_1) = -p_1$ ce qui donne, avec $\sigma_{rr} = 2\lambda\left(2A - \frac{B}{r^3} - \frac{C}{r}\right)$:

$$\begin{cases} 2A - \frac{B}{R_0^3} = \frac{C}{R_0} - \frac{p_0}{2\lambda} \\ 2A - \frac{B}{R_1^3} = \frac{C}{R_1} - \frac{p_1}{2\lambda} \end{cases}$$

On a alors $A = B = 0$ si et seulement si $p_0 = \frac{2\lambda C}{R_0}$ et $p_1 = \frac{2\lambda C}{R_1}$ c'est-à-dire :

$p_0 = \frac{ek}{2R_0}$ et $p_1 = \frac{ek}{2R_1}$

On a ensuite $u(r) = -C$, $u'(r) = 0$ et $\frac{u(r)}{r} = \frac{-C}{r}$ ce qui donne :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -\frac{ek}{2r} \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{3ek}{4r} \end{cases}$$

Le critère de Tresca $|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}| \leq \sigma_0 \ \forall r$ donne alors $\frac{ek}{4r} \leq \sigma_0 \ \forall r$ c'est-à-dire $\frac{ek}{4R_0} \leq \sigma_0$ et l'on a donc :

$R_0 \geq \frac{ek}{4\sigma_0}$

A.N. $R_0 \geq \frac{7\,10^4 \cdot 10^2}{4 \times 3.5\,10^8} = \frac{1}{2}10^{-2} \geq R_0 \geq \frac{1}{2}\text{cm}$

11. On a à présent, puisque $\lambda = 2\mu$, $\sigma = (\lambda\,\mathrm{tr}\,\varepsilon - 4\lambda\beta\Delta T)\delta + \lambda\varepsilon$ ce qui donne :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = 2\lambda\left(u'(r) + \frac{u(r)}{r}\right) - 4\lambda\beta\Delta T \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\left(u' + \frac{3u(r)}{r}\right) - 4\lambda\beta\Delta T \end{cases}$$

L'équation (1) restant inchangée, on a toujours $u(r) = Ar + \frac{B}{r^3} - C$ et donc $\sigma_{rr} = 2\lambda\left(2A - \frac{B}{r^3} - \frac{C}{r}\right) - 4\lambda\beta\Delta T$

On a par ailleurs $\sigma_{rr}(r=R_0) = -p_0$ et $\sigma_{rr}(r=R_1) = -p_1$ avec $p_0 = \frac{2\lambda C}{R_0}$ et $p_1 = \frac{2\lambda C}{R_1}$ ce qui donne :

$$\begin{cases} 2A - \frac{B}{R_0^3} = 2\beta\Delta T \\ 2A - \frac{B}{R_1^3} = 2\beta\Delta T \end{cases}$$

On a alors $B = 0$ et $A = \beta\Delta T$ c'est-à-dire $u(r) = \beta\Delta T r - C$.

La nullité du déplacement en $r = R_0$ impose alors $\Delta T = \frac{C}{\beta R_0}$ c'est-à-dire :

$\Delta T = \frac{ek}{3E\beta R_0}$

A.N. $\Delta T = \frac{7\,10^4 \cdot 10^2}{3 \times 2\,10^{11} \cdot 10^{-5} \cdot 2\,10^{-2}} = \frac{7}{12}10^2 \Rightarrow \Delta T = \frac{700}{12}\ ^\circ\text{C}$

Problème 2

1. $v = \underbrace{v(r)}_{v_\theta} \vec{e_\theta} \Rightarrow \operatorname{div} v = \partial_r v_r + \frac{1}{r}\partial_\theta v_\theta + \partial_3 v_3 + \frac{1}{r} v_r = 0$

   $\partial_t v = 0$; $\operatorname{grad} \frac{v^2}{2} = v(r)\, v'(r)\, \vec{e_r}$; $\operatorname{rot}_x v = \left(v'(r) + \frac{1}{r} v(r)\right)\vec{e_3}$; $(\operatorname{rot}_x v)\wedge v = -v(r)\left[v'(r) + \frac{v(r)}{r}\right]\vec{e_r}$

   On a donc $\gamma = -\frac{v^2(r)}{r}\vec{e_r}$

2. $D = \begin{bmatrix} 0 & D_{r\theta} & 0 \\ D_{r\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ avec $D_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(v'(r) - \frac{v(r)}{r}\right)$

   de $\sigma = -p\delta + 2\eta D$ on tire $\sigma = \begin{bmatrix} -p & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{r\theta} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$ avec $\sigma_{r\theta} = \eta\left(v'(r) - \frac{v(r)}{r}\right)$

3. L'équation indéfinie du mouvement en projection sur $\vec{e_\theta}$ se réduit ici à :

   $\partial_r \sigma_{r\theta} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} = 0$

   ce qui donne bien :

   $v''(r) + \frac{v'(r)}{r} - \frac{v(r)}{r^2} = 0 \qquad r > R_0 \qquad (2)$

4. En cherchant des solutions de (2) de la forme $v^{(0)}(r) = r^\alpha$ on obtient $\alpha(\alpha-1) + \alpha - 1$:

   c'est-à-dire $\alpha = \pm 1$. L'équation (2) a donc pour solution générale :

   $v(r) = Ar + \frac{B}{r}$

   de $v(+\infty) < +\infty$ on tire alors $A = 0$. Enfin, de $v(r = R_0) = \omega R_0$ on déduit $B = \omega R_0^2$

   ce qui donne finalement :

   $v(r) = \omega \frac{R_0^2}{r}$

5. On a :

   $\begin{cases} -\partial_r p = -\rho \frac{v^2(r)}{r} \\ -\partial_3 p = 0 \end{cases}$

   c'est-à-dire $\frac{dp}{dr} = \rho\frac{v^2(r)}{r} = \rho\omega^2\frac{R_0^4}{r^3}$ ce qui donne, avec $p(r = R_0) = 0$,

   $p(r) = \frac{\rho\omega^2 R_0^2}{2}\left(1 - \frac{R_0^2}{r^2}\right)$

6. De $\sigma_{r\theta} = \eta\left(v'(r) - \frac{v(r)}{r}\right)$ on tire $\sigma_{r\theta} = -2\eta\omega\frac{R_0^2}{r^2}$ puis

   $C + 2\pi H\, \sigma_{r\theta}(r) \times r^2 = 0$

   c'est-à-dire

   $C = 4\pi\eta\omega R_0^2 H$

E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1$^{\text{ère}}$ année)
Devoir numéro 2
Durée 2 heures

Vendredi 1$^{\text{er}}$ Décembre 2000

Problème 1 : Cylindre creux en rotation uniforme Un cylindre creux de rayon intérieur R_0 et de rayon extérieur R_1 est animé d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω autour de son axe de révolution Oz. Ce cylindre est constitué d'un matériau de masse volumique ρ ayant un comportement élastique linéaire isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson $\nu = 0$. Les actions gravifiques étant négligées on suppose alors, compte tenu des symétries du problème et de l'absence d'effet Poisson, que dans le référentiel lié au solide en rotation uniforme le champ des déplacements exprimé relativement au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) adopte la forme $\mathbf{u} = u(r)\,\vec{e_r}$ où u est une fonction inconnue de la variable d'espace r que l'on se propose de déterminer.

