E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

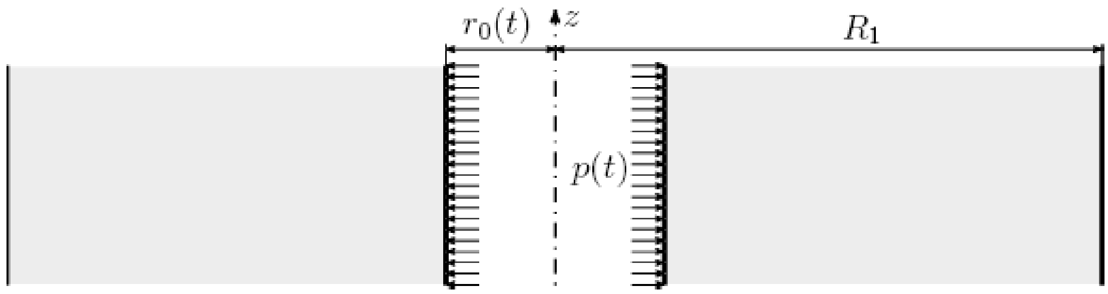
Projet de modélisation (1ère année)
Année 2006-2007

Problème : cylindre creux infini sous pression (pressiomètre)

ARMADA Anatole
LEFEVRE Vincent
MUCIG Charlotte

I. **Position du problème**

Il s’agit de modéliser un cylindre creux de révolution (solide indéformable) de longueur infinie dans la direction de son axe Oz. La paroi extérieure de ce cylindre est supposée fixe et la paroi intérieure est soumise, à chaque instant t≥0, à une pression uniforme p(t) donnée (p(0)=0).



Configuration initiale du solide :

$$\Omega_0 = \left\{ \left(R, \Theta, Z\right) \in \left[R_0, R_1\right] \times \left[0, 2\pi\right[\times \mathbb{R} \right\}$$

Configuration déformée à l’instant t :

$$\Omega_t = \left\{ \left(r, \theta, z\right) \in \left[r_0(t), R_1\right] \times \left[0, 2\pi\right[\times \mathbb{R} \right\}$$

Où r_0 est une fonction inconnue de la variable temps.

Données du problème :

La transformation $\mathcal{T}$ de ce solide est supposée quasistatique. Le solide est par ailleurs supposé hypoélastique et son comportement est régit par l’équation suivante :

$$\breve{\sigma} = \lambda trD\delta + 2\mu D \text{ (} \breve{\sigma} \text{ dérivée objective de Jaumann de } \sigma \text{)}$$

$$\breve{\sigma} = \dot{\sigma} + \sigma W - W\sigma \text{ (} \dot{\sigma} \text{ dérivée matérielle de } \sigma \text{)}$$

$\lambda = \dfrac{E\nu}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}$ et $\mu = \dfrac{E}{2\left(1+\nu\right)}$ deux constantes mécaniques avec $E > 0$ et $\nu \in \left]-1, \dfrac{1}{2}\right[$

Remarque : On travaillera en coordonnées cylindriques tout au long de ce problème.

II. Modélisation mécanique : notations et indications

Question 1 :

Etant donnée la configuration du problème :
- cylindre creux de révolution
- solide déformable
- longueur infinie selon Oz
- la paroi extérieure du cylindre est fixe
- la paroi intérieure du cylindre est soumise à une pression uniforme p(t)

Le cylindre va subir une transformation identique autour de l'axe z (il y a en effet invariance en rotation selon **θ)** ce qui nous permet d'écrire :

$$\boldsymbol{\Theta=\theta}$$

Le cylindre est infini, il y a donc invariance en translation et on peut alors écrire :

$$\mathbf{Z=z}$$

Le cylindre ne peut se déformer que selon son rayon. Celui-ci dépend du rayon initial **R** et du temps **t** puisque la pression imposée ne dépend que du temps. On a alors :

$$\mathbf{r=f(R,t)}$$

On a bien une transformation quasistatique du solide, c'est-à-dire une transformation où les déformations sont infinitésimales, de la forme :

$$\left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{\Theta=\theta} \\ \mathbf{Z=z} \\ \mathbf{r=f(R,t)}\end{array}\right.$$

Question 3 :

On adoptera les notations suivantes :

f' (R,t)= $\partial_R f(R,t)$, $f''=\partial^2_{RR} f(R,t)$ ainsi que $\dot{f}(R,t)=\partial_t f(R,t)$, $\forall (R,t)\in\left[R_0,R_1\right]\times\mathbb{R}^+$

On veut montrer que les composantes des différents tenseurs eulériens ne sont fonctions que du temps t et de la variable Lagrange R.

