

Validité de la théorie des poutres
comme modèle de comportement d'une potence

GILLE Laure-Anne
DUFFY Loic
BERGER Luc

Vendredi 11 avril 2008

Table des matières

1	Introduction	3
2	Dispositif expérimental	3
3	Etude théorique	4
3.1	Hypothèses de la théorie des poutres	4
3.2	Etude théorique de la potence	5
4	Stratégie	8
5	Résultats-Conclusion	9
5.1	exploitation des résultats	9

1 Introduction

Le but de ce TP est de vérifier si les théories appliquées en RDM et MMC sont vérifiable par expérimentation. Pour cela on se base sur une expérience de photoélasticimétrie car cette technique nous permet d'observer les contraintes à l'intérieur d'une potence en plexiglas.

2 Dispositif expérimental

On étudie une potence en point d'interrogation à l'aide d'un photoélastimètre :

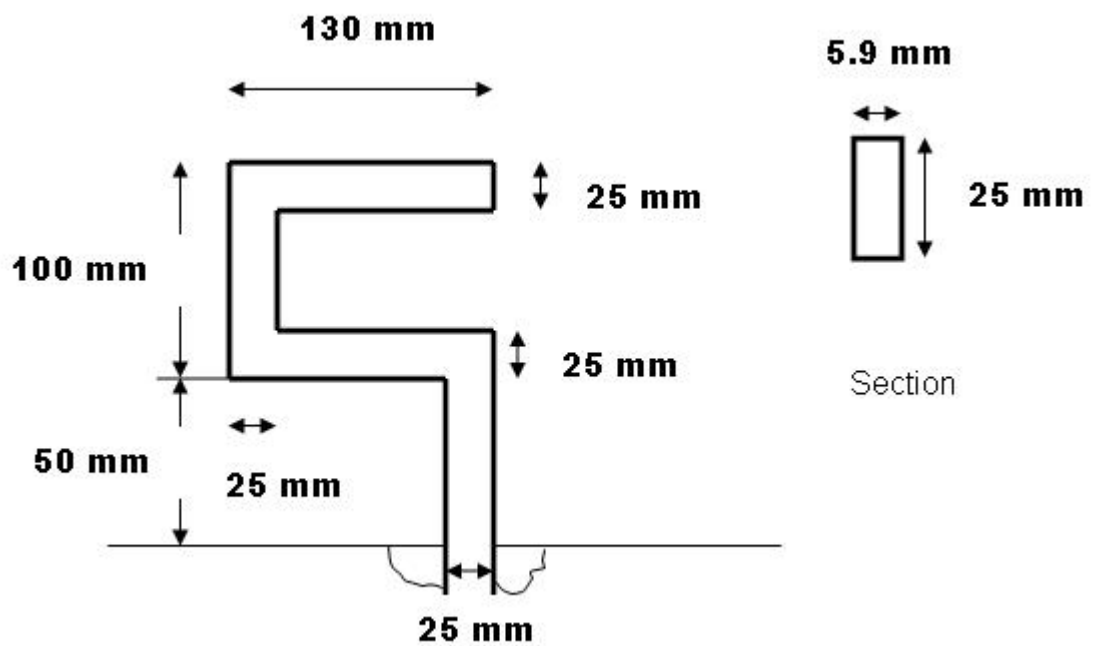


FIG. 1 – objet d'étude

La structure de l'objet étudié est en polycarbonate, de module d'Young : 2400MPa et de coefficient de Poisson : 0,33. Nous avons tracé les courbes (surtout des droites) obtenus en sortie de l'élasticimètre par transparence. L'élasticimètre était monté selon le schéma suivant :