1. Donner, en fonction de u et r, l'expression du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ puis en déduire, en fonction cette fois de u, r et E, celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.

2. Le champ des actions mécaniques à distance se réduisant ici aux forces d'inertie, exprimer ces dernières en fonction de ω et r.

3. Des questions 1 et 2 déduire, en tirant parti de la seule équation indéfinie de l'équilibre non trivialement satisfaite, que u est solution de l'équation différentielle ordinaire
$$u''(r) + \frac{u'(r)}{r} - \frac{u(r)}{r^2} = -\frac{\rho\omega^2}{E} r \quad r \in]R_0, R_1[\tag{1}$$

4. Montrer que l'équation différentielle ordinaire (1) admet une solution particulière $u^{(1)}(r)$ de la forme $u^{(1)}(r) = ar^3$ et donner, en fonction de ρ, ω et E, l'expression de la constante a. Chercher ensuite des solutions $u^{(0)}(r)$ de l'équation homogène associée sous la forme $u^{(0)}(r) = r^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^\star$. En déduire alors, en fonction de ρ, ω, E, r et de deux constantes d'intégration A et B, l'expression générale de $u(r)$.

5. Ecrire les conditions aux limites en contrainte en $r = R_0$ et $r = R_1$ puis donner, en fonction de ρ, ω, E, R_0 et R_1, l'expression des deux constantes d'intégration A et B. En déduire enfin celle des composantes non nulles de $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$.

Problème 2 : Sollicitation thermomécanique d'une sphère creuse Une sphère creuse de rayon intérieur R_0 et de rayon extérieur R_1 est constituée d'un matériau au comportement élastique linéaire isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson $\nu = \frac{1}{4}$. Les déplacements en $R = R_1$ étant empêchés, on soumet cette sphère à une augmentation de température ΔT. On suppose alors, compte tenu des symétries du problème, que le champ des déplacements exprimé relativement au système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) adopte la forme $\mathbf{u} = u(r)\,\vec{e_r}$ où u est une fonction inconnue de la variable d'espace r que l'on se propose de déterminer.

1. Montrer que les modules de Lamé λ et μ sont égaux et donner leur expression en fonction de E.

2. Donner, en fonction de u et r, l'expression du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ puis en déduire, en fonction cette fois de u, r, μ, ΔT et du coefficient de dilatation thermique linéaire β, celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.

3. Les actions mécaniques à distance (poids propre) étant ici négligées, de la question 2 déduire, en tirant parti de la seule équation indéfinie de l'équilibre non trivialement satisfaite, que u est solution de l'équation différentielle ordinaire
$$u''(r) + 2\frac{u'(r)}{r} - 2\frac{u(r)}{r^2} = 0 \quad r \in]R_0, R_1[\tag{2}$$

4. Chercher des solutions $u^{(0)}(r)$ de l'équation différentielle ordinaire (2) sous la forme $u^{(0)}(r) = r^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, puis donner, en fonction de r et de deux constantes d'intégration A et B, l'expression générale de $u(r)$.

5. Ecrire les conditions aux limites en contrainte en $r = R_0$ ainsi qu'en déplacement en $r = R_1$ puis donner, en fonction de R_0, R_1, β et ΔT, l'expression des deux constantes d'intégration A et B. En déduire enfin celle des composantes non nulles de $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$.

6. Le matériau obéissant au critère de limite élastique de Tresca, déduire, en fonction de μ, β, ΔT, R_0, R_1 et de la limite élastique en traction simple σ_0, la condition de non plastification de la sphère.

7. Le sphère est destinée à subir une élévation de température maximale de 100 °C. On a par ailleurs $R_1 = 10\,\text{cm}$, $E = 200000\,\text{MPa}$, $\beta = 1.2\,10^{-5}\,°\text{C}^{-1}$ et $\sigma_0 = 440\,\text{MPa}$. Enfin l'on souhaite que la masse de cette sphère soit la plus grande possible et qu'il n'y ait aucune déformation plastique. Quelle valeur doit on alors donner à R_0 ?

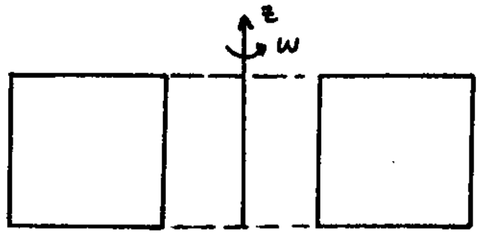
Exercice : Ecoulement sphérique d'un fluide visqueux newtonien L'écoulement d'un fluide visqueux newtonien de viscosité dynamique de cisaillement η et de masse volumique ρ indépendantes des variables d'espace x_1, x_2 et x_3 est défini par le champ eulérien des vitesses $\mathbf{v}(\vec{x}) = \frac{q}{4\Pi}\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$, $\forall\, \vec{x} \in \mathcal{D} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, \|\vec{x}\| \geq 1\}$, où q est un réel donné. ξ

1. Donner l'expression du tenseur $\mathbf{D}$ des taux de déformation puis en déduire celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.

   Indication On pourra, afin de simplifier l'écriture, poser $r = \|\vec{x}\|$. On rappelle par ailleurs que $\partial_i r = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$.

2. Les actions mécaniques à distance étant ici négligées, des équations indéfinies du mouvement et de l'expression de $\boldsymbol{\sigma}$ trouvée à la question 1 déduire celle de la pression p en supposant cette dernière nulle aux points de la sphère unité ayant pour centre l'origine de l'espace physique $\mathbb{R}^3$ (on exprimera p en fonction de ρ, q et $r = \|\vec{x}\|$).