On a, par définition :

D= $\frac{1}{2}$ (**G** + ^{t}**G**) et **W**= $\frac{1}{2}$ (**G** – ^{t}**G**) avec également par définition **G**= $\overrightarrow{grad_x}\vec{v}(\vec{x},t)$

Où $\vec{x}=r\overrightarrow{e_r}+z\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{X}=R\overrightarrow{e_r}+Z\overrightarrow{e_z}$

Il faut désormais définir l'expression de la vitesse qui se déduit du déplacement :

$\vec{v}(\overrightarrow{X},t)=\dfrac{\partial\vec{u}(\overrightarrow{X},t)}{\partial t}$ où par définition $\vec{u}(\overrightarrow{X},t)=\vec{x}(\overrightarrow{X},t)-\overrightarrow{X}=(r-R)\overrightarrow{e_r}$

Donc $\vec{u}(\overrightarrow{X},t)=(f(R,t)-R)\overrightarrow{e_r}=\vec{u}(R,t)$

Il vient alors $\boxed{\vec{u}(\overrightarrow{X},t)=\vec{u}(R,t)}$

On peut donc en déduire que $\vec{v}(\overrightarrow{X},t)=\dfrac{\partial\vec{u}(\overrightarrow{X},t)}{\partial t}=\dfrac{\partial\vec{u}(R,t)}{\partial t}$

On a donc bien pour le vecteur vitesse : $\boxed{\vec{v}(\overrightarrow{X},t)=\vec{v}(R,t)}$

Or **G**= $\overrightarrow{grad_x}\vec{v}(\vec{x},t)=\overrightarrow{grad_x}\vec{v}(R,t)$ donc :

$$\boxed{\mathbf{G}=\mathbf{G}(R,t)}$$

D'après la formule du tenseur des taux de déformations **D**=$\frac{1}{2}$ (**G** + ^{t}**G**) il vient alors :

$$\boxed{\mathbf{D}=\mathbf{D}(R,t)}$$

Et il vient de même pour le tenseur des taux de rotation **W**=$\frac{1}{2}$ (**G** - ^{t}**G**) :

$$\boxed{\mathbf{W}=\mathbf{W}(R,t)}$$

Il reste à déterminer le tenseur des contraintes de Cauchy σ dont la dérivée objective de Jaumann est $\breve{\sigma}=\dot{\sigma}+\sigma.W-W.\sigma$.

D'après l'énoncé on a $\breve{\sigma}=\lambda trD\delta+2\mu D=\lambda trD(R,t)\delta+2\mu D(R,t)$

Ainsi $\breve{\sigma}=\breve{\sigma}(R,t)$ et donc comme σ est une fonction de **W**(R,t) et de $\breve{\sigma}(R,t)$ on a finalement :

$$\boxed{\sigma=\sigma(R,t)}$$

On a donc bien démontré que les différents tenseurs eulériens ne sont fonction que du temps t et de la variable de Lagrange R :

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{G}=\mathbf{G}(R,t)\\ \mathbf{D}=\mathbf{D}(R,t)\\ \mathbf{W}=\mathbf{W}(R,t)\\ \sigma=\sigma(R,t)\end{array}\right.$$

Question 5 :

Soit t>0.

On introduit les fonctions suivantes : g(R)= $\frac{f(R,t)}{Rf'(R,t)}$ et h(R)= $\frac{f(R,t)}{R}$, $\forall R \in [R0,R1]$.

On introduit par ailleurs : v(x)=g(R) et w(x)=h(R) $\forall x \in [x1,1]$ où x1=$\frac{Ro}{R1}$ et x=$\frac{Ro}{R}$.

a) Première assertion : w(x)= $\frac{f(R,t)}{R}$ =exp($\int_{x1}^{x} \frac{v(x)-1}{xv(x)}dx$).

