Cours de Méthodes de la Recherche opérationnelle.

Test ~~1~~ 2. Groupes 5,6,7,8.

J.P. Lebacque.

Equipe enseignante: Nicolas Chiabaut, Jesús Gonzáles-Feliu, Emmanuel Gourdon, Megan Khoshyaran, Jean-Patrick Lebacque, Tai-Yu Ma, Salim Mammar, Olivier Richard

Mars 2013

Durée du test: 1h30. L'utilisation des documents et les notes de cours est autorisée. Les exercices sont relativement longs. Le barême en tiendra compte.

1 Exercice 1.

On considère le problème suivant:

$$
(1) \qquad \begin{array}{l}
\text{Max } z \stackrel{def}{=} 2x_1 + x_2 \\
\left|\begin{array}{rcl}
4x_1 + 3x_2 & \geq & 12 \\
x_1 - 2x_2 & \leq & 3 \\
2x_1 + x_2 & \leq & 16 \\
x_i \geq 0 & & \forall i = 1,2,3
\end{array}\right.
\end{array}
$$

1. Tracez le domaine réalisable de (1) dans le plan (x_1, x_2).

2. Faites la liste des bases réalisables et des solutions de bases réalisables.

3. Calculez une solution de base initiale par la méthode de la variable artificielle.

4. Résolvez le problème par la méthode du simplexe primal.

5. Quelle est l'inverse de la matrice de base, B^{-1}, à l'optimum.

6. Il y a une seconde solution de base optimale équivalente à celle que vous venez d'obtenir. Laquelle? Calculez-la. Quel est l'ensemble des solutions optimales?

2 Exercice 2.

On considère le réseau décrit par la figure 1. Du trafic circule dans ce réseau: chaque arc [i] porte un flot f_i, le flot est conservé en chaque nœud du réseau (somme des flots entrants = somme des flots sortants en chaque nœud). La demande totale à l'entrée du réseau est D. Le coût de déplacement sur chaque arc [i] (temps de parcours) est égal à c_i. Le tableau des c_i est donné ci-après:

Arcs [i]	1	2	3	4	5	6	7
Coûts c_i	3	7	2	6	4	9	1

On cherche à affecter les usagers sur le réseau de manière à minimiser le coût total de traversée du réseau:

$$\mathcal{C} \stackrel{def}{=} \sum_{i=1,5} c_i f_i$$

On formule le problème comme la minimisation de $\mathcal{C}$ contraint par les contraintes de conservation de flot aux nœuds.

1. Montrez que la contrainte associée à l'un des nœuds est redondante. Vous ne considérerez donc dans la suite que les contraintes associées aux nœuds (a), (b), (c), (d).

2. Ecrivez le tableau du simplexe pour le problème dans la base (f_4, f_5, f_6, f_7). Résolvez. Soit B^* la base optimale. Donnez une interprétation de la solution obtenue dans le réseau.

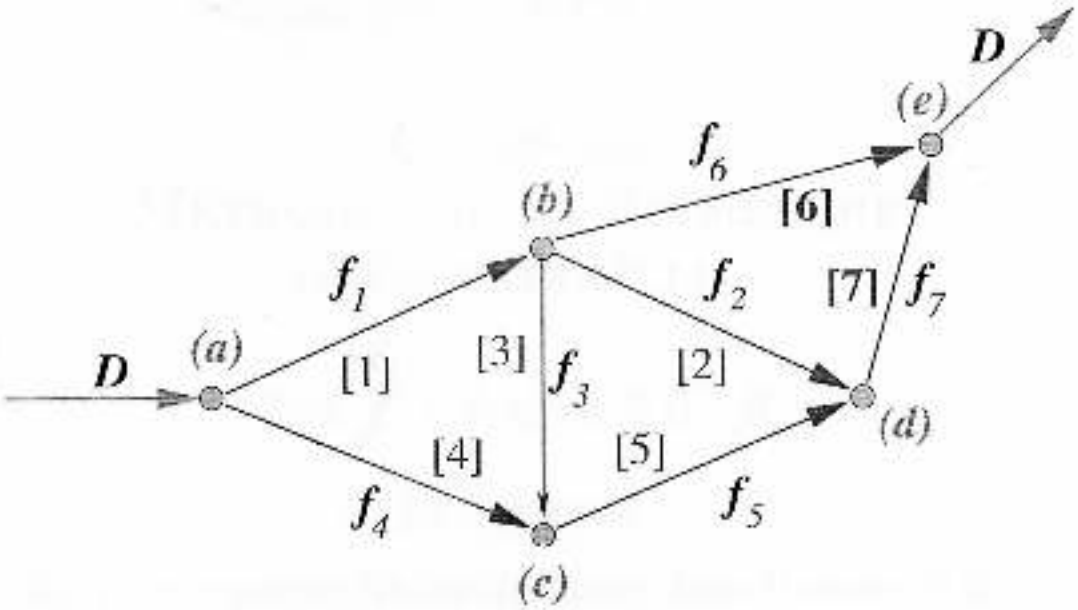

Figure 1: Le réseau.

3. On impose un péage t sur l'arc [3] dont le coût passe à $2 + t$. Calculez les nouveaux coûts réduits dans la base optimale B^*. Montrez qu'il existe a tel que la solution de base B^* reste-t-elle optimale pour les valeurs de $t \in [0, a]$?

4. Quelle est la solution optimale pour $t > a$. Interprétez la solution géométriquement. Montrez qu'il existe deux bases optimales équivalentes pour $t > a$.