Problème 1 : Cylindre creux en rotation



$\omega = cste$

$\rho, E, \nu = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ et $2\mu = E$

$\vec{u} = u(r)\,\vec{e_r}$ (coordonnées cylindriques)

1. $\varepsilon_{rr} = u'$, $\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}$, autres composantes nulles
   $\sigma_{rr} = Eu'$, $\sigma_{\theta\theta} = E\frac{u}{r}$, autres composantes nulles

2. Le mouvement est circulaire uniforme $\Rightarrow$ forces centrifuges $\vec{b} = \omega^2 r\,\vec{e_r}$

3. $\partial_r \sigma_{rr} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho\omega^2 r = 0 \quad \Rightarrow \quad u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} = -\frac{\rho\omega^2}{E} r \quad (1)$

4. $u^{(1)}(r) = ar^3 \Rightarrow u^{(1)'}(r) = 3ar^2$ et $u^{(1)''}(r) = 6ar$
   Alors $(1) \Rightarrow (6a + 3a - 1)r = -\frac{\rho\omega^2}{E} r \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{\rho\omega^2}{8E}$
   Équation homogène : $u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad (2)$
   $u^{(0)}(r) = r^\alpha \Rightarrow u^{(0)'}(r) = \alpha r^{\alpha-1}$ et $u^{(0)''}(r) = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} \Rightarrow \alpha(\alpha-1) + \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm 1$
   solution générale de (2) : $u(r) = Ar + \frac{B}{r}$
   solution générale de (1) : $u(r) = Ar + \frac{B}{r} - Kr^3$ avec $K = \frac{\rho\omega^2}{8E}$

5. $\sigma_{rr} = Eu' = E(A - \frac{B}{r^2} - 3Kr^2)$

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(R_0) = 0 \\ \sigma_{rr}(R_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A - \frac{B}{R_0^2} = 3KR_0^2 \\ A - \frac{B}{R_1^2} = 3KR_1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(R_0^2 - R_1^2) = 3K(R_0^4 - R_1^4) \\ B(\frac{-1}{R_0^2} + \frac{1}{R_1^2}) = 3K(R_0^2 - R_1^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3K(R_0^2 + R_1^2) \\ B = 3KR_0^2R_1^2 \end{cases}$$

$$u(r) = \frac{\rho\omega^2}{8E}\left[3(R_0^2 + R_1^2)r + 3\frac{R_0^2R_1^2}{r} - r^3\right]$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{3\rho\omega^2}{8E}\left[R_0^2 + R_1^2 - \frac{R_0^2R_1^2}{r^2} - r^2\right] \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{3\rho\omega^2}{8E}\left[R_0^2 + R_1^2 + \frac{R_0^2R_1^2}{r^2} - \frac{r^2}{3}\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{3}{8}\rho\omega^2\left[R_0^2 + R_1^2 - \frac{R_0^2R_1^2}{r^2} - r^2\right] \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{3}{8}\rho\omega^2\left[R_0^2 + R_1^2 + \frac{R_0^2R_1^2}{r^2} - \frac{r^2}{3}\right] \end{cases}$$

Problème 2 : Sollicitation thermomécanique d'une sphère creuse

1. $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{E\,1/4}{5/4 \cdot 1/2} = \frac{2}{5}E$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2 \cdot \frac{5}{4}} = \frac{2}{5}E \qquad \lambda = \mu = \frac{2}{5}E$

2. $\varepsilon_{rr} = u'$, $\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}$, autres composantes nulles

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \lambda(u' + \frac{2u}{r}) + 2\mu u' - (3\lambda + 2\mu)\beta\Delta T \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda(u' + \frac{2u}{r}) + 2\mu\frac{u}{r} - (3\lambda + 2\mu)\beta\Delta T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr} = \mu(3u' + 2\frac{u}{r} - 5\beta\Delta T) \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \mu(u' + 4\frac{u}{r} - 5\beta\Delta T) \\ \text{autres composantes nulles} \end{cases}$$

3. $\partial_r \sigma_{rr} + \frac{1}{r}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0 \Rightarrow 3u'' + 2\frac{u'}{r} - 2\frac{u}{r^2} + \frac{1}{r}(4u' - 4\frac{u}{r}) = 0$
   $\Rightarrow u'' + 2\frac{u'}{r} - 2\frac{u}{r^2} = 0 \quad (1)$

4. $u^{(0)}(r) = r^\alpha \Rightarrow u^{(0)'}(r) = \alpha r^{\alpha-1}$ et $u^{(0)''}(r) = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}$
   $(1) \Rightarrow \alpha(\alpha-1) + 2\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \Rightarrow (\alpha-1)(\alpha+2) = 0 \Rightarrow \alpha = 1$ ou $\alpha = -2$
   solution générale de (1) : $u(r) = Ar + \frac{B}{r^2}$

5. $u(r) = Ar + \frac{B}{r^2} \Rightarrow u'(r) = A - \frac{2B}{r^3}$ et $\frac{u(r)}{r} = A + \frac{B}{r^3}$

$\Rightarrow \sigma_{rr} = \mu\left(3A - \frac{6B}{r^3} + 2A + \frac{2B}{r^3} - 5\beta\Delta T\right) = \mu\left(5A - 4\frac{B}{r^3} - 5\beta\Delta T\right)$

$$\begin{cases}\sigma_{rr}(R_0) = 0 \\ u(R_1) = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5A - 4\frac{B}{R_0^3} = 5\beta\Delta T \\ AR_1 + \frac{B}{R_1^2} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5A - 4\frac{B}{R_0^3} = 5\beta\Delta T \\ A + \frac{B}{R_1^3} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-B\left(\frac{4}{R_0^3} + \frac{5}{R_1^3}\right) = 5\beta\Delta T \\ A = -\frac{B}{R_1^3}\end{cases}$$

et l'on a donc $B = -\frac{R_0^3 R_1^3}{4R_1^3 + 5R_0^3} 5\beta\Delta T$ et $A = \frac{R_0^3}{4R_1^3 + 5R_0^3} 5\beta\Delta T$

$$u(r) = \frac{5R_0^3}{5R_0^3 + 4R_1^3}\beta\Delta T\left[r - \frac{R_1^3}{r^2}\right]$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{5R_0^3}{5R_0^3 + 4R_1^3}\beta\Delta T\left[1 + 2\frac{R_1^3}{r^3}\right] \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{5R_0^3}{5R_0^3 + 4R_1^3}\beta\Delta T\left[1 - \frac{R_1^3}{r^3}\right]$$

$$\sigma_{rr} = 5\mu\beta\Delta T\left[\frac{R_0^3}{5R_0^3 + 4R_1^3}\left(5 + 4\frac{R_1^3}{r^3}\right) - 1\right] \qquad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = 5\mu\beta\Delta T\left[\frac{R_0^3}{5R_0^3 + 4R_1^3}\left(5 - 2\frac{R_1^3}{r^3}\right) - 1\right]$$

ou encore, après simplification

$$\sigma_{rr} = \mu\beta\Delta T\frac{20R_1^3}{5R_0^3 + 4R_1^3}\left(\frac{R_0^3}{r^3} - 1\right) \qquad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -\mu\beta\Delta T\frac{20R_1^3}{5R_0^3 + 4R_1^3}\left(\frac{1}{2}\frac{R_0^3}{r^3} + 1\right)$$