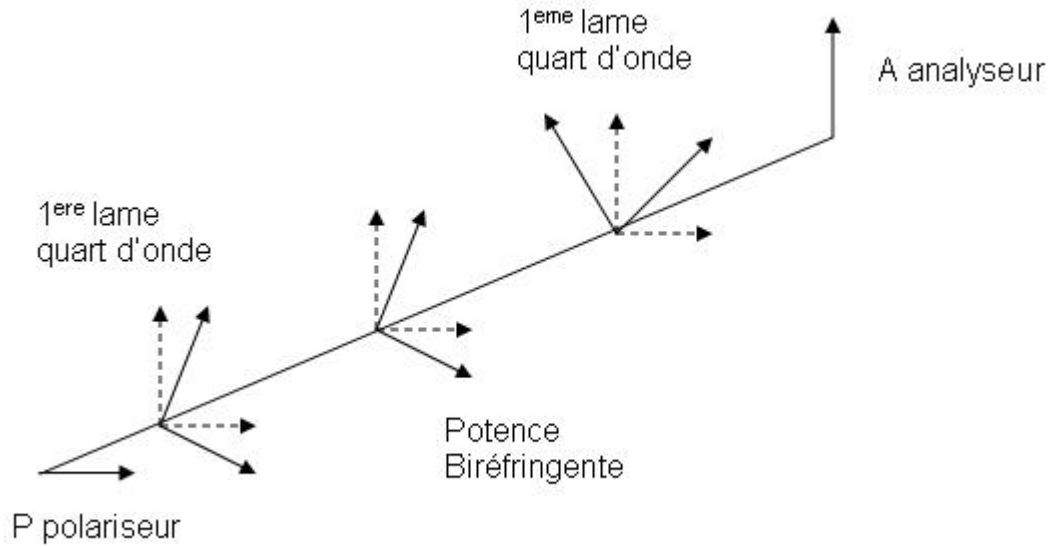


FIG. 2 – schema du dispositif optique

3 Etude théorique

3.1 Hypothèses de la théorie des poutres

- hypothèse géométrique : $\frac{1}{40} < \frac{b}{l} < \frac{1}{5}$ et $b < h < 10b$
- Rayon de courbure (il doit être suffisamment grand)
- Bernoulli $\Delta l = f(y, z)$ et $\epsilon = f(y, z) = a + by + cz$
- hypothèse des petites perturbations (petites perturbation+petits déplacements) : $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$
- Hypothèse de Saint Venant (hypothèse sur les contraintes) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_y & \tau_z \\ \tau_y & 0 & 0 \\ \tau_z & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- le materiau doit être élastique, linéaire, isotrope et verifier la loi de Hooke :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (tr(\underline{\underline{\sigma}})) \underline{\underline{\delta}}$$

Nous allons d'abord faire une étude théorique de la potence pour ensuite pouvoir comparer nos résultats théoriques et expérimentaux.

3.2 Etude théorique de la potence

Nous étudions la potence comme une structure plane en 2D. L'isostaticité de la structure est évidente due à l'encastrement au niveau du "pied" de la potence :

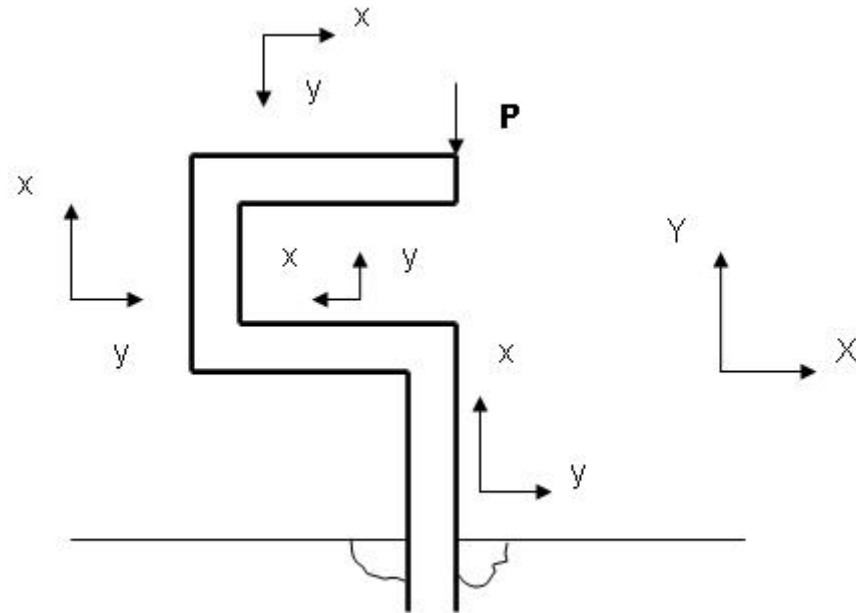


FIG. 3 – présentation des repères de travail

PFS :

$$\begin{cases} X & : H_A = 0 \\ Y & : V_A - F = 0 \\ Z & : M_A = 0 \end{cases}$$

Ces résultats sont obtenus car on considère (après mesure sur la potence réelle) que la force appliquée en haut de la potence est dans l'axe du pied de la potence et ainsi ni la force F , ni la réaction V_A n'engendrent de moment en A.