Pour démontrer ce résultat, nous allons chercher à calculer l'intégrale.

Il vient en procèdent au changement de variable :

$$v(x)=\frac{f(R,t)}{Rf'(R,t)}=\frac{f(\frac{Ro}{x},t)x}{Rof'(\frac{Ro}{x},t)}.$$

Nous allons maintenant calculer l'intégrale suivante : J= $\int_{x1}^{x} \frac{v(x)-1}{xv(x)}dx$

J= $\int_{x1}^{x} \frac{v(x)-1}{xv(x)}dx = \int_{x1}^{x} \frac{dx}{x} - \int_{x1}^{x} \frac{Rof'(\frac{Ro}{x},t)}{x^2 f(\frac{Ro}{x},t)}dx$ =ln(x)-ln(x1)- $\int_{x1}^{x} \frac{Rof'(\frac{Ro}{x},t)}{x^2 f(\frac{Ro}{x},t)}dx$.

On procède au changement de variable suivant :

Soit z=$\varpi = \frac{Ro}{x} \Rightarrow d\varpi = \frac{-Rodx}{x^2}$ il vient donc

J=ln(x)-ln(x1)+ $\int_{R1}^{R} \frac{f'(\varpi,t)}{f(\varpi,t)}d\varpi = \ln(\frac{f(R,t)}{f(R1,t)}) - \ln(\frac{R}{R1})$.

R1 est le rayon maximal que peut atteindre le cylindre donc on peut dire que f(R1,t)=R1.

Donc finalement on a bien $J=\ln(\frac{f(R,t)}{R})$ et l'on démontre bien que :

$$\boxed{w(x)=\frac{f(R,t)}{R}=\exp\left(\int_{x1}^{x} \frac{v(x)-1}{xv(x)}dx\right)}$$

b) Seconde assertion : v est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$v'(x) = \frac{v(x) + (1-2\upsilon)\ln(v(x)) - 1}{(1+\upsilon)x}$$ et ce $\forall x \in [x1,1]$.

Nous allons chercher à exploiter les formules liant σ, $\dot{\sigma}$, D, et W car ils nous permettent de faire apparaitre les dérivés et λ.

Tout d'abord, on sait que $\vec{u}$ = $\vec{x}$ (X,t)- $\vec{X}$

$\vec{u}$ =(f(R,t)-R) $U\vec{r}$. Si l'on dérive u par rapport au temps on obtient v= $\dot{f}$ (R,t) $U\vec{r}$.

A partir de cela on peut s'employer à calculer G.
G=grad(v)

G= $\begin{pmatrix} \partial r\dot{f}(R,t) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\dot{f}(R,t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ On voit donc que W=0 et $\hat{\sigma} = \dot{\sigma}$

On a donc : $\hat{\sigma} = \lambda(\partial r\dot{f}(R,t) + \frac{1}{r}\dot{f}(R,t))\delta + 2\mu D$

Si l'on développe $\partial r\dot{f}(R,t)$:

$\partial r\dot{f}(R,t) = \frac{\partial\dot{f}(R,t)}{\partial R}\frac{\delta R}{\delta x} + \frac{\partial\dot{f}(R,t)}{\partial t}\frac{\delta t}{\delta x}$ or $\frac{\delta t}{\delta x}$ =0 et $\frac{\delta R}{\delta x} = \frac{1}{f'(R,t)}$

On obtient donc $\partial r\dot{f}(R,t) = \frac{1}{f'(R,t)}\frac{\partial\dot{f}(R,t)}{\partial R}$

$$\hat{\sigma} = \dot{\sigma} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda\frac{\partial\dot{f}(R,t)}{\partial R}\frac{1}{f'(R,t)} + 2\mu\lambda\frac{\partial\dot{f}(R,t)}{\partial R}\frac{1}{f'(R,t)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\frac{\partial\dot{f}(R,t)}{\partial R}\frac{1}{f'(R,t)} + (\frac{1}{f(R,t)} + 2\mu)\dot{f}(R,t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\frac{\partial\dot{f}(R,t)}{\partial R}\frac{1}{f'(R,t)} + \frac{\dot{f}(R,t)}{f(R,t)} \end{pmatrix}$$

On a ainsi toute les composantes de $\dot{\sigma}$, on peut l'intégrer par rapport au temps.