6. On a, $\forall r$, $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} < \sigma_{rr}$ $\Rightarrow \underset{i \neq j}{\mathrm{Max}}|\sigma_i - \sigma_j| = \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = \mu\beta\Delta T\frac{30R_1^3}{5R_0^3 + 4R_1^3}$

La condition de non plastification est donc $\mu\beta\Delta T\frac{30R_1^3}{5R_0^3 + 4R_1^3} \leq \sigma_0$

7. A.N $E = 200000$ MPa, $\beta = 1.2\ 10^{-5}\,°C^{-1}$, $\Delta T = 100°C$, $\sigma_0 = 440$ MPa et $R_1 = 10$ cm. ($\mu = \frac{2}{5}E = 80$ G

$$5\left(\frac{R_0}{R_1}\right)^3 + 4 \geq \frac{30\mu\beta\Delta T}{\sigma_0} \Rightarrow \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^3 \geq \frac{6\mu\beta\Delta T}{\sigma_0} - 0{,}8 = \frac{6.8\,10^4 \times 1.2\,10^{-5} \times 10^2}{440} - 0{,}8 = 0{,}8^3$$

$\Rightarrow R_0 = 8$ cm

<u>Exercice</u> : Ecoulement sphérique d'un fluide visqueux newtonien

1. $v_i = \frac{q}{4\pi}\frac{x_i}{r^3} \Rightarrow G_{ij} = \partial_j v_i = \frac{q}{4\pi r^3}\delta_{ij} - \frac{3q}{4\pi r^5}x_i x_j \quad \forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2$

G symétrique $\Rightarrow D = G$. Par ailleurs, $\mathrm{div}_x \vec{v} = D_{ii} = G_{ii} = \frac{q}{4\pi r^3}.3 - \frac{3q}{4\pi r^5}\underbrace{x_i x_i}_{r^2} = 0$

$\Rightarrow \sigma = -p\delta + 2\eta D$ c'est à dire $\sigma_{ij} = \left(-p + \frac{\eta q}{2\pi r^3}\right)\delta_{ij} - \frac{3\eta q}{2\pi r^5}x_i x_j \quad \forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2$

2. G symétrique $\Rightarrow W = 0 \Rightarrow \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = 0$. Par ailleurs, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\gamma} = \vec{\mathrm{grad}}\,\frac{\vec{v}^2}{2}$

$\Rightarrow \mathrm{div}_x\,\sigma = \rho\,\vec{\mathrm{grad}}\,\frac{\vec{v}^2}{2} \quad (1)$

$$\text{Or } \partial_j\sigma_{ij} = -\partial_i p \underbrace{- \frac{3\eta q}{2\pi r^5}x_i - \frac{3\eta q}{2\pi r^5}\overbrace{(3x_i + \underbrace{\delta_{ij}x_j}_{x_i})}^{\partial_j(x_i x_j)} + \frac{15\eta q}{2\pi r^7}x_i\underbrace{x_j x_j}_{r^2}}_{0} = -\partial_i p$$

$\Rightarrow \mathrm{div}_x\,\sigma = -\vec{\mathrm{grad}}\,p$ c'est à dire, avec (1) et puisque ρ = cste uniforme

$-\vec{\mathrm{grad}}\,p = \vec{\mathrm{grad}}\,\rho\frac{\vec{v}^2}{2} \Rightarrow p + \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 = \text{cste}$

avec $\vec{v} = \frac{q}{4\pi}\frac{\vec{x}}{r^3}$ et $\{r = 1 \Rightarrow p = 0\}$ on a $p = \frac{\rho q^2}{32\pi^2}\left(1 - \frac{1}{r^4}\right)$

E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1[ère] année)
Devoir numéro 2
Durée 2 heures

Vendredi 26 Novembre 1999

Premier problème : torsion pure d'un cylindre (14 points) Un cylindre de révolution d'axe Oz, de hauteur H et de rayon R est constitué d'un matériau homogène et non pesant au comportement élastique linéaire isotrope, de module de cisaillement de Coulomb G. Il est encastré à sa base $z = 0$ tandis que sa section supérieure $z = H$ subit dans son plan une rotation d'axe Oz et d'angle $\omega \ll 1$.

1. **Approche en déplacements** On suppose ici que le champ des déplacements exprimé en coordonnées cylindriques est uniquement orthoradial. On a donc $\mathbf{u} = u(r,z)\vec{e_\theta}$ où u est une fonction des variables d'espace r et z que l'on se propose à présent de déterminer.
   (a) Donner, en fonction de u, l'expression du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$. En déduire ensuite, en fonction de u et G, celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
   (b) Déduire des équations indéfinies de l'équilibre l'équation aux dérivées [illegible] dont u est solution.
   (c) On cherche une solution de l'équation précédente sous la forme $u(r,z) = f(r)g(z)$. Montrer tout d'abord, en tirant parti des conditions aux limites en $z = H$, [illegible] une fonction linéaire de r. Achever ensuite la détermination de $u(r,z)$ en tirant cette fois parti du résultat de la question 1b ainsi que des conditions aux limites en $z = 0$.
2. **Approche en contraintes** Sans plus émettre d'hypothèse sur l'expression du champ des déplacements, on suppose à présent que $\boldsymbol{\sigma}$ adopte la forme

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta z} \\ 0 & \sigma_{\theta z} & 0 \end{bmatrix}$$

où $\sigma_{\theta z}$ est une fonction inconnue dépendant, a priori, des variables d'espace r et z.
   (a) Déduire des équations indéfinies de l'équilibre que $\sigma_{\theta z}$ est indépendant de z. On posera alors, dans tout ce qui suit, $\sigma_{\theta z} = h(r)$.
   (b) Donner, en fonction de h et G, l'expression des composantes de $\boldsymbol{\varepsilon}$. En déduire ensuite, par intégration et compte tenu des conditions aux limites en $z = 0$ et $z = H$, celle du champ des déplacements $\mathbf{u}$ puis donner, en fonction de ω, H, G et r, l'expression finale des composantes de $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$.
   (c) Soit C le couple de torsion ayant permis d'imposer la rotation ω. Montrer, en tirant parti des résultats de la question 2b, qu'il existe une correspondance linéaire entre ces deux grandeurs (on donnera notamment l'expression de C en fonction de ω, H, R et G). Ce résultat était il prévisible ? En déduire alors l'expression des composantes de $\boldsymbol{\sigma}$ en fonction de C, R et r.
   (d) Le matériau obéissant au critère de limite élastique de Von-Mises et σ_0 désignant sa limite élastique en traction simple, quelle est alors, en fonction de σ_0 et R, la valeur de C à la limite élastique.
   (e) Le matériau est à présent non homogène, son module de cisaillement de Coulomb G variant avec z selon la relation $G = G_0(1 + \frac{z}{H})$, où G_0 est une constante mécanique donnée. Reprendre alors les questions 2b à 2d.