Soit :

$$\begin{cases} H_A & = 0 \\ V_A & = F \\ M_A & = 0 \end{cases}$$

Sollicitations :

$$\begin{cases} - x \in [0; l_1[\\ N & = 0 \\ V & = P \\ M_Z(x) & = Px \end{cases}$$

$$- x \in [l_1; l_1 + l_2[$$

$$\begin{cases} N = -P \\ V = 0 \\ M_Z = Pl_1 \end{cases}$$

$$- x \in [l_1 + l_2; l_1 + l_2 + l_3[$$

$$\begin{cases} N = 0 \\ V = -P \\ M_Z(x) = P(l_1 - x) \end{cases}$$

$$- x \in [l_1 + l_2 + l_3; l_1 + l_2 + l_3 + l_4[$$

$$\begin{cases} N = -P \\ V = 0 \\ M_Z(x) = 0 \end{cases}$$

On en déduit les diagrammes d'effort suivants :

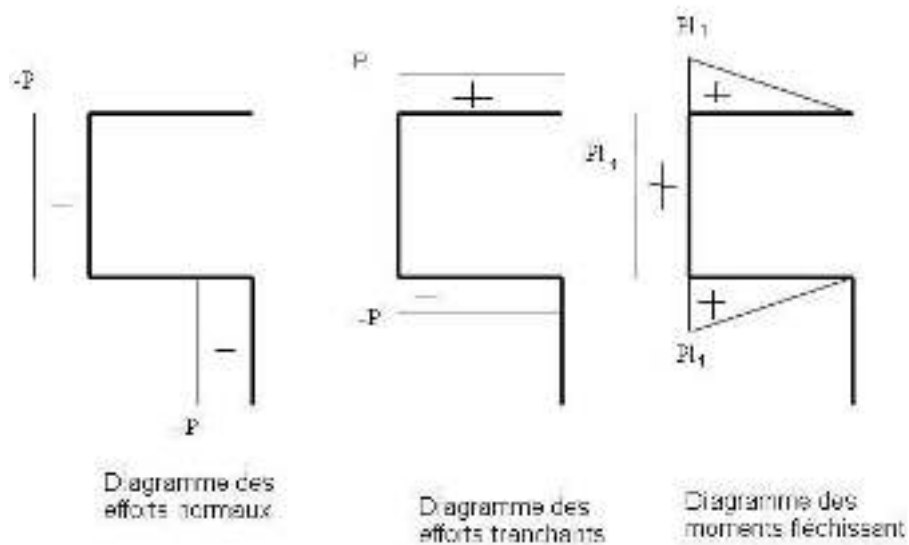


FIG. 4 – diagramme d'efforts

Etudions maintenant les contraintes dans la potence :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_y \\ \tau_y & \sigma_y \end{pmatrix}$$

or $\tau_y = \frac{GV_y}{bh^3} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right)$ et $\sigma_x = -\frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y = \frac{12Pxy}{h^3e}$

Donc en utilisant l'EIE on obtient :

$$\text{div}(\sigma) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$\forall x \in [0; l_1] \begin{cases} \frac{12Py}{h^3e} - \frac{GP}{bh^3} 2y = 0 \\ \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Ce qui nous permet de retrouver l'expression de G et de verifier que $\sigma_y = 0$ car au niveau des surfaces libres on sait que les contraintes sont nulles ce qui nous permet de trouver la constante apres integration de $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$.

