TP2180504

Exercice 1 La distance entre deux villes A et B est prise pour unité. A est l'origine et B a pour abscisse 1. X est une variable aléatoire à valeurs dans $[0,1]$ représentant l'abscisse du point de panne d'un camion circulant entre A et B. a désigne l'abscisse d'une station de réparation implantée sur le trajet. On note f la densité de X, supposée continue sur le segment $[0,1]$, F la fonction de répartition de X et $u(a) = \mathbb{E}|X-a|$ la distance moyenne entre le point de panne et la station de réparation. L'objectif est d'établir une condition nécessaire et suffisante pour que $u(a)$ soit minimale.

1. En utilisant le théorème du transfert et en séparant les intégrales sur $[0,a]$ et $[a,1]$, calculer la dérivée de u sur $[0,1]$. En déduire que $u(a)$ est minimale si et seulement si $F(a) = 1/2$.
2. Applications.
   (a) On suppose que X est uniformément répartie sur $[0,1]$. Quelle doit être la valeur de a ?
   (b) On suppose que, pour $x \in [0,1]$, $f(x) = (\lambda+1)x^\lambda$, $\lambda > 0$, et que $a = 3/4$.
   Quelle doit être la valeur de λ ?

Exercice 2 Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de fonction de répartition $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,1]$ définie par $F(x,y) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y)(1 - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+x+y})$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_X de X puis sa densité f_X. Calculer $\mathbb{E}(\sqrt{X})$.
2. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y puis sa densité f_Y.
3. Montrer que la densité f du couple (X,Y) est $f(x,y) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\frac{2}{(1+x+y)^3}$.
   X et Y sont elles-indépendantes ?
4. Calculer la densité f_S de $S = X + Y$.

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire, Y une variable aléatoire indépendante de X, telle que $P\{Y=1\} = P\{Y=-1\} = 1/2$ et $Z = YX$.

1. On suppose que X est d'ordre 2. Montrer que $cov(X,Z) = 0$.
   Dans la suite, on suppose que X admet la densité f.
2. Soit $z \in \mathbb{R}$. Montrer que $\{Z \le z\} = \{Y = 1, X \le z\} \cup \{Y = -1, X \ge -z\}$.
   Exprimer en fonction de f la fonction de répartition F_Z de Z puis sa densité f_Z.
3. On suppose que $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Calculer f_Z. Montrer que X et Z ne sont pas indépendantes.

Exercice 1

1. $u(a) = \mathbb{E}|X-a| = \int_0^1 |x-a| f(x)\,dx = \int_0^a (a-x) f(x)\,dx + \int_a^1 (x-a) f(x)\,dx$

$= \left[(a-x)F(x)\right]_0^a + \int_0^a F(x)\,dx + \left[(x-a)F(x)\right]_a^1 - \int_a^1 F(x)\,dx$

$= \int_0^a F(x)\,dx - \int_a^1 F(x)\,dx + 1-a$

$u'(a) = 2F(a) - 1$. Donc $u(a)$ est minimale si et seulement si $F(a) = \frac{1}{2}$.

2. (a) $F(x) = x\,\mathbb{1}_{[0\,1]}(x)$. Donc $F(a) = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

(b) $f(x) = (\lambda+1)x^\lambda$, $\lambda > 0$ et $a = \frac{3}{4}$. Alors $F(x) = x^{\lambda+1}\,\mathbb{1}_{[0\,1]}(x)$

et $F(a) = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{\lambda+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\lambda+1)\ln\frac{3}{4} = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{\ln 4 - \ln 3} - 1$

ou $\lambda = \frac{\ln 3 - \ln 2}{2\ln 2 - \ln 3}$

Exercice 2

1. $F_X(x) = \lim_{y\to+\infty} F(x,y) = \frac{x}{1+x}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$, $f_X(x) = \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$

$\mathbb{E}(\sqrt{X}) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{2y^2}{(1+y^2)^2}\,dy = \int_0^{\pi/2} \frac{2\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)}\,d\theta = \int_0^{\pi/2} 2\sin^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}$

2. $F_Y(y) = \lim_{x\to+\infty} F(x,y) = \frac{y}{1+y}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)$, $f_Y(y) = \frac{1}{(1+y)^2}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)$

3. F est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^2$ donc $f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{2}{(1+x+y)^3}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)$

$f(x,y) \neq f_X(x)\,f_Y(y)$ donc X et Y sont dépendantes

4. Soit $s \geq 0$ $f_S(s) = \int_{\mathbb{R}} f(x, s-x)\,dx = \int_0^s \frac{2}{(1+s)^3}\,dx = \frac{2s}{(1+s)^3}$ et

$f_S(s) = \frac{2s}{(1+s)^3}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(s)$

Exercice 3

1. $\mathbb{E}Y = 0$, $\mathbb{E}Z = \mathbb{E}(YX) = \mathbb{E}Y\,\mathbb{E}X = 0$, $\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(YX^2) = \mathbb{E}Y\,\mathbb{E}X^2 = 0$

Donc $\mathrm{Cov}(X,Z) = 0$

2. $\{Z \leq z\} = (\{Y=1\} \sqcup \{Y=-1\}) \cap \{Z \leq z\} = \{Y=1, Z \leq z\} \sqcup \{Y=-1, Z \leq z\}$

$= \{Y=1, X \leq z\} \sqcup \{Y=-1, -X \leq z\} = \{Y=1, X \leq z\} \sqcup \{Y=-1, X \geq -z\}$

$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{z} f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-z}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right)dx$

$f_Z(z) = \frac{1}{2}\left(f(z) + f(-z)\right)$

3. $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ donc $f_Z(z) = \frac{1}{2}e^{-|z|}$

Si X et Z étaient indépendantes, X^2 et Z^2 seraient indépendantes ce qui n'est pas le cas puisque $Z^2 = X^2$ et que cette v.a n'est pas constante.