ENTPE mars 2010

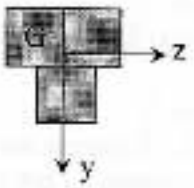
Résistance des matériaux – Test 1 ***sujet***

Partie I

1. Section massive

Pour réaliser un ouvrage de franchissement (échelle réduite), vous disposez de baguettes de sections carrées :

Vous décidez (malgré l'interdiction) de coller les baguettes entre elles comme ci contre :

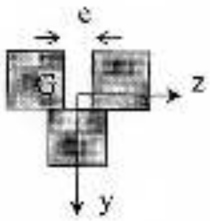


Déterminer la position du centre de gravité

Calculer les inerties principales I_z et I_y de la section

(Sauf erreur de ma part on remarque que $I_z > I_y$)

Afin d'augmenter l'inertie I_y, vous décider de séparer légèrement les deux baguettes supérieures comme ci contre :



Déterminer l'espacement e en fonction de a afin que $I_z = I_y$

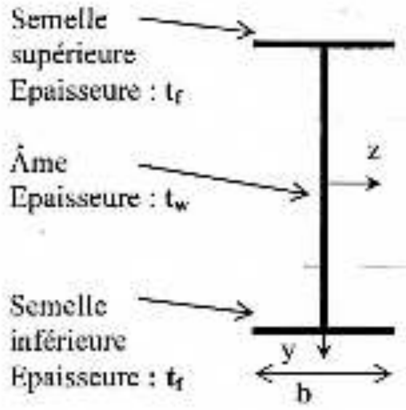
Quels sont alors les différentes distances entre les centres de gravité des différents carrés ?

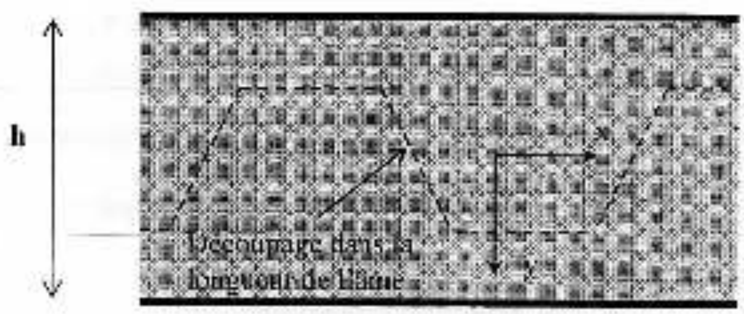
Ce résultat était-il prévisible ?

2. Section mince

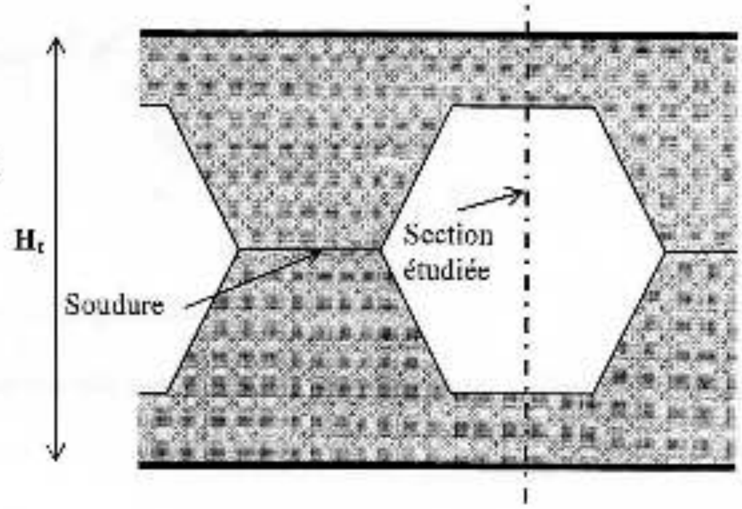
Poutrelles alvéolaires à ouvertures hexagonales.

