2 Exercice 1

On considère le problème suivant:

$$(1) \quad \text{Max } z \stackrel{def}{=} 3x_1 - x_2 \quad \left| \begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 & \geq & 2 \\ x_1 - 3x_2 & \leq & 1 \\ x_1 - 2x_2 & \leq & 2 \\ x_i \geq 0 & & \forall i = 1, 2 \end{array} \right.$$

Résolvez ce problème par la méthode du simplexe primal. Initialisez le simplexe par la méthode de la variable artificielle. Vérifiez que la solution du problème est infinie et donnez une représentation paramétrique du rayon infini obtenu par le simplexe.

3 Exercice 2

Une imprimerie produit deux produits $P1$ et $P2$, une revue et un ouvrage périodique. La production de ces produits s'effectue sur trois machines $M1$, $M2$, $M3$. Les durées de passage de chaque produit dans chaque Pi dans chaque machine Mj sont données par le tableau suivant (dans des unités bien choisies):

Pi \ Mj	M1	M2	M3
P1	1	1	4
P2	3	1	1

$M_1 \rightarrow 27$
$M_2 \rightarrow 9$
$M_3 \rightarrow 24$

Le temps total d'utilisation admissible pour chaque machine est respectivement de 27, 9, 24. On note x_1, x_2 les quantités de produits produites. Le bénéfice est donné par

$$x_1 + 2x_2 \quad .$$

1. Calculez le plan de production optimal, i.e les quantités de produits x_1, x_2 qui maximisent le critère, en respectant les contraintes de production.

2. L'éditeur veut relever son bénéfice en augmentant le prix de sa revue de α_1, de sorte que son bénéfice passe à

$$(1 + \alpha_1)x_1 + 2x_2 \quad .$$

Quelle est l'augmentation minimale du prix de sa revue pour que son bénéfice augmente. De combien augmenta alors son bénéfice?

$\text{Max } z = x_1 + 2x_2$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \leq 27 \\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ 4x_1 + x_2 \leq 24 \end{array} \right.$$

19,5/20

Juliette Lohm

1AG7

29/04/05

Devoir de MRO 2

Exercice 1 6,5/10

$\max z = 3x_1 - x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \end{cases}$$

$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1..2$

on introduit $y_1, y_2, y_3, u_1 \geq 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - y_1 + u_1 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + y_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + y_3 = 2 \end{cases}$$

avec u_1 ce n'est plus le m problème : c'est un problème auxilliaire

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ u_1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\min w = u_1$

$+\max w' = -u_1$

$= 2x_1 + x_2 - y_1 - 2$

$\max w' = -(-2x_1 - x_2 + y_1 + 2)$

On a alors x_1, y_2, y_3, u_1.
ds (u_1, y_2, y_3) attention l'ordre compte !

	0	-3	-1	0	0	0	0
u_1	2	$\boxed{2}$	1	-1	0	0	1
y_2	1	1	-3	0	1	0	0
y_3	2	1	-2	0	0	1	0
	-2	-2	-1	1	0	0	0
		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	u_1

	3	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$
x_1	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
y_2	0	0	$-\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$
y_3	1	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$
	0	0	0	0	0	0	1

On passe à la résolut° habituelle

V

		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
	0	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
x_1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
y_2	0	0	$-\frac{7}{2}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	1	0
y_3	1	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1

$1/\frac{1}{2} = 2$

$0/\frac{1}{2} = 0 = \text{Min}$

$1/\frac{1}{2} = 2$

$\Rightarrow \boxed{T_{se} = \frac{1}{2} = \text{PIVOT}}$

		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
$\boxed{3 + \frac{3}{2} \cdot 0 = 3}$		0	-8	0	3	0
x_1	1	1	-3	0	-1	0
y_1	0	0	-7	1	2	0
y_3	1	0	$\boxed{1}$	0	-1	1

$1/-3$

on négatif

$\rightarrow T'_{ij} = \frac{T_{ij}}{T_{se}}$

$\boxed{1 : \text{~~pivot positif~~ MIN}}$

$\boxed{T_{se} = 1 = \text{Pivot}}$

		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
$3 + 8 \times 1 = 11$		0	0	0	-5	8
x_1	4	1	0	0	-4	3
y_1	7	0	0	1	-5	7
x_2	1	0	1	0	$\underbrace{-1}$	1

on a une colonne avec des termes strictement négatif. La solution du pb est donc infinie

on a $x_1 = 4$

$x_2 = 1$

~~max~~ ~~x_1~~ ~~x_2~~ $\neq 11$ non : tu viens d'écrire que $\max(3x_1 + x_2) = +\infty$

Juliette Bhm ②

Exercice 2 9/10

1 - x_1 = qté de produit 1 } $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$
x_2 = qté de produit 2

But : maximiser $(x_1 + 2x_2)$ (le bénéfice)

