Cours de Méthodes de la Recherche Opérationnelle.

Séance du 13 mai 2005: Test final.

J.P. Lebacque.

Equipe enseignante: Sophie Constans, Thomas Durlin, Emmanuel Gourdon, Jean-Patrick Lebacque, Ludovic Leclercq, Salim Mammar, Frédéric Meunier, Olivier Richard

Mai 2005

1 Déroulement du test

- Durée: 1 heure.
- Rendu: individuel.

2 Exercice 1

On considère un problème de production avec trois facteurs de production F_1, F_2, et F_3, et deux produits P_1, P_2. Les quantités produites sont x_1, x_2. Les seules contraintes qui affectent le processus de production sont des contraintes

[1]INRETS-GRETIA, 2 Avenue du Général Malleret-Joinville, 94114 ARCUEIL
email: lebacque@inrets.fr

de disponibilités des facteurs F_1, F_2, et F_3. Celles-ci ce traduisent par des contraintes inégalités, pour lesquelles on introduit des variables d'écart y_1, y_2, y_3 (qui s'interprétent comme des disponibilités résiduelles des facteurs).

On résoud le problème par l'algorithme du simplexe primal et on obtient le tableau intermédiaire suivant:

z	21	-3	0	1	0	0
x_2	7	1/3	$\boxed{1}$	1/3	0	0
y_2	2	2/3	0	$-1/3$	1	0
y_3	10	7/3	0	$-2/3$	0	1
	b	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3

$= (I)$

1. Reconstruisez à partir de ce tableau le problème de production initial. En particulier, quelles sont les contraintes s'appliquant aux quantités de produits, quel est le critère d'optimisation, et quelles sont les disponibilités totales des facteurs?

2. Appliquez l'algorithme du simplexe primal au tableau (I). Trouvez la solution optimale du problème de production.

3 Exercice 2

On considère le problème suivant:

$$(1) \qquad \text{Max}\left(z \stackrel{def}{=} 3x_1 + 6x_2\right)$$
$$\left| \begin{array}{rcl} -2x_1 + 2x_2 & \leq & 2 \\ x_1 - x_2 & \leq & 1 \\ 2x_1 + 3x_2 & \geq & 12 \\ x_i \geq 0 & & \forall i = 1,2 \end{array} \right.$$

Résolvez ce problème par la méthode du simplexe primal. Initialisez le simplexe par la méthode de la variable artificielle. Vérifiez que la solution du problème est infinie et donnez une représentation paramétrique du rayon infini obtenu par le simplexe.

1/2

Hélène Chauveau
13/05/05

1AG4

Test 2
MRO

8 + 7

→ 15

Exercice 1

1)

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
x_2	1/3	1	1/3	0	0	7
(B) y_2	2/3	0	-1/3	1	0	2
y_3	7/3	0	-2/3	0	1	10
	3	0	-1	0	0	-21

$L_1/3$

au départ on avait un tableau.

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		
y_1	1	3	1	0	0	21	L_1
(A) y_2	b	a	0	1	0		L_2
y_3	d	c	0	0	1		L_3
			0	0	0		

On suppose qu'il n'y a eu qu'une étape entre les 2. x_2 est rentré à la place de y_1 (pivot : ligne 1)
La ligne pivot L_1, en passant de A à B a juste été multiplié par un facteur, ici $\frac{1}{3}$. D'où $L_{(A)} = 3L_{(B)}$

Pour trouver coeff de la 2e ligne : $\begin{cases} -\frac{1}{3} = 0 + x \times 1 & \rightarrow x = -1/3 \\ 0 = a + x \times 3. & \rightarrow a = -3x \\ & = -3\times(-\frac{1}{3}) = 1 \end{cases}$

Pour trouver b.

$\frac{2}{3} = b + x \times 1 \to b = \frac{2}{3} - \overset{-1/3}{x} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

<u>ligne 3</u>

$$\begin{cases} \frac{7}{3} = d + y \times 1 \\ 0 = c + y \times 3 \\ -\frac{2}{3} = 0 + y \times 1 \to y = -2/3 \end{cases}$$

$c = -3y = -3 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = +2$

$d = \frac{7}{3} - y = \frac{7}{3} + \frac{2}{3} = \frac{9}{3} = 3$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		
y_1	4	3	1	0	0	21	L_1
y_2	1	1	0	1	0	9	L_2
y_3	3	2	0	0	1	24	L_3
	4	3	0	0	0	0	

Exprimer le pb initial

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		
x_2	1/3	1	1/3	0	0	7	$L_1/3$
y_2	2/3	0	$-1/3$	1	0	2	$L_2 - L_1/3$
y_3	7/3	0	$-2/3$	0	1	10	$L_3 - \frac{2}{3} L_1$
	3	0	-1	0	0	-21	

On fait de même pour trouver les coefficients bleus.

