**TP2100507**

6 **Exercice 1** L'unité de temps étant $10\,mn$, on note $T$ la variable aléatoire égale à la durée du temps de service à un guichet.

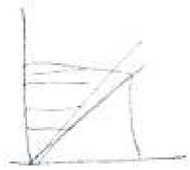
1. On suppose dans cette question que la moyenne de $T$ est 2 et que $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$.
   (a) Calculer $\lambda$.
   (b) Quelle est la probabilité que le service dure plus de $30\,mn$?
   (c) Sachant que le service dure depuis plus de $20\,mn$, quelle est la probabilité qu'il dure encore plus de $10\,mn$?
2. On suppose dans cette question que la moyenne de $T$ est toujours 2, mais que $T$ admet la densité $f$ définie par $f(t) = \dfrac{2\alpha}{(1+\alpha t)^3}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ , $\alpha > 0$.
   (a) Calculer $\alpha$.
   (b) Quelle est la probabilité que le service dure plus de $30\,mn$?
   (c) Sachant que le service dure depuis plus de $20\,mn$, quelle est la probabilité qu'il dure encore plus de $10\,mn$?

6 **Exercice 2** Le sol horizontal est identifié à l'axe des abscisses et la verticale est représentée par l'axe des ordonnées. Des billes, assimilées à des points matériels, sont lancées dans le plan $xOy$ depuis l'origine et selon un angle aléatoire $A$ avec l'horizontale. A l'aide de la loi fondamentale de la dynamique, on peut considérer que la trajectoire d'une bille a pour équations $X(t) = t\cos A$, $Y(t) = -gt^2/2 + t\sin A$. On note $T$ la variable aléatoire égale au temps nécessaire pour que la bille atteigne le sol et $D$ l'abscisse de la bille à cet instant. On suppose que $A$ suit la loi uniforme sur $[\pi/6, \pi/3]$

1. Exprimer $T$ et $D$ en fonction de $A$ et calculer leurs moyennes.
2. Soit $t > 0$ et $c(t) = cov(X(t), Y(t))$.
   Montrer que $c(t) = at^2$ où $a$ est un coefficient négatif que l'on calculera.

8 **Exercice 3** Soit $(X, Y)$ un couple de v.a. de densité $f$ définie par $f(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{xy}}\mathbf{1}_D(x,y)$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq y \leq 1\}$.

1. Déterminer les densités $f_X$ de $X$ et $f_Y$ de $Y$.
2. Calculer la moyenne et la variance de chacune des variables $X$ et $Y$.
3. Soit $T = \sqrt{XY}$. Calculer la densité $f_T$ de $T$.
4. Calculer $cov(X, Y)$. En déduire que $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes.



$y = \dfrac{t^2}{u} \leq 1$

$x \leq y \leq 1$

$u \leq \dfrac{t^2}{u} \leq 1$

$\dfrac{1}{u^2}$

TP2100507

## Exercice 1

1. (a) $\mathbb{E}T = \frac{1}{\lambda} = 2$ donc $\lambda = \frac{1}{2}$

   (b) $P\{T>3\} = e^{-3\lambda} = e^{-3/2} \approx 0{,}223$

   (c) $P(\{T>3\}/\{T>2\}) = \frac{P\{T>3\}}{P\{T>2\}} = \frac{e^{-3\lambda}}{e^{-2\lambda}} = e^{-\lambda} = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}607$

2. $f(t) = \frac{2\alpha}{(1+\alpha t)^3} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ $\alpha > 0$. On vérifie que $\int_0^\infty \frac{2\alpha}{(1+\alpha t)^3} dt = \left[\frac{-1}{(1+\alpha t)^2}\right]_0^\infty = 1$

   (a) $\mathbb{E}T = \int_0^\infty \frac{2\alpha t}{(1+\alpha t)^3} dt = \left[-t\frac{1}{(1+\alpha t)^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{dt}{(1+\alpha t)^2} = \left[-\frac{1}{\alpha}\frac{1}{(1+\alpha t)}\right]_0^\infty = \frac{1}{\alpha} = 2$ donc $\alpha = \frac{1}{2}$

   Alors, $\forall t \geq 0$, $f(t) = \frac{1}{(1+\frac{t}{2})^3}$ et $F(t) = \int_0^t \frac{dx}{(1+\frac{x}{2})^3} = \left[\frac{-1}{(1+\frac{x}{2})^2}\right]_0^t = 1 - \frac{4}{(2+x)^2}$

   (b) $P\{T>3\} = \frac{4}{25} = 0{,}16$

   (c) $P(\{T>3\}/\{T>2\}) = \frac{4/25}{4/16} = \frac{16}{25} = 0{,}64$

## Exercice 2

1. $t_0 > 0$ et $Y(t_0) = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{2}{g}\sin A$. Donc $T = \frac{2}{g}\sin A$ et $D = \frac{2}{g}\sin A\cos A = \frac{1}{g}\sin(2A)$