Il vient ainsi :

$$\begin{cases} \sigma rr = \ln(f'(R,t))(2\mu+\lambda) + \lambda\ln(f(R,t) - \lambda\ln(R) \\ \sigma\theta\theta = \lambda\ln(f'(R,t)) + \lambda\ln(f(R,t)) + 2\mu\ln(f(R,t)) - (\lambda+2\mu)\ln(R)) \\ \sigma zz = \lambda\ln(f'(R,t)) + \lambda\ln(f(R,t)) - \lambda\ln(R) \end{cases}$$

On rappelle ici les données du cours : $\lambda = \dfrac{E\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}$, $\mu = \dfrac{1}{2(1+\upsilon)}$ et $(\lambda+2\mu) = \dfrac{E(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}$.

On peut remplacer λ, μ et $(\lambda+2\mu)$ par leur expression fonction de E et υ.

On obtient finalement : $$\boxed{\begin{cases} \sigma rr = \ln(f'(R,t))\dfrac{E(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} + \dfrac{E\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\ln(\dfrac{f(R,t}{R}) \\ \sigma\theta\theta = \dfrac{E\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\ln(f'(R,t)) + \dfrac{E(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\ln(\dfrac{f(R,t)}{R}) \end{cases}} \quad (1)$$

On a besoin d'autres équations pour terminer ce calcul, on va écrire les équation indéfinies du mouvement :
$div(\sigma) + \rho\vec{b} = \rho\vec{\gamma}$.

Or on remarque que $\vec{b} = \vec{0}$ et $\vec{\gamma} = \vec{0}$ (il n'y a pas d'action à distance prise en compte et la vitesse ne dépend pas du temps)

Ainsi : $$div(\sigma) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \partial r\sigma rr + \dfrac{1}{r}\partial\theta\sigma\theta r + \partial z\sigma zr + \dfrac{1}{r}(\sigma rr - \sigma\theta\theta) \\ \partial r\sigma r\theta + \dfrac{1}{r}\partial\theta\sigma\theta\theta + \partial z\sigma\theta z + \dfrac{1}{r}(\sigma r\theta - \sigma\theta r) \\ \partial r\sigma rz + \dfrac{1}{r}\partial\theta\sigma\theta z + \partial z\sigma zz + \dfrac{1}{r}\sigma rz \end{pmatrix} = 0.$$

La seule équation non nulle donnée par ce système est $\boxed{\partial r\sigma rr + \dfrac{1}{r}(\sigma rr - \sigma\theta\theta) = 0}$ (2)

$$\partial r\sigma rr = \frac{\partial\sigma rr}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial\sigma rr}{\partial R}\frac{1}{f'(R,t)}$$

On va donc calculer la dérivée par rapport à R de σrr (équation (1)) obtenu si dessus.

$$\partial r\sigma rr = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left[(1-\upsilon)\frac{f''(R,t)}{f'(R,t)} + \upsilon\frac{f'(R,t)}{f(R,t)} - \frac{\upsilon}{R}\right]\frac{1}{f'(R,t)} \quad (3)$$

En utilisant (3) on peut écrire :
(1)
$$\Leftrightarrow \left[(1-\upsilon)\frac{f''(R,t)}{f'(R,t)} + \upsilon\frac{f'(R,t)}{f(R,t)} - \frac{\upsilon}{R}\right]\frac{1}{f'(R,t)} + \frac{1}{f(R,t)}\left[(1-\upsilon)\ln(\frac{f'(R,t)}{Rf(R,t)}) + \upsilon\ln(\frac{f(R,t)}{Rf'(R,t)})\right] = 0$$

On nomme cette équation (4).