Second problème : Expansion plane homogène (6 points) On considère un milieu continu homogène subissant la transformation plane linéaire

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha t X_2 \\ x_2 = X_2 - \alpha t X_1 \end{cases}$$

où $\alpha > 0$ est une constante donnée de dimension T^{-1} et où $t \geq 0$ désigne la variable temps. Le comportement du matériau est régi par la relation $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda\, \mathrm{tr}\mathbf{D}\, \boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbf{D}$ où $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}$ désigne la dérivée objective de Jaumann du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, définie par $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{W} - \mathbf{W}.\boldsymbol{\sigma}$, où $\mathbf{D}$ et $\mathbf{W}$ sont respectivement les tenseurs des taux de déformation [illegible] et où λ et μ sont deux constantes mécaniques données. Enfin, dans tout cet exercice excepté pour la question 3, on ne considèrera que les composantes des différents tenseurs relatives aux axes orthonormés et fixes Ox_1 et Ox_2. On pourra par ailleurs poser $\tau = \alpha t$ afin d'alléger l'écriture.

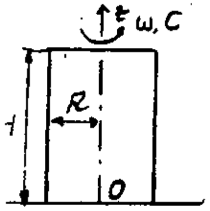
1. Donner, après avoir calculé $\mathbf{D}$ et $\mathbf{W}$, le système de trois équations différentielles ordinaires satisfaites par σ_{11}, σ_{22} et σ_{12}.
2. Résoudre le système précédent en supposant les contraintes nulles à l'instant initial $t = 0$.

   Indication On montrera tout d'abord que l'on a, $\forall t \geq 0$, $\sigma_{12}(t) = \sigma_{11}(t) - \sigma_{22}(t) = 0$. (On rappelle que le système différentiel $\dot{Y}(t) = \dot{A}(t).Y(t)$, $t > 0$, $Y(0) = Y_0$ a pour solution $Y(t) = [\exp A(t)].[\exp A(0)]^{-1}.Y_0$)
3. Le matériau possédant une limite élastique donnée par le critère de Tresca et σ_0 désignant sa limite élastique en traction simple, donner, en fonction de α, σ_0 et μ, la valeur de l'instant jusqu'auquel la solution précédente reste valable.

Torsion d'un cylindre

MMC. Devoir n° 2 — Eléments de réponse

P. Royis 26/11/99



Approche en déplacements

On suppose ici que $\vec{u} = u(r,z)\,\vec{e_\theta}$

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = 0 & \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\partial_r u - \frac{u}{r}\right) \\ \varepsilon_{\theta\theta} = 0 & \varepsilon_{rz} = 0 \\ \varepsilon_{zz} = 0 & \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\partial_z u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr} = 0 & \sigma_{r\theta} = G\left(\partial_r u - \frac{u}{r}\right) \\ \sigma_{\theta\theta} = 0 & \sigma_{rz} = 0 \\ \sigma_{zz} = 0 & \sigma_{\theta z} = G\,\partial_z u \end{cases}$$

équations indéfinies de l'équilibre

sur $\vec{e_r}$: $0 = 0$

sur $\vec{e_\theta}$: $\partial^2_{rr} u - \frac{1}{r}\partial_r u + \frac{u}{r^2} + \partial^2_{zz} u + \frac{2}{r}\left(\partial_r u - \frac{u}{r}\right) = 0$

sur $\vec{e_z}$: $0 = 0$

$$\boxed{\partial^2_{rr} u + \frac{1}{r}\partial_r u - \frac{u}{r^2} + \partial^2_{zz} u = 0}$$

) on cherche une solution de la forme $u(r,z) = f(r)\,g(z)$

$u(r,H) = \omega r \Rightarrow f(r)\,g(H) = \omega r \Rightarrow f(r) = \frac{\omega}{g(H)} r$

on a alors $\partial^2_{rr} u + \frac{1}{r}\partial_r u - \frac{u}{r^2} = 0$ d'où $g''(z) = 0$ et donc $g(z) = Az + B$

$u(r,0) = 0\ \forall r \Rightarrow g(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$\Rightarrow g(z) = Az \quad g(H) = aH$ et $\boxed{u(r,z) = \frac{\omega}{H} r z}$

Approche en contrainte

On suppose ici que $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta z} \\ 0 & \sigma_{\theta z} & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_{\theta z}$ fonction de r et z, a priori

équations indéfinies

sur $\vec{e_r}$: $0 = 0$

sur $\vec{e_\theta}$: $\partial_z \sigma_{\theta z} = 0$ $\Rightarrow$ $\sigma_{\theta z} = h(r)$

(b) $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \\ 0 & \varepsilon_{\theta z} & 0 \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2G}\sigma_{\theta z} = \frac{1}{2G} h(r)$

intégrons les déformations

$\varepsilon_{\theta\theta} = 0 \Rightarrow u_r = 0$

$\varepsilon_{rr} = 0$ oui puisque $u_r = 0$

$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_{zz} = 0 \Rightarrow \partial_z u_z = 0 \\ \varepsilon_{rz} = 0 \Rightarrow \partial_r u_z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u_z = cste = 0$ puisque $u_z(z=0) = 0$

$\varepsilon_{r\theta} = 0 \Rightarrow \partial_r u_\theta - \frac{u_\theta}{r} = 0$ (1)

$\varepsilon_{\theta z} = \frac{h(r)}{2G} \Rightarrow \partial_z u_\theta = \frac{h(r)}{G} \Rightarrow u_\theta = \frac{h(r)}{G} z + A$

en $z = 0$ $u_\theta = 0\ \forall r \Rightarrow A = 0$ et $u_\theta = \frac{h(r)}{G} z$

(1) $\Rightarrow h'(r) - \frac{h(r)}{r} = 0 \Rightarrow h(r) = Br$

$\Rightarrow u_\theta = \frac{B}{G} r z$

en $z = H$ $u_\theta = r\omega \Rightarrow \frac{BH}{G} = \omega \quad B = \frac{G\omega}{H}$

finalement

$u_\theta = \frac{\omega}{H} r z$	$\varepsilon_{\theta z} = \frac{\omega}{2H} r$	$\sigma_{\theta z} = G\frac{\omega}{H} r$

(c) Soit C le couple ayant permis d'imposer ω.

