TP2020605

7 **Exercice 1** Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi de densité f définie par $f(x) = \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)\dfrac{3}{x^4}$.

On pose $U = XY$, $V = \dfrac{Y}{X}$ et, pour $k \in \mathbb{Z}$, $m_k = \mathbb{E}X^k$.

1. Pour quelles valeurs de k a-t-on $m_k < +\infty$? Préciser alors la valeur de m_k.
2. *Sans faire de calcul intégral,* déduire de ce qui précède la valeur de $cov(U, V)$. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

8 **Exercice 2**

1. Soit T une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(3)$. Calculer la densité et la moyenne de la variable aléatoire $Y = e^{-T}$.
2. A la sortie d'un tunnel, une voiture laisse une quantité de fumée X qui est une variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 2x\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. Le système de ventilation fait que cette quantité est $Z = Xe^{-T}$ lorsqu'une autre voiture entre dans le tunnel après un temps T qui est une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(3)$, indépendante de X.
   (a) Calculer la densité de Z .
   (b) Calculer la moyenne et la variance de Z.

5 **Exercice 3** On note L le niveau de fréquentation d'un magasin et X son chiffre d'affaires quotidien. La variable aléatoire L est telle que $P\{L = 1\} = 1/3$ et $P\{L = 2\} = 2/3$. Sachant que $L = i$ $(i = 1, 2)$, la loi de X est normale $\mathcal{N}(m_i, \sigma^2)$ de fonction de répartition F_i et de densité f_i, avec $m_1 \neq m_2$. On note F la fonction de répartition de X et f sa densité.

1. Calculer F en fonction de F_1 et F_2 puis f en fonction de f_1 et f_2. 99 $F = \frac{1}{3}F_1 + \frac{2}{3}F_2$
2. Calculer la moyenne et la variance de X en fonction des paramètres m_i et σ.
3. Montrer que la loi de X ne peut être normale.

TP2020605

Exercice 1

$f(x) = \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)\dfrac{3}{x^4}$; $U = XY$, $V = \dfrac{Y}{X}$ et $m_k = \mathbb{E}X^k$ $k \in \mathbb{Z}$

1. $m_k = \displaystyle\int_1^{\infty} 3x^{k-4}\,dx = \dfrac{3}{3-k}$ si $k \leqslant 2$ et $m_k = +\infty$ sinon

2. $\mathbb{E}U = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y = m_1^2 = \dfrac{9}{4}$

$\mathbb{E}V = \mathbb{E}\left(Y.\dfrac{1}{X}\right) = \mathbb{E}Y\,\mathbb{E}X^{-1} = m_1 \times m_{-1} = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{8}$

$\mathbb{E}UV = \mathbb{E}Y^2 = m_2 = 3$

$Cov(U,V) = 3 - \dfrac{9}{4}\dfrac{9}{8} = \dfrac{15}{32}$

Exercice 2

1. $\mathbb{E}h(Y) = \mathbb{E}h(e^{-T}) = \displaystyle\int_0^{\infty} h(e^{-t})\,3e^{-3t}\,dt \overset{y=e^{-t}}{=} \int_0^1 h(y)\,3y^2\,dy$

donc $f_Y(y) = 3y^2\mathbb{1}_{[0\,1]}(y)$ et $\mathbb{E}Y = \displaystyle\int_0^1 3y^3\,dy = \dfrac{3}{4}$

2. $Z(\Omega) = [0\,1]$ et, si $z \in [0\,1]$,

$F_Z(z) = P\{XY \leqslant z\} = \displaystyle\int_0^z \left[\int_0^1 2x \cdot 3y^2\,dy\right]dx + \int_z^1 \left[\int_0^{\frac{z}{x}} 2x\,3y^2\,dy\right]dx$

$= \displaystyle\int_0^z 2x\,dx + \int_z^1 2x\frac{z^3}{x^3}\,dx = z^2 + z^3\left[-\frac{2}{x}\right]_z^1 = z^2 - 2z^3 + 2z^2 = z^2(3-2z)$

donc $f_Z(z) = 6z(1-z)\,\mathbb{1}_{[0\,1]}(z)$

$\mathbb{E}Z = \displaystyle\int_0^1 6z^2(1-z)\,dz = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$, $\mathbb{E}Z^2 = \displaystyle\int_0^1 6z^3(1-z)\,dz = \frac{3}{2} - \frac{6}{5} = \frac{3}{10}$

donc $V(Z) = \dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{20}$

Exercice 3

1. $F(x) = P\{X \leqslant x\} = P\{L=1\}P(\{X\leqslant x\}/\{L=1\}) + P\{L=2\}P(\{X\leqslant x\}/\{L=2\})$

$= \dfrac{1}{3}F_1(x) + \dfrac{2}{3}F_2(x)$

$f(x) = \dfrac{1}{3}f_1(x) + \dfrac{2}{3}f_2(x)$

2. $\mathbb{E}X = \dfrac{m_1 + 2m_2}{3}$, $\mathbb{E}X^2 = \dfrac{1}{3}(\sigma^2 + m_1^2) + \dfrac{2}{3}(\sigma^2 + m_2^2) = \sigma^2 + \dfrac{m_1^2 + 2m_2^2}{3}$

$V(X) = \sigma^2 + \dfrac{m_1^2 + 2m_2^2}{3} - \dfrac{(m_1 + 2m_2)^2}{9} = \sigma^2 + \dfrac{2m_1^2 + 2m_2^2 - 4m_1m_2}{9} = \sigma^2 + \dfrac{2}{9}(m_1 - m_2)^2$

3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\,3}\left(e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_1}{\sigma}\right)^2} + 2e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_2}{\sigma}\right)^2}\right) \neq \dfrac{1}{\sqrt{2\pi V(X)}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mathbb{E}X)^2}{V(X)}}$ puisque $m_1 \neq m_2$

donc X ne peut être normale