On obtient donc finalement :

$$\forall x \in [0; l_1] \sigma = \begin{pmatrix} \frac{12Pxy}{bh^3} & \frac{GP}{bh^3} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \\ \frac{GP}{bh^3} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad \forall x \in [l_1; l_2] \sigma = \begin{pmatrix} -\frac{P}{bh^3} + \frac{12Pl_1y}{bh^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\forall x \in [l_2; l_3] \sigma = \begin{pmatrix} \frac{12P(l_1 - x)y}{bh^3} & -\frac{GP}{bh^3} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \\ -\frac{GP}{bh^3} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad \forall x \in [l_3; l_4] \sigma = \begin{pmatrix} -\frac{P}{bh} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4 Stratégie

Le but est de vérifier expérimentalement les résultats théoriques.

Nous souhaitons observer les points suivants :

- directions principales : $\frac{\pi}{4}$ où $-\frac{\pi}{4}$ avec les directions horizontales et orthogonales
- axe neutre
- point de concentration des contraintes σ
- valeur de σ sur chaque ligne : $\sigma_{th} + / - \sigma_{dessin}$
- homogénéité σ

Nous avons effectué deux manipulations. La première avec un faible chargement et en désactivant le système de lame quart d'onde pour observer les courbes isochlines. Ensuite nous avons effectué une seconde manipulation en augmentant le chargement et en activant le système de lames quart d'onde et on observe alors un système de courbes isochromes.

Lorsque la poutre est chargée, le déphasage Φ entre $\vec{v}(j_1)$ et $\vec{v}(j_2)$ nous donne une onde :

$$\vec{v}(\vec{y}) = -v_0 \sin(2\alpha) \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) \sin\left(\omega t - \frac{\Phi}{2}\right)$$

Pour déterminer les directions principales \vec{j}_1, \vec{j}_2 en un point de la courbe, il faut tourner (P) et (A) (faire varier α) jusqu'à l'extinction du point considéré.

Les franges noires ainsi obtenues sont les isoclines, elle se déplacent lorsque l'on tourne (P) et (A).

L'extinction se fait :

- soit pour $\alpha = \frac{k\pi}{2}$ (les directions \vec{x}, \vec{y} sont parallèles à \vec{j}_1, \vec{j}_2)
- soit pour $\Phi = 2k\pi$

et alors :

$$\sigma_I - \sigma_{II} = k \frac{\lambda}{eC}$$

Ainsi, le long d'une frange noire $\sigma_1 - \sigma_2$ reste constant, les isochromes ne dépendent que de l'état de contrainte donc restent fixes lorsque l'on tourne le polariseur.

5 Résultats-Conclusion

5.1 exploitation des résultats

- sur la potence, on observe aux alentours de l'angle 50° la formation de lignes noires complètes. On en déduit qu les axes principaux font un angle de 50° avec les axes \vec{x}, \vec{y}
- les relevés à l'angle 0° font office de témoins : dans la potence, les lignes noires ne sont pas nettes, elles ne dessinent pas d'angle à 90° avec le bord, elles confirment donc que le on est pas à l'angle où l'extinction est maximale
- pour pouvoir comparer les valeurs théoriques aux valeurs expérimentales, il faut déterminer σ_b en $y = \frac{h}{4}$ qui correspond approximativement aux franges $k=1$.

La forme générale du tenseur des contraintes est :

$$\forall y \quad \sigma_x = \begin{bmatrix} \frac{12Pxy}{bh^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs théoriques sont données par :

$$\sigma_x = \sigma_1 - \sigma_2 = k \frac{\lambda}{eC} \quad \text{avec} \quad \frac{\lambda}{C} = 7.2 \text{MPa.mm}$$

Les valeurs expérimentales sont :

$$\sigma_x = \frac{12Pxy}{bh^3}$$

k	$y(m)$	$\sigma_x(\text{theo})(Pa)$	$\sigma_x(\text{exp})(Pa)$	<i>Erreur</i>
0	0	0		
1	7×10^{-3}	10^6	0.65×10^6	35%
-1	8×10^{-3}	-0.9×10^6	-0.9×10^6	0%
2	12×10^{-3}	1.2×10^6	1×10^6	20%
-2	14×10^{-3}	-1.1×10^6	-1.35×10^6	18%

Remarque : Les erreurs de précision et des résultats sont largement imputables au manque de précision de la machine et surtout la projection peu lisible et peu nette. Enfin l'erreur de 0% est sans doute due à un arrondi et une certaine chance lors de la mesure...