$C = \int_0^{2\pi}\int_0^R \sigma_{\theta z}\, r^2\, dr\, d\theta = \ldots \Rightarrow C = 2\pi G \frac{\omega}{H}\frac{R^4}{4}$ $\quad \boxed{C = \pi G \frac{\omega}{2H} R^4}$

On a donc $\omega = \frac{2HC}{\pi G R^4}$ d'où $\sigma_{\theta z} = \boxed{\frac{2C}{\pi R^4} r}$

(d) matériau de Von-Mises

à la limite élastique, $\sqrt{J_2} = \|s\| = C_M = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0$

On $\|s\|_{max} = \sqrt{2}\,|\sigma_{\theta z}|_{max} = \frac{2\sqrt{2}\,C\ell}{\pi R^3}$

de $\frac{2\sqrt{2}\,C\ell}{\pi R^3} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0$ on tire $\quad \boxed{C\ell = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\sigma_0 R^3}$

:) <u>Reprise de 2. avec $G = G_0(1+\frac{z}{H})$</u>

P. Keyo 26/11/99

On a ici $\partial_z u_\theta = \dfrac{h(r)}{G_0(1+\frac{z}{H})}$ d'où $u_\theta = \dfrac{H}{G_0}\ln\left(1+\frac{z}{H}\right)h(r) + A$

en $z=0$ on a $u_\theta = 0$ $\forall r$ d'où $A = 0$

on a par ailleurs toujours $h(r) = Br$ et donc

$u_\theta = \dfrac{H}{G_0}\ln\left(1+\frac{z}{H}\right)Br$

en $z = H$, $u_\theta = \omega r$ et donc $\dfrac{H}{G_0}\ln 2\, B = \omega$ $\Rightarrow$ $B = \dfrac{G_0\omega}{H\ln 2}$

finalement,

$u_\theta = \dfrac{\omega}{\ln 2}\ln\left(1+\frac{z}{H}\right)r$	$\varepsilon_{\theta z} = \dfrac{\omega}{2\ln 2\, H}\dfrac{r}{1+\frac{z}{H}}$	$\sigma_{\theta z} = \dfrac{G_0\omega}{\ln 2\, H}r$

$$C - \int_0^{2\pi}\int_0^R \sigma_{\theta z} r^2\,dr\,d\theta = 0 \Rightarrow C = 2\pi\frac{G_0\omega}{\ln 2\, H}\frac{R^4}{4} \qquad \boxed{C = \pi G_0\frac{\omega}{2\ln 2\, H}R^4}$$

on a donc $\omega = \dfrac{2\ln 2\, HC}{\pi G_0 R^4}$ d'où $\sigma_{\theta z} = \dfrac{2C}{\pi R^4}r$

donc C_e est inchangé : $\boxed{C_e = \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}\sigma_0 R^3}$

<u>Expansion homogène plane</u>

r. Keyo 26/11/99

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha t X_2 \\ x_2 = X_2 - \alpha t X_1 \end{cases} \quad \text{on pose } \tau = \alpha t$$

L.C. $\hat{\sigma} = \lambda \operatorname{tr} D\,\delta + 2\mu D$, avec $\hat{\sigma} = \dot{\sigma} + \sigma.W - W.\sigma$

1. $F = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ -\tau & 1 \end{pmatrix}$ $\quad F^{-1} = \dfrac{1}{1+\tau^2}\begin{pmatrix} 1 & -\tau \\ \tau & 1 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \alpha\begin{pmatrix} X_2 \\ -X_1 \end{pmatrix} = \dfrac{\alpha}{1+\tau^2}\begin{pmatrix} \tau x_1 + x_2 \\ \tau x_2 - x_1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $G = \dfrac{\alpha}{1+\tau^2}\begin{pmatrix} \tau & 1 \\ -1 & \tau \end{pmatrix}$ $\quad D = \dfrac{\alpha\tau}{1+\tau^2}\delta$ $\quad W = \dfrac{\alpha}{1+\tau^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma.W = \dfrac{\alpha}{1+\tau^2}\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \dfrac{\alpha}{1+\tau^2}\begin{pmatrix} -\sigma_{12} & \sigma_{11} \\ -\sigma_{22} & \sigma_{12} \end{pmatrix}$

$W.\sigma = \dfrac{\alpha}{1+\tau^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \dfrac{\alpha}{1+\tau^2}\begin{pmatrix} \sigma_{12} & \sigma_{22} \\ -\sigma_{11} & -\sigma_{12} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{11} - \dfrac{2\alpha}{1+\tau^2}\sigma_{12} = (\lambda+\mu)\dfrac{2\alpha\tau}{1+\tau^2} & (1) \\ \dot{\sigma}_{22} + \dfrac{2\alpha}{1+\tau^2}\sigma_{12} = (\lambda+2\mu)\dfrac{2\alpha\tau}{1+\tau^2} & (2) \\ \dot{\sigma}_{12} + \dfrac{\alpha}{\cdots}(\text{[illegible]}) = 0 & (3) \end{cases}$$

(1) − (2) $\Rightarrow$ $\dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22} - \dfrac{4\alpha}{1+\tau^2}\sigma_{12} = 0$

$\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} \dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{12} \end{pmatrix} = \dfrac{\alpha}{1+\tau^2}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} \sigma_{11}(t) - \sigma_{22}(t) \\ \sigma_{12}(t) \end{pmatrix} = \exp\left[\operatorname{arctg}\tau\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \sigma_{11}(0) - \sigma_{22}(0) \\ \sigma_{12}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{12} = 0 \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = (\lambda+\mu)\ln(1+\tau^2) \quad \sigma_{33} = \lambda\ln(1+\tau^2)}$

3. matériau de Tresca. A la limite élastique, $\operatorname{Max}\{|\sigma_1-\sigma_2|, |\sigma_1-\sigma_3|, |\sigma_2-\sigma_3|\} = \sigma_0$

$\Rightarrow$ $\mu\ln(1+\tau^2) = \sigma_0$ $\quad\Rightarrow$ $\boxed{t_e = \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{e^{\frac{\sigma_0}{\mu}} - 1}}$

0

E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1ère année)
Devoir numéro 2
Durée 2 heures

Vendredi 20 Novembre 1998

Premier problème *Dans tout ce problème on utilisera le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) et l'on tirera parti des résultats de l'annexe* B *du polycopié (section* **B.3.2** *page 251).*

Un cylindre creux de révolution de hauteur H, de rayon intérieur R_0 et de rayon extérieur R_1, est constitué d'un matériau homogène et non pesant, au comportement élastique linéaire et isotrope (modules de Lamé λ et μ). Ce matériau obéit au critère de limite élastique de Tresca, et τ_0 désigne la valeur de la contrainte de cisaillement τ_n à la limite élastique. Le cylindre est soumis à une pression intérieure p_0 $(r = R_0)$ et à une pression extérieure p_1 $(r = R_1)$. Le déplacement vertical à la base $(z = 0)$ est par ailleurs nul, tandis que sa valeur en tête $(z = H)$ est égale à $-u_0$. Enfin, le champ des déplacements est supposé adopter la forme $\mathbf{u} = u_r(r)\,\vec{e_r} + u_z(z)\,\vec{e_z}$.