<u>Problème</u> avec le tableau (A) trouvé x_1 rentre à la place de y_3
On n'obtient pas le tableau (B).

bien

2)

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3			
x_2	1/3	1	1/3	0	0	7	x_1	L_1
y_2	2/3	0	-1/3	1	0	2	3	L_2
y_3	7/3	0	-2/3	0	1	10	$\frac{7}{1/3}$ 3,4 ; 2/3	L_3
	3	0	-1	0	0	-21		

y_2 sort, x_1 rentre

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3				
x_2	0	1	1/2	-1/2	0	6.	12	$L_1 - \frac{1}{2}L_2$	L_1
x_1	1	0	-1/2	3/2	0	3	-6	$\frac{3}{2}L_2$	L_2
y_3	0	0	+1/2	-7/2	1	3	+6	$L_3 - \frac{7}{2}L_2$	L_3
	0	0	+1/2	-9/2	0	-30.		$L_4 - \frac{9}{2}L_2$	

$0 = \frac{7}{3} - x \times \frac{2}{3}$

$x = 7/2$

$0 = 3 - y \times \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}y = 3 \rightarrow y = \frac{9}{2}$

y_3 sort, y_1 rentre

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		
x_2	0	1	0	3	-1	3	$L_1 - L_3$
x_1	1	0	0	-2	1	6	$L_2 + L_3$
y_1	0	0	1	-7	2	6	$2L_3$
	0	0	0	-1	-1	-33.	$L_4 - L_3$

On a la condition d'arrêt $-1 \leq 0$

$-z = -33$

On obtient un coût optimal de $+33$

la solution est obtenue avec $\begin{cases} x_2 = 3 \\ x_1 = y_1 = 6 \end{cases}$

Exercice ②

2/2 HC

$$\max z = 3x_1 + 6x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 12 \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

Passons à la forme standard.

$$\max z = 3x_1 + 6x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + e_1 = 2 \\ x_1 - x_2 + e_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - e_3 = 12 \end{cases}$$

On va rajouter la variable artificielle e_4 pour créer une base orthonormée avec e_1 et e_2.

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	
e_1	-2	2	1	0	0	0	2
e_2	1	-1	0	1	0	0	1
e_4	2	3	0	0	-1	1	12
c	3	6	0	0	0	0	0
ω	0	0	0	0	0	-1	
$e_4+\omega=\omega'$	~~2~~	~~3~~	~~0~~	~~0~~	~~-1~~	~~0~~	~~12~~

$2/2 = 1$ L_1

$1/-1 = -1$ L_2

$12/3 = 4$ L_3.

L_4

L_5

L_6.

On transforme en $\max \omega = -e_4$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + e_1 = 2 \\ x_1 - x_2 + e_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - e_3 + e_4 = 12. \end{cases}$$

x_2 remplace e_1.

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4			
x_2	-1	1	$1/2$	0	0	0	1	$L_1/2$.	-1
e_2	0	0	$1/2$	1	0	0	2	$L_2 + L_1/2$.	$2/0 = \infty$
e_4	5	0	$-3/2$	0	-1	1	9	$L_3 - \frac{3}{2}L_1$.	$9/5$
c'	9	0	-3	0	-1	0	-6	$L_4 - 2L_1$.	
ω_2	0	0	0	0	0	-1	-6		
$e_4+\omega_2$	5	0	$-3/2$	0	-1	0	$+6$.		