Si l'on calcule maintenant g'(R,t) sachant que g(R,t)= $\dfrac{f(R,t)}{Rf'(R,t)}$:

$$g'(R,t) = \frac{R(f'(R,t))^2 - f(R,t)(f'(R,t) + Rf''(R,t)}{(Rf'(R,t))^2} = \frac{1}{R} - \frac{f(R,t)}{R^2 f'(R,t)} - \frac{f(R,t)f''(R,t)}{R(f'(R,t))^2}$$

On obtient finalement : $g'(R) = \dfrac{1}{R}(1-g(R)) - g(R)\dfrac{f''(R,t)}{f'(R,t)}$

(4) $\Leftrightarrow g(R)R\left((1-\upsilon)\right)(\frac{1}{Rg(R)}-\frac{1}{R}-\frac{g'(R)}{g(R)})+\frac{v}{Rg(R)}-\frac{\upsilon}{R})+(2\upsilon-1)\ln(g(R))=0$

On peut développer cette expression :

$$\Leftrightarrow (1-\upsilon)-(1-\upsilon)g(R)-R(1-\upsilon)g'(R)+\upsilon-\upsilon g(R)+(2\upsilon-1)\ln(g(R))=0$$
$$\Leftrightarrow 1-g(R)-R(1-\upsilon)g'(R)+(2\upsilon-1)\ln(g(R))=0$$

On obtient finalement : $\boxed{g'(R) = \frac{1-g(R)+(2\upsilon-1)\ln(g(R))}{R(1-\upsilon)} \quad (5)}$

Il nous faut maintenant réintroduire v(x) dans l'expression :

g(R)=v(x), x=$\frac{Ro}{R}$ donc on trouve : g'(R)=-$\frac{Ro}{R}$ v'(x)

(5) $\Leftrightarrow -\frac{x}{R}v'(x)=\frac{1-v(x)+(2\upsilon-1)\ln(v(x))}{R(1-\upsilon)}$

On obtient donc bien l'expression souhaitée : $v'(x)=\frac{v(x)+(1-2\upsilon)\ln(v(x))-1}{(1+\upsilon)x}$

<u>c) Troisième assertion</u> : $\frac{v^{(1-\nu)}(1)}{w(1)}=\exp(\frac{((1+\nu)(1-2\nu)p(t)}{E}$

On reprend l'équation (1) : $\begin{cases} \sigma rr = \ln(f'(R,t))\frac{E(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}+\frac{E\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\ln(\frac{f(R,t}{R}) \\ \sigma\theta\theta = \frac{E\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\ln(f'(R,t))+\frac{E(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\ln(\frac{f(R,t)}{R}) \end{cases}$

On sait de plus que $\frac{h(R)}{g(R)}=f'(R,t)$ et que $\frac{f(R,t)}{R}=h(R)$

Donc on peut écrire : $\sigma_{rr}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\left((1-\nu)\ln(f'(R,t)+\nu\ln(\frac{f(R,t)}{R})\right)\right)$

$$\sigma_{rr}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\ln(\frac{h(R)^{1-\nu}}{g(R)^{1-\nu}}h(R)^{\nu})=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\ln(\frac{h(R)}{g(R)^{1-\nu}})$$

Sachant que v(x)=g(R) et w(x)=h(R) $\forall x\in[x1,1]$ où x1=$\frac{Ro}{R1}$ et x=$\frac{Ro}{R}$, il vient directement :

$$\boxed{\sigma_{rr}(x,t)=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\ln(\frac{w(x)}{v(x)^{1-\nu}})}$$

En écrivant les conditions limites pour x=1 et R=Ro, on obtient : $\sigma_{rr}(x=1,t)=-p(t)$

Donc on a $p(t)=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\ln(\frac{v(1)^{1-\nu}}{w(1)})$

En passant à l'exponentielle on trouve le résultat attendu : $\boxed{\dfrac{v^{(1-\nu)}(1)}{w(1)} = \exp(\dfrac{((1+\nu)(1-2\nu)\,p(t)}{E}}$

Question 6 :

Il s'agit dans cette question à partir des éléments trouvés précédemment de déterminer la fonction f ainsi que les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy σ et du tenseur des déformations d'Almansi-Euler **E**.