1. Donner, en fonction des inconnues u_r et u_z, l'expression du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\epsilon}$, puis celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.

2. De l'équation indéfinie de l'équilibre écrite en projection sur $\vec{e_z}$ ainsi que des conditions aux limites cinématiques (i.e. en déplacements), déduire l'expression de u_z.

3. Ecrire l'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur $\vec{e_r}$ et en déduire l'équation différentielle ordinaire satisfaite par u_r.

4. Montrer que l'équation précédente a pour solution générale $u_r(r) = Ar + \frac{B}{r}$, puis déterminer les constantes A et B grâce aux conditions aux limites statiques (i.e. en contraintes). *Indication* : on cherchera des solutions de la forme $u_r(r) = r^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

5. Donner, en fonction de λ, μ, A, B, u_0, H et r, l'expression finale des composantes non nulles des tenseurs $\boldsymbol{\epsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$.

6. On s'intéresse ici aux sollicitations (u_0, p_0, p_1) qui annulent u_r. Montrer que l'on a alors nécessairement $p_0 = p_1 = p$, puis donner l'expression de p en fonction de λ, u_0 et H. Quelle est alors la valeur de u_0 à la limite élastique ?

7. On s'intéresse à présent aux sollicitations (u_0, p_0, p_1) annulant la contrainte verticale σ_{zz}. Quelle est, dans [illegible] équation reliant u_0, p_0 et p_1 ?

8. La relation de la question précédente étant supposée vérifiée, on se limite aux sollicitations conduisant à un déplacement radial linéaire $(B = 0)$. Vérifier que l'on a à nouveau $p_0 = p_1 = p$, puis donner l'expression de p en fonction de u_0 ainsi que la valeur de u_0 à la limite élastique (on suppose ici $u_0 \leq 0$).

9. La relation de la question 7 étant toujours satisfaite, on s'intéresse à présent aux sollicitations pour lesquelles la composante linéaire du déplacement radial est nulle $(A = 0)$. Montrer que l'on a alors nécessairement $u_0 = 0$. Donner ensuite l'expression de p_1 en fonction de p_0, R_0 et R_1, puis la valeur de p_0 à la limite élastique.

10. Le cylindre est maintenant soumis à une variation de température ΔT. Quelles sont alors, en fonction de λ, μ et du coefficient de dilatation thermique linéaire β, les valeurs à donner à u_0, p_0 et p_1 si l'on veut que le champ des déplacements $\mathbf{u}$ soit nul.

Second problème *Dans tout ce problème on limitera l'étude au plan $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.*

On considère un milieu continu homogène subissant la transformation plane linéaire (distorsion pure)

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha t X_2 \\ x_2 = X_2 \end{cases} \qquad \alpha > 0 \quad t \geq 0$$

Le comportement du matériau est régi par la relation

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda \,\mathrm{tr}\mathbf{D}\, \boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbf{D}$$

où $\mathbf{D}$ et $\mathbf{W}$ sont respectivement les tenseurs des taux de déformation et de rotation, où λ et μ sont deux constantes mécaniques données et où $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ désigne la dérivée objective de Jaumann du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, définie par

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{W} - \mathbf{W}.\boldsymbol{\sigma}$$

1. En se limitant aux composantes des différents tenseurs relatives aux axes Ox_1 et Ox_2, donner, après avoir calculé $\mathbf{D}$ et $\mathbf{W}$, le système de trois équations différentielles ordinaires satisfaites par σ_{11}, σ_{22} et σ_{12}.

2. Résoudre le système précédent en supposant les contraintes nulles à l'instant initial $t = 0$.

3. Le matériau possédant une limite élastique donnée par le critère de Von-Mises $\sqrt{J_2} = C_M$, de constante mécanique C_M donnée, dire, selon les valeurs de μ et C_M, jusqu'à quel instant la solution précédente reste valable.

1. $\varepsilon = \begin{pmatrix} u_r' & & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & u_z' \end{pmatrix}$ $\quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \lambda\left(u_r' + \frac{u_r}{r} + u_z'\right) + 2\mu\, u_r' \\ \sigma_{\theta\theta} = \lambda\left(u_r' + \frac{u_r}{r} + u_z'\right) + 2\mu \frac{u_r}{r} \\ \sigma_{zz} = \lambda\left(u_r' + \frac{u_r}{r} + u_z'\right) + 2\mu\, u_z' \end{cases}$$

$\operatorname{div} \sigma = 0$ (cf poly p355)

2. $\partial_z \sigma_{zz} = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} u_z'' = 0 \\ u_z(0) = 0 \\ u_z(H) = -u_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{u_z = -u_0 \frac{z}{H}}$

3. $\partial_r \sigma_{rr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \Rightarrow \boxed{u_r'' + \frac{u_r'}{r} - \frac{u_r}{r^2} = 0}$

4. $u_r = r^\alpha \Rightarrow \alpha(\alpha-1) + \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm 1 \Rightarrow \boxed{u_r = Ar + \frac{B}{r}}$

Alors $\sigma_{rr} = \lambda\left(2A - \frac{u_0}{H}\right) + 2\mu\left(A - \frac{B}{r^2}\right)$

$r = R_0$: $2(\lambda+\mu)A - \frac{2\mu}{R_0^2} B = \lambda \frac{u_0}{H} - p_0$

$r = R_1$: $2(\lambda+\mu)A - \frac{2\mu}{R_1^2} B = \lambda \frac{u_0}{H} - p_1$

$$\boxed{B = \frac{p_0 - p_1}{2\mu} \frac{R_0^2 R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \qquad A = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \frac{u_0}{H} + \frac{1}{2(\lambda+\mu)} \frac{p_0 R_0^2 - p_1 R_1^2}{R_1^2 - R_0^2}}$$

5. $\varepsilon_{rr} = A - \frac{B}{r^2}$, $\varepsilon_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2}$, $\varepsilon_{zz} = -\frac{u_0}{H}$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \lambda\left(2A - \frac{u_0}{H}\right) + 2\mu\left(A - \frac{B}{r^2}\right) \\ \sigma_{\theta\theta} = \lambda\left(2A - \frac{u_0}{H}\right) + 2\mu\left(A + \frac{B}{r^2}\right) \\ \sigma_{zz} = \lambda\left(2A - \frac{u_0}{H}\right) - 2\mu \frac{u_0}{H} \end{cases}$$