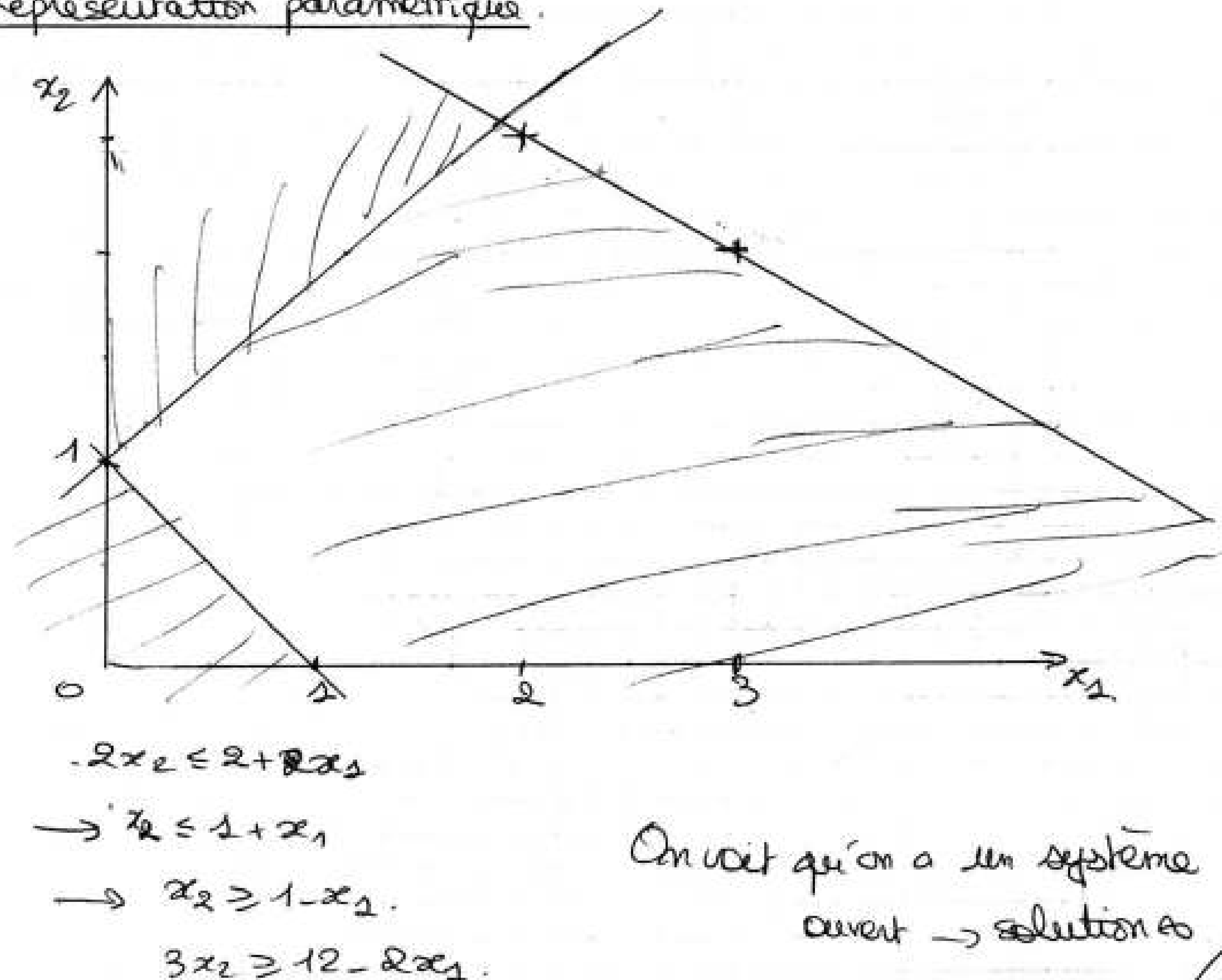
e_4 sort, x_1 rentre.

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4		
x_2	0	1	1/5	0	−1/5	1/5	14/5	$L_3/5 + L_1$
e_2	0	0	1/2	1	0	0	2	L_2
x_1	1	0	−3/10	0	−1/5	1/5	9/5	$L_3/5$
	0	0	−8/10	0	4/5	~~[illegible]~~	~~[illegible]~~ $-\frac{111}{5}$	$L_4 - \frac{9}{5}3$

~~On a le 0 qui apparaît sous un vecteur qui n'est pas dans la base → solution ∞.~~

~~$Z = 22$~~

Représentation paramétrique.



$2x_2 \leq 2 + 2x_1$

$\rightarrow x_2 \leq 1 + x_1$

$\rightarrow x_2 \geq 1 - x_1$.

$3x_2 \geq 12 - 2x_1$.

$\rightarrow x_2 \geq 4 - \frac{2}{3}x_1$

On voit qu'on a un système ouvert → solution ∞

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4

~~x_1 remplace x_1 ! impossible. solution ∞~~

On trouve $z = \frac{117}{5}$

solution ∞ car tous les rapports $\frac{b_j}{l_{e_3}}$ sont négatifs.

ok