   Avec $f_A(x) = \frac{6}{\pi}\mathbb{1}_{[\frac{\pi}{6}\,\frac{\pi}{3}]}(x)$ on a :

   $$\mathbb{E}T = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{2}{g}\sin x \cdot \frac{6}{\pi} dx = \frac{12}{\pi g}\left[-\cos x\right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{12}{\pi g}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{6}{\pi g}(\sqrt{3}-1)$$

   $$\mathbb{E}D = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{g}\sin 2x \cdot \frac{6}{\pi} dx = \frac{3}{\pi g}\left[-\cos 2x\right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{3}{\pi g}$$

2. $$\mathbb{E}X(t) = \int_{\pi/6}^{\pi/3} t\cos x \cdot \frac{6}{\pi} dx = \frac{6t}{\pi}\left[\sin x\right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{6t}{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3t}{\pi}(\sqrt{3}-1)$$

   $$\mathbb{E}Y(t) = -\frac{gt^2}{2} + t\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin x \frac{6}{\pi} dx = -\frac{gt^2}{2} + \frac{6t}{\pi}\left[-\cos x\right]_{\pi/6}^{\pi/3} = -\frac{gt^2}{2} + \frac{3t}{\pi}(\sqrt{3}-1)$$

   $X(t)Y(t) = -\frac{gt^3}{2}\cos A + t^2\sin A\cos A = -\frac{gt^3}{2}\cos A + \frac{t^2}{2}\sin 2A$ donc

   $$\mathbb{E}X(t)Y(t) = -\frac{gt^3}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\cos x\frac{6}{\pi}dx + \frac{t^2}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\sin 2x\frac{6}{\pi}dx = -\frac{3gt^3}{2\pi}(\sqrt{3}-1) + \frac{3t^2}{2\pi}$$

   $$c(t) = \operatorname{cov}(X(t), Y(t)) = -\frac{3gt^3}{2\pi}(\sqrt{3}-1) + \frac{3t^2}{2\pi} + \frac{3gt^3}{2\pi}(\sqrt{3}-1) - \frac{9t^2}{\pi^2}(\sqrt{3}-1)^2$$

   Donc $c(t) = at^2$ avec $a = \frac{3}{2\pi} - \frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}-1)^2 \simeq -0{,}011$

Exercice 3

$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0<x\leq y\leq 1\}$ , $f(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{xy}}\mathbb{1}_D(x,y)$

1. Soit $x\in ]0\ 1]$. $f_X(x)=\int_x^1 \frac{1}{2\sqrt{xy}}\,dy=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[\sqrt{y}\right]_x^1=\frac{1}{\sqrt{x}}-1$ .

$f_X(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\mathbb{1}_{]0\,1[}(x)$

Soit $y\in]0\,1[$ $f_Y(y)=\int_0^y \frac{1}{2\sqrt{xy}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{y}}\left[\sqrt{x}\right]_0^y=1$ et $f_Y(y)=\mathbb{1}_{]0\,1[}(y)$

. Soit $n\in\mathbb{N}^*$

$\mathbb{E}X^n=\int_0^1 x^n\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)dx=\int_0^1\left(x^{n-\frac12}-x^n\right)dx=\left[\frac{x^{n+\frac12}}{n+\frac12}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{2}{2n+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(n+1)(2n+1)}$

$\mathbb{E}X=\frac{1}{6}$ , $\mathbb{E}X^2=\frac{1}{15}$ et $V(X)=\frac{1}{15}-\frac{1}{36}=\frac{7}{180}$

$\mathbb{E}Y^n=\frac{1}{n+1}$ donc $\mathbb{E}Y=\frac12$ , $\mathbb{E}Y^2=\frac13$ et $V(Y)=\frac{1}{12}$.

$T(\Omega)=]0\ 1[$ . Soit $t\in]0\,1[$ . A Pos

$\{T\leq t\}=\{XY\leq t^2\}=\{X\leq\frac{t^2}{Y}\}$ et

$F_T(t)=P\{T\leq t\}=\int_0^1\left[\int_0^{\min(y,\frac{t^2}{y})}\frac{1}{2\sqrt{xy}}\,dx\right]dy=\int_0^t\left[\int_0^y\frac{1}{2\sqrt{xy}}\,dx\right]dy+\int_t^1\left[\int_0^{\frac{t^2}{y}}\frac{1}{2\sqrt{xy}}\,dx\right]dy$

$=\int_0^t\frac{1}{\sqrt{y}}\left[\sqrt{x}\right]_0^y dy+\int_t^1\frac{1}{\sqrt{y}}\left[\sqrt{x}\right]_0^{\frac{t^2}{y}}dy=t+\int_t^1\frac{t}{y}\,dy=t(1-\ln t)$

donc $f_T(t)=-\ln t\ \mathbb{1}_{]0\,1[}(t)$

$\mathbb{E}(XY)=\int_0^1\left[\int_0^y\frac{\sqrt{xy}}{2}\,dx\right]dy=\int_0^1\sqrt{y}\left[\frac13 x\sqrt{x}\right]_0^y dy=\int_0^1\frac13 y^2\,dy=\frac19$

Donc $\mathrm{cov}(X,Y)=\frac19-\frac16\times\frac12=\frac{1}{36}\neq 0$.