6. $B = 0 \Rightarrow p_0 = p_1 = p$, $A = 0 \Rightarrow \boxed{p = \lambda \frac{u_0}{H}}$

$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -\lambda \frac{u_0}{H} \qquad \sigma_{zz} = -(\lambda + 2\mu)\frac{u_0}{H}$

$\operatorname{Max} |\sigma_i - \sigma_j| = 2\mu \frac{u_0}{H} \leq 2\tau_0 \qquad \boxed{u_{0\,lim} = \frac{\tau_0}{\mu} H}$

7. $\sigma_{zz} = 0 \Rightarrow 2\lambda A = (\lambda + 2\mu)\frac{u_0}{H}$. Avec $A = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \frac{u_0}{H} + \frac{1}{2(\lambda+\mu)} \frac{p_0 R_0^2 - p_1 R_1^2}{R_1^2 - R_0^2}$

il vient :

$$\frac{\lambda}{(\lambda+\mu)} \frac{p_0 R_0^2 - R_1^2 p_1}{R_1^2 - R_0^2} = \frac{u_0}{H}\left[(\lambda + 2\mu) - \frac{\lambda^2}{\lambda+\mu}\right] = \frac{u_0}{H} \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$$

$$\boxed{\frac{p_0 R_0^2 - p_1 R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} = \frac{\mu}{\lambda}(3\lambda + 2\mu)\frac{u_0}{H}}$$

8. $B = 0 \Rightarrow p_0 = p_1 = p$ avec $\boxed{p = -\frac{\mu}{\lambda}(3\lambda + 2\mu)\frac{u_0}{H}}$

$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 2(\lambda+\mu)A - \lambda \frac{u_0}{H}$. Avec $A = \frac{1}{2(\lambda+\mu)}\left[\lambda \frac{u_0}{H} - p\right]$ on retrouve bien (évidemment) $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -p$.

$\Rightarrow \operatorname{Max} |\sigma_i - \sigma_j| = +p$ (on suppose donc ici $u_0 < 0$).

et donc $\boxed{u_{0\,lim} = -2\tau_0 \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{3\lambda + 2\mu} H}$

9. $A = 0$ et $2\lambda A = (\lambda + 2\mu)\frac{u_0}{H} \Rightarrow u_0 = 0$.

$A = 0 = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \frac{u_0}{H}{}^{\to 0} + \frac{1}{2(\lambda+\mu)} \frac{p_0 R_0^2 - p_1 R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \Rightarrow \boxed{p_1 = p_0 \frac{R_0^2}{R_1^2}}$

Alors $B = \frac{p_0}{2\mu}\left(1 - \frac{R_0^2}{R_1^2}\right) \frac{R_0^2 R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} = \frac{p_0}{2\mu} R_0^2$

$\boxed{\sigma_{rr} = -\sigma_{\theta\theta} = -p_0 \frac{R_0^2}{r^2}}$ $\qquad \operatorname{Max} |\sigma_i - \sigma_j| = 2p_0$ (en $r = R_0$)

$\Rightarrow \boxed{p_{0\,lim} = \tau_0}$

10. $\vec{u} = 0 \Rightarrow \boxed{u_0 = 0}$

$\left.\begin{matrix} \sigma = [\lambda \operatorname{tr}\varepsilon - (3\lambda + 2\mu)\beta \Delta T]\,\delta + 2\mu\varepsilon \\ \vec{u} = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sigma = -(3\lambda + 2\mu)\beta \Delta T\, \delta$

donc $\boxed{p_0 = p_1 = (3\lambda + 2\mu)\beta \Delta T}$

MMC - Devoir n° 2. Eléments de correction P. Royis - 03/11/98

II 1. $\vec{U} = \begin{pmatrix} \alpha x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow G = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad W = \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\overset{\vee}{\sigma} = \lambda \,\mathrm{tr}\, D\,\delta + 2\mu D = 2\mu D$

$\overset{\vee}{\sigma} = \dot{\sigma} + \sigma . W - W\sigma, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$

$\sigma . W = \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} -\sigma_{12} & \sigma_{11} \\ -\sigma_{22} & \sigma_{12} \end{pmatrix} - W.\sigma = \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} \sigma_{12} & \sigma_{22} \\ -\sigma_{11} & -\sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} -2\sigma_{12} & \sigma_{11}-\sigma_{22} \\ \sigma_{11}-\sigma_{22} & 2\sigma_{12} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\sigma}_{11} - \alpha\sigma_{12} = 0 & (1) \\ \dot{\sigma}_{22} + \alpha\sigma_{12} = 0 & (2). \\ \dot{\sigma}_{12} + \frac{\alpha}{2}(\sigma_{11}-\sigma_{22}) = \mu\alpha & (3) \end{cases}$$

2. (1) et (2) $\Rightarrow \sigma_{22} = -\sigma_{11}$

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{12} + \alpha\sigma_{11} = \mu\alpha & (3') \\ \dot{\sigma}_{11} = \alpha\sigma_{12} \end{cases} \Rightarrow \ddot{\sigma}_{12} + \alpha^2\sigma_{12} = 0$$

$\sigma_m = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\sigma$

$$\begin{cases} \sigma_{12} = A\cos\alpha t + B\sin\alpha t \\ \text{en } t=0 \quad \sigma_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\sigma_{12} = B\sin\alpha t}.$$

$s = \sigma - \sigma_m$

$$\text{puis}\begin{cases} \dot{\sigma}_{11} = \alpha\sigma_{12} \\ \sigma_{11} = 0 \text{ en } t=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\sigma_{11} = B(1-\cos\alpha t)}$$

reportant dans (3') on a $\alpha B\cos\alpha t + \alpha B(1-\cos\alpha t) = \mu\alpha$
d'où $B = \mu$.

$$\boxed{\sigma_{12} = \mu\sin\alpha t \qquad \sigma_{11} = -\sigma_{22} = \mu(1-\cos\alpha t)} \quad (*)$$

3. $\mathrm{tr}\,\sigma = 0 \Rightarrow \sigma = s$ et $\|s\|^2 = 2\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{11}^2$

$\|s\|^2 = 2\mu^2\left[\sin^2\alpha t + (1-\cos\alpha t)^2\right] = 4\mu^2\left[1-\cos\alpha t\right] = 8\mu^2\sin^2\frac{\alpha t}{2}$

$\|s\| = 2\sqrt{2}\mu\sin\frac{\alpha t}{2} \leq C_H$

$2\sqrt{2}\mu < C_H \rightarrow (*)$ toujours valable.

$2\sqrt{2}\mu > C_H \rightarrow (*)$ valable pour $\boxed{t \leq t_{lim} = \frac{2}{\alpha}\mathrm{Arc}\sin\frac{C_H}{2\sqrt{2}\mu}}$