$\max z = x_1 + 2x_2$

Les contraintes sont :

tps de fonctionnem^t de M_1 : $x_1 + 3x_2 \leq 27$

M_2 : $x_1 + x_2 \leq 9$

M_3 : $4x_1 + x_2 \leq 24$

On introduit les variables y_1, y_2 et $y_3 \geq 0$

On a alors le pb :

$\max z = x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + y_1 = 27 \\ x_1 + x_2 + y_2 = 9 \\ 4x_1 + x_2 + y_3 = 24 \end{cases}$$

$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2$
$\in \mathbb{N}$ $\quad y_i \geq 0$

(ds (y_1, y_2, y_3)) D'où $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$b = \begin{pmatrix} 27 \\ 9 \\ 24 \end{pmatrix}$

	0	-1	-2	0	0	0
y_1	27	1	3	1	0	0
y_2	9	1	$\boxed{1}$	0	1	0
y_3	24	4	1	0	0	1
		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3

	18	1	0	0	2	0
y_1	0	-2	0	1	-3	0
x_2	9	1	1	0	1	0
y_3	15	3	0	0	-1	1

On a donc $\boxed{x_1 = 0 \quad \text{et} \quad z = 18 \\ x_2 = 9}$

2. Le tableau précédent devient:

	0	$-(1+\lambda)$	-2	0	0	0
y_1	27	1	3	1	0	0
y_2	9	1	$\boxed{1}$	0	1	0
y_3	24	4	1	0	0	1
		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3

	18	$1-\alpha_1$	0	0	2	0
y_1	0	-2	0	1	-3	0
x_2	9	1	1	0	1	0
y_3	15	$\boxed{3}$	0	0	-1	1

Pour que l'on puisse continuer il faut que

$1-\alpha_1 < 0$

donc que $\boxed{\alpha_1 > 1}$

$2 + \frac{1}{3}(1-\alpha_1)$

$18 - 5(1-\alpha_1) = 13 + 5\alpha_1$

Dans ce cas :

	$13+5\alpha_1$	0	0	0	$\frac{7-\alpha_1}{3}$	$\frac{-1+\alpha_1}{3}$
y_1	10	0	0	1	$-11/3$	$2/3$
x_2	4	0	1	0	$4/3$	$-1/3$
x_1	5	1	0	0	$-1/3$	$1/3$

On a alors plusieurs cas :

- $\frac{7-\alpha_1}{3} > 0$ et $\underbrace{\frac{\alpha_1-1}{3} > 0}$

$7-\alpha_1 > 0$ Tjs vrai car on est ds le cas où $\alpha_1 > 1$

$\alpha_1 < 7$

on arrête et le bénéfice est $13 + 5\alpha_1$

et $x_2 = 4$

$x_1 = 5$

• si $\frac{7-\alpha_1}{3} < 0$ et $\frac{\alpha_1-1}{3} > 0$

tjs vrai

$7-\alpha_1 < 0$

$\boxed{\alpha_1 > 7}$

Dans ce cas on continue :

$13+5\alpha_1$	0	0	0	$\frac{7-\alpha_1}{3}$	$\frac{\alpha_1-1}{3}$
y_1 10	0	0	1	$-1/3$	$2/3$
x_2 4	0	1	0	$\boxed{4/3}$	$-1/3$
x_1 5	1	0	0	$-1/3$	$1/3$

$\frac{11}{4}$

$\frac{8}{4}$

$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}$

$6+6\alpha_1$	0	$\frac{\alpha_1-7}{4}$	0	0	$\frac{\alpha_1+1}{4}$ $\cancel{\frac{5\alpha_1}{12}-\frac{11}{12}}$
y_1 21	0	$1/4$	1	0	$-1/4$
y_2 3	0	$3/4$	0	1	$-1/4$
x_1 8	1	$1/4$	0	0	$1/4$

$\frac{\alpha_1-1}{3}+\frac{1}{4}$

$\frac{\alpha_1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ \frac{7-\alpha_1}{3}$

$13+5\alpha_1-7+\alpha_1$

On a alors $\left(\frac{\alpha_1-7}{4}\right)$ qui est tjs strictement positif.

• $\cancel{5\alpha_1-11}$ $\frac{\alpha_1+1}{4}$ > 0 ? oui $\frac{\alpha_1+1}{4} > 0$ car $\alpha_1 > 7$.

$5\alpha_1 > 11$

$\alpha_1 > \frac{11}{5}$ ce qui est vrai car $\alpha_1 > 7$

On arrête donc la méthode.

Le bénéfice est alors $6+6\alpha_1$ ⟹ le bénéfice minimum sera alors $6+6.7 = 48$. Il augmente donc de 30 unités.

L'augmentation minimale du prix de la revue ~~est~~ $\alpha_1 \geq 7$ non si $1 \leq \alpha_1 \leq 7$ le bénéf est $13+5\alpha_1$...