On réalise une poutrelle alvéolaire à partir d'une poutrelle de type section en I





On sépare les deux demi poutrelles
On les décale.
On les ressoude entre elles



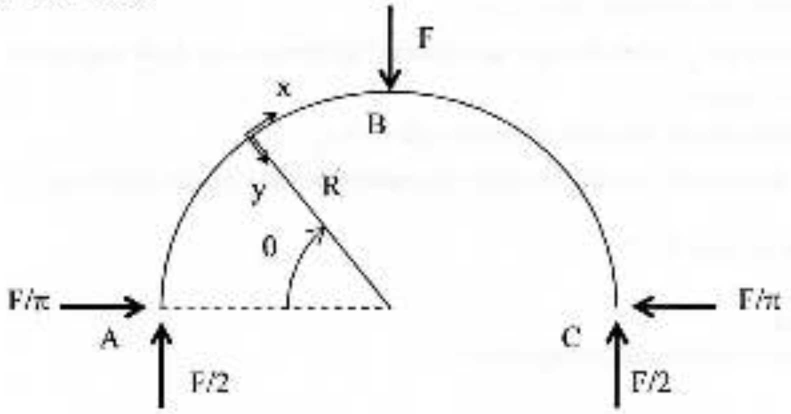
Le découpage est tel que $\mathbf{H_t = 1,5.h}$
On étudie la section droite au niveau de l'alvéole.
Faites un schéma coté de cette section droite.
Montrer que la section de la poutrelle alvéolaire est plus petite.
Montrer que l'inertie I_z de la poutrelle alvéolaire est plus grande.
Remarque : ces études comparatives pourront porter sur les semelles puis sur l'âme avant de conclure.

Application numérique poutrelle de base **IPE200**:
$h = 200$ mm $b = 100$ mm $t_w = 5,6$ mm $t_f = 8,5$ mm

Partie II

1. Expressions des sollicitations

On considère l'arc circulaire bi articulé en A et C suivant :
Les actions de liaison sont données.



La structure est-elle hyperstatique ?
Si oui indiquer son degré d'hyperstaticité.

Une section droite de l'arc peut être repérée par l'angle θ

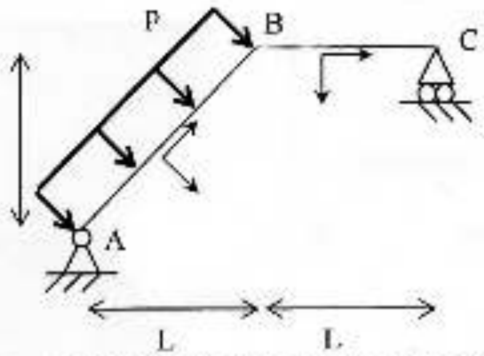
Donner l'expression de $N(\theta)$, $V(\theta)$ et $M(\theta)$ pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Déterminer le moment fléchissant maximum en valeur absolue

Que devient cette valeur si on place en A un appui simple ?

2. Tracés des sollicitations

Tracer les courbes de $N(x)$, $V(x)$ et $M(x)$



Remarque : on vérifiera que les composantes verticales des actions de liaison sont égales.

HICAUBÉ Hélène
Groupe 6 TPEX

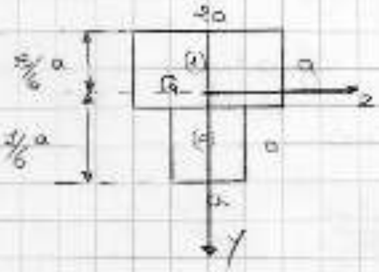
Mardi 16 Mars 2010

4,5/0,5/ 2 | 2

09

Résistance des Matériaux
Test 1

Partie I
1. Section massive 4,5

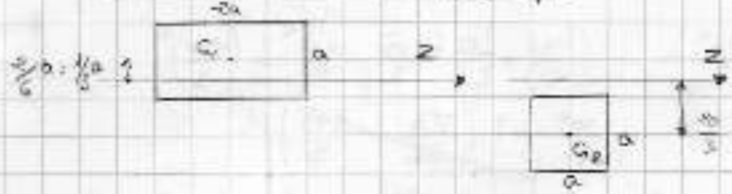


	A_i	Y_i	A_iY_i
bloc 1	$2a^2$	$a/2$	a^3
bloc 2	a^2	$\frac{3}{2}a$	$\frac{3}{2}a^3$
	$A_T = 3a^2$		$\frac{5}{2}a^3 = A_T Y_G$

$\Rightarrow \underline{Y_G} = \frac{5}{2}a^3 / 3a^2 = \frac{5}{6}a$

Y est axe de symétrie donc G ∈ Y

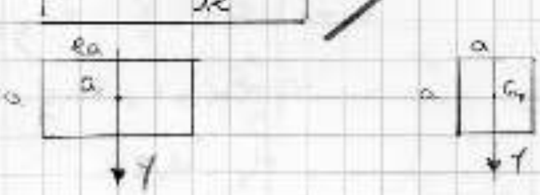
Déterminons I_z & I_y



$I_{z1} = 2a\frac{a^3}{12} + 2a^2\left(\frac{a}{3}\right)^2 \qquad I_{z2} = a\frac{a^3}{12} + a^2\left(\frac{2a}{3}\right)^2$

