TP2180506
Durée : 1 h 20 mn

3,5 **Exercice 1** Soit X une variable aléatoire discrète dont la loi est définie par $P\{X=-1\} = P\{X=0\} = P\{X=1\} = 1/3$. On pose $Y = X^2$.

Montrer que $cov(X,Y) = 0$ mais que X et Y ne sont pas indépendantes.

3,5 **Exercice 2** Une cimenterie possède deux sites de production. La quantité de ciment produite par jour et exprimée en tonnes est une variable aléatoire $X \sim \mathcal{N}(30, 9)$ pour le premier site et $Y \sim \mathcal{N}(50, 16)$ pour le second, X et Y étant indépendantes.

1. Déterminer la loi de la production totale S.
2. Quelle est la probabilité que la production d'un jour soit suffisante pour satisfaire une commande de 85 tonnes?

8 **Exercice 3** Une étude préalable à un chantier d'autoroute nécessite le relevé de la teneur en argile X et en limon Y du sol d'une zone donnée. On considère que le couple (X,Y) est uniformément réparti dans le triangle $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$. La densité f du couple est donc définie par $f(x,y) = 2\ \mathbf{1}_\Delta(x,y)$

1. Justifier rapidement que X et Y admettent la même densité. Calculer la densité commune, la fonction de répartition commune et la moyenne commune à ces deux variables.
2. Avec quelle probabilité, la teneur en argile peut-elle être inférieure à $0,4$?
3. Quelle est la probabilité que la somme des teneurs en argile et en limon soit inférieure à $0,6$?
4. Quelle est la valeur moyenne de la teneur en autres constituants que les deux considérés ?
5. Calculer $cov(X,Y)$. En déduire que ces deux variables ne sont pas indépendantes.

5 **Exercice 4** Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{U}[0,1]$ et $Z = \ln(X/Y)$. Montrer que la densité f_Z de Z est définie par $f_Z(z) = \exp(-|z|)/2$. Calculer la moyenne et la variance de Z.

$\boxed{TP2180506}$

Exercice 1

$\mathbb{E}X = \frac{1}{3}(-1+0+1) = 0$; $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}X^2 = \frac{1}{3}(1+0+1) = \frac{2}{3}$; $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X^3 = \frac{1}{3}(-1+0+1) = 0 \Rightarrow \mathrm{cov}(X,Y) =$

On a $P\{X=1\} = \frac{1}{3}$, $P\{Y=0\} = P\{X=0\} = \frac{1}{3}$ et $P\{X=1, Y=0\} = 0 \neq P\{X=1\}\,P\{Y=0\}$

Exercice 2

1. $S \sim \mathcal{N}(80,25)$

2. $P\{S \geq 85\} = P\{\frac{S-80}{5} \geq \frac{85-80}{5}\} = P\{U \geq 1\} = 1 - \phi(1) \simeq 0,16$

Exercice 3

1. $f_X(x) = 2(1-x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$; $f_Y = f_X$ (symétrie par rapport à la droite $y = x$)

$\mathbb{E}X = \int_0^1 2x(1-x)\,dx = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, $\mathbb{E}X^2 = \int_0^1 2x^2(1-x)\,dx = 2(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{6}$, $V(X) = \frac{1}{18}$

?. $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x(2-x) & \text{si } x \in [0\ 1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

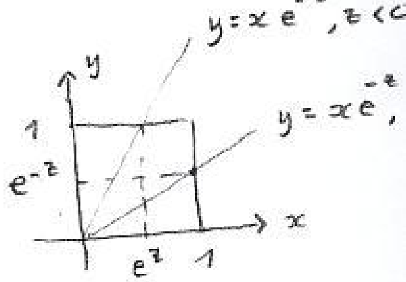
2. $P\{X \leq 0,6\} = F_X(0,6) = 0,6(2-0,6) = 0,84$

3. $P\{X+Y \leq 0,6\} = P\{(X,Y) \in B\}$ où $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y \leq 0,6\}$ donc $P\{X+Y \leq 0,6\} = 0,36$

4. C'est $\mathbb{E}(1-X-Y) = 1 - \mathbb{E}X - \mathbb{E}Y = \frac{1}{3}$

5. $\mathbb{E}XY = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} 2xy\,dy\right] dx = \int_0^1 x(1-x)^2\,dx = \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$

et $\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{1}{12} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{36} \neq 0$



Exercice 4

$Z(\Omega) = \mathbb{R}$. Si $z \in \mathbb{Z}$, $\{Z \leq z\} = \{\ln \frac{X}{Y} \leq z\} = \{\frac{X}{Y} \leq e^z\}$

Donc $F_Z(z) = P\{Y \geq X e^{-z}\}$ et l'on a

si $z \geq 0$ $F_Z(z) = 1 - \frac{1}{2}e^{-z}$, si $z \leq 0$ $F_Z(z) = \frac{1}{2}e^{z}$

Donc $f_Z(z) = \frac{1}{2}e^{-z}$ si $z \geq 0$ et $f_Z(z) = \frac{1}{2}e^{z}$ si $z \leq 0$ donc $f_Z(z) = \frac{1}{2}e^{-|z|}$

$\mathbb{E}Z = 0$, $\mathbb{E}Z^2 = \int_{\mathbb{R}} z^2 \frac{1}{2} e^{-|z|}\,dz = \int_0^{\infty} z^2 e^{-z}\,dz = \Gamma(3) = 2$ $\quad V(Z) = 2$