$\Rightarrow I_z = \frac{a^4}{6} + \frac{2a^4}{9} + \frac{a^4}{12} + \frac{4a^4}{9}$

$\boxed{I_z = \frac{11}{12}a^4}$

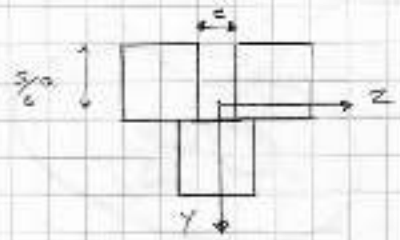


$I_{y1} = a\frac{(2a)^3}{12} \qquad I_{y2} = a\frac{a^3}{12}$

$\boxed{I_y} = \frac{8a^4}{12} + \frac{a^4}{12} = \frac{9a^4}{12} = \boxed{\frac{3a^4}{4}}$

On obtient $I_z > I_y$

On cherche à obtenir $I_y = I_z$



- rajouter un espace entre les blocs ne modifiera pas I_z car les inerties propres sont inchangées, et les distances entre les centres de gravité z_G et ceux des blocs z_{G_1} et z_{G_2} sont inchangés

La modification va porter sur I_y car va apparaître le terme de Huygens dans le calcul de I_{y_1}

$$I_{y_1} = \frac{a\,a^3}{12} + a^2\left(\frac{a+e}{2}\right)^2 = \frac{a^4}{12} + a^2\frac{(a^2+2ae+e^2)}{4} = \frac{a^2}{12}\left(4a^2 + 6ae + 3e^2\right)$$

Donc sur l'ensemble de la figure

$$I_y = 2I_{y_1} + I_{y_2} = \frac{a^2}{6}\left(4a^2 + 6ae + 3e^2\right) + \frac{a^4}{12}$$

$$I_y = \frac{9a^4}{12} + a^3 e + \frac{a^2e^2}{2}$$

$$I_z = I_y \iff \frac{9a^4}{12} + a^3 e + \frac{a^2e^2}{2} = \frac{11}{12}a^4$$

$$\iff -\frac{2}{12}a^4 + a^3 e + \frac{a^2e^2}{2} = 0$$

$$\iff -\frac{a^2}{6} + ae + \frac{e^2}{2} = 0$$

$$\Delta = a^2 + 4\,\frac{1}{2}\times\frac{a^2}{6} = a^2\,\frac{4}{3}$$

$$e = \frac{-a + a\,2/\sqrt{3}}{1}$$

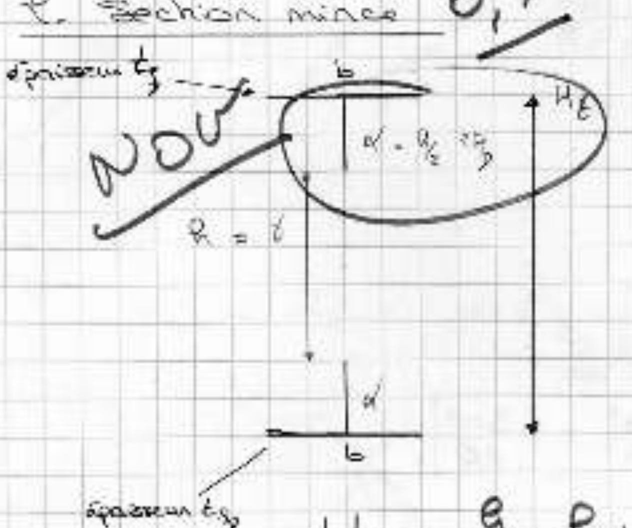
$$\underline{e = a\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right)}$$

Dans ce cas $\underline{(d(G_1, G_2))^2} = \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{2}a\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right)\right)^2 + \left(\frac{5a}{3}\right)^2$

$$= \cancel{a^2\left(\frac{73}{36} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)}$$

et entre $\underline{G_1' \text{ et } G_1''}$ $\quad d = a + e = a\,\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (G_1' et G_1'' : centre de gravité des 2 blocs supérieurs)

2. Section mince 0,5



avec $\begin{cases} 2\alpha + \frac{\gamma}{2} + 2t_g = R \\ 2\alpha + \gamma + 2t_g = H_t \end{cases}$

$H_t = 1{,}5R$

$\Rightarrow \gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right) = R(1{,}5 - 1)$

$\Rightarrow \underline{\gamma = R}$

et $\alpha = \frac{R}{2} - \cancel{2t_g}$ négligé

$H_t = \frac{R}{2} + R + \frac{R}{2} \neq 1{,}5R$ ⚠

$S_{parv} = 2\left(b \times t_g + d\, t_w\right)$

$= 2\left(b\, t_g + \left(\frac{h}{2} - \cancel{2t_g}\right) t_w\right) = 2bt_g + ht_w - \cancel{4t_w t_g}$

$= \cancel{(2b - 4t_w)\, t_g + h t_w}$

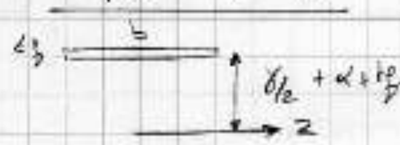
$S_p = 2bt_g + (h - \cancel{2t_g})\, t_w$

$= \underline{(2b - \cancel{2t_w})\, t_g + h t_w}$

Hypothèse des sections minces !

$\Rightarrow \underline{S_{parv} < S_p}$

$\frac{1}{2} I_{z\,parv} =$



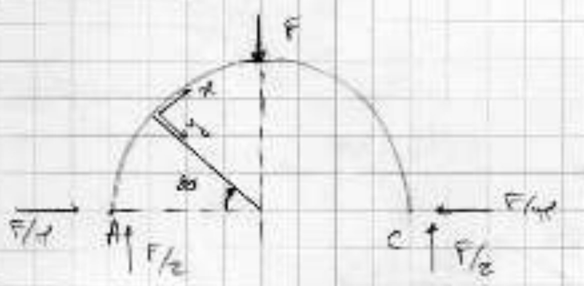
$= b\frac{t_g^3}{12} + bt_g\left(h/2 + d + t_g/2\right)^2 + t_w\frac{d^3}{12} + dt_w\left(\frac{h+d}{2}\right)^2$

$= \frac{bt_g^3}{12} + bt_g\left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2} - 2t_g + \frac{t_g}{2}\right)^2 + \frac{t_w}{12}\left(\frac{h}{2} - 2t_g\right)^3 +$
$+ \left(\frac{h}{2} - 2t_g\right) t_w \left(\frac{h + h/2 - 2t_g}{2}\right)^2$

$=$

$\frac{1}{2} I_{z_p} = \cancel{\frac{bt_g^3}{12}} + bt_g\left(\frac{h}{2}\right)^2 + t_w\left(\frac{h}{2}\right)^3 + t_w\frac{h}{2}\left(\frac{h}{4}\right)^2$

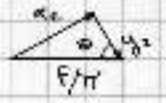
Partie V.



~~tel quel, la structure est hyperstatique, car à 5 actions de liaisons. si on coupe la structure en 2 verticalement, de manière symétrique (ie en F), on a alors une structure isostatique~~

$N(\Theta)$

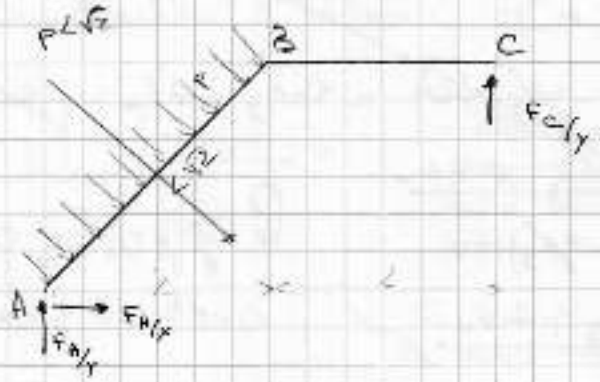
$x_1 = \frac{F}{2}\cos\Theta$
$y_1 = \frac{F}{2}\sin\Theta$

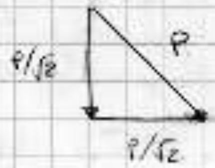


$x_2 = \frac{F}{\pi}\sin\Theta$
$y_2 = \frac{F}{\pi}\cos\Theta$

Donc $\forall\Theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
$$\begin{cases} N(\Theta) = \frac{F}{2}\cos\Theta + \frac{F}{\pi}\sin\Theta \\ V(\Theta) = -\frac{F}{2}\sin\Theta + \frac{F}{\pi}\cos\Theta \end{cases}$$

2. Tracé des sollicitations





on a 3 inconnues pour 3 équations, la structure est isostatique

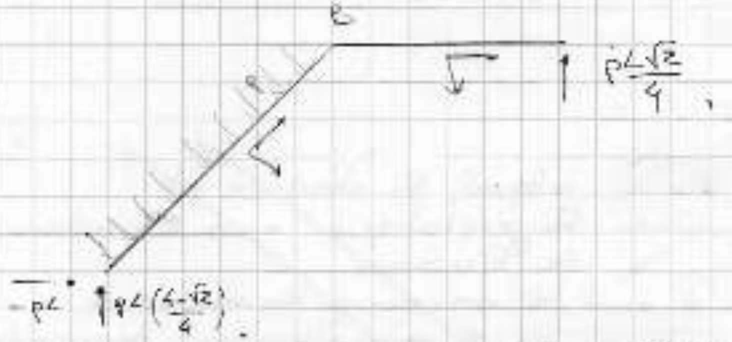
$F_{Ax} + (p/\sqrt{2})\, L\sqrt{2} = 0$

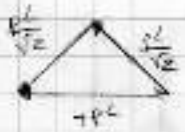
$F_{Ay} + F_{Cy} - (p/\sqrt{2})\, L\sqrt{2} = 0$ erreur de calcul !

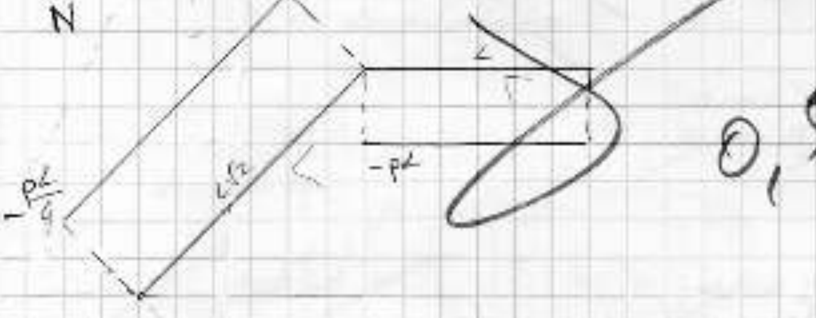
$F_{Cy}\, 2L - (pL\sqrt{2})\, \frac{L\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \underline{F_{Cy} = \frac{pL\sqrt{2}}{4}}$ $= \frac{pL}{2}$

1 $\Rightarrow \underline{F_{Ay}} = pL - \frac{pL\sqrt{2}}{4} = \underline{pL\left(\frac{4-\sqrt{2}}{4}\right)}$ $= \frac{pL}{2}$

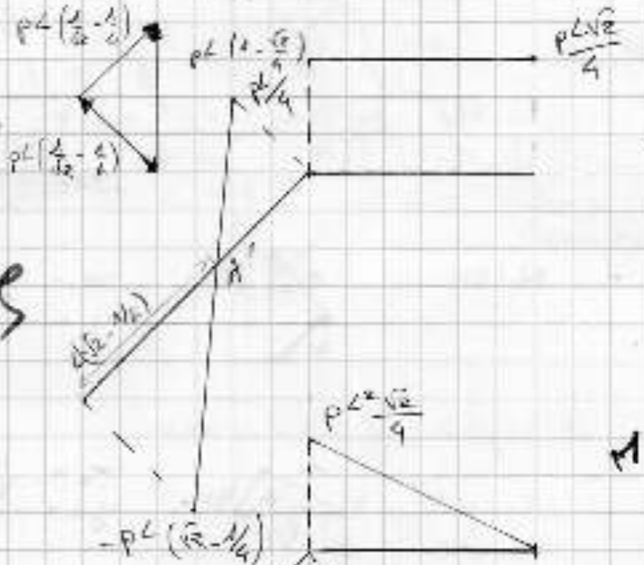
$\underline{F_{Ax} = -pL}$



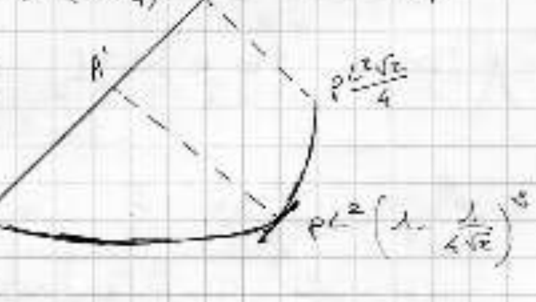




0,5



$M_{max} = M_{A'} = 0 - \left(-pL\left(\sqrt{2}-\frac{1}{4}\right) \times L\left(\sqrt{2}-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{2}\right)$
$= pL^2\left(1-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2$



0,5