D'après la question 4 on peut écrire :

$$f(R,t) = Rh(R), \forall R \in [R_0, R_1]$$

Or on sait, toujours d'après la question 4, que $\omega(x) = h(R), \forall x \in [x_1, 1]$ où $x_1 = \dfrac{R_0}{R_1}$ et $x = \dfrac{R_0}{R}$

Donc $\boxed{f(R,t) = R\omega(x)}$

On veut désormais exprimer les composantes non nulles du tenseur des contraintes de Cauchy :

On a d'après la question 5 : $\boxed{\sigma_{rr} = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\ln(\dfrac{\omega(x)}{v(x)^{1-\nu}})}$

On a également $\sigma_{\theta\theta} = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}((1-2\nu)\ln(\dfrac{f(R,t)}{R}) + \nu\ln(f'(R,t)))$

On obtient en remplaçant $\dfrac{f(R,t)}{R}$ par $h(R)$ et $f'(R,t)$ par $\dfrac{h(R)}{g(R)}$:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\ln(\frac{h(R)^{\nu}}{g(R)^{\nu}}h(R)^{1-\nu})$$

Et finalement en simplifiant : $\boxed{\sigma_{\theta\theta} = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\ln(\dfrac{\omega(x)}{v(x)^{\nu}})}$

De même pour σ_{zz} on a : $\sigma_{zz} = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\ln(\dfrac{f'(R,t)f(R,t)}{R})$ et $\dfrac{\omega(x)^2}{v(x)} = \dfrac{f'(R,t)f(R,t)}{R}$

Donc :

$$\boxed{\sigma_{zz} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\ln(\frac{\omega^2(x)}{v(x)})}$$

Il reste donc à déterminer le tenseur des déformations d'Almansi-Euler **E** dont l'expression est :

$$E = \frac{1}{2}\left(\delta - B^{-1}\right)$$

Cette formule fait intervenir :

$$B = F\,{}^{t}F$$
$$F = \delta + H^{L} = I + H^{L}$$
$$H^{L} = \overrightarrow{grad}_{x}\vec{u}$$
$$\vec{u} = (r-R)\overrightarrow{e_r}$$

Ainsi on obtient :

$$H^{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial R}u & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u}{R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(R,t)-1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f(R,t)}{R}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il vient ensuite $F = \begin{pmatrix} f'(R,t) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f'(R,t)}{R} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = {}^{t}F$ car F est une matrice diagonale.

Donc $B = \begin{pmatrix} \left(f'(R,t)\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{f'(R,t)}{R}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\left(f'(R,t)\right)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{R}{f'(R,t)}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Il vient finalement pour le tenseur des déformations d'Almansi-Euler tenseur **E** :

Avec $\frac{v}{\omega} = \frac{1}{f'(R,t)}$ et $\frac{1}{\omega} = \frac{R}{f(R,t)}$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\left(\frac{v}{\omega}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\left(\frac{1}{\omega}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

III. **Modélisation numérique.**

1) Démarche.

Pour pouvoir déterminer une approximation des composantes de la vitesse, à partir de la relation suivante $v'(x) = \dfrac{v(x) + (1-2\upsilon)\ln(v(x)) - 1}{(1+\upsilon)x}$, nous avons tout d'abord utilisé le schéma d'Euler implicite en prenant pour conditions initiales une valeur de vitesse aléatoire à l'abscisse x=1, (cf en annexe fonction Euler).
On incrémente la formule :

$$v_{i-1} = v_i - h\frac{v_i + \left(1-2\nu\right)\log(v_i)}{\left(1-\nu\right)\left(1-\left(n-i\right)h\right)}$$

Avec $h = \dfrac{1-x_1}{n}$.

On obtient alors une matrice colonne des valeurs de v aux abscisses x_1+ih.
A partir de cette matrice, on construit une autre matrice colonne h en approximant par la méthode des trapèzes l'exponentielle de l'intégrale suivante : w(x)= exp($\displaystyle\int_{x1}^{x} \frac{v(x)-1}{xv(x)}dx$) (cf en annexe fonction calw)

Pour vérifier la précision de nos approximations, on utilise la relation qui lie v(1) et w(1) (cf en annexe fonction rapport):

$$\frac{v^{(1-\nu)}(1)}{w(1)} = \exp(\frac{(\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)p(t)}{E}$$

Si la différence est supérieure 0.0001, on exprime une nouvelle condition initiale v(1) à partir de la formule ci-dessus et on recommence l'algorithme (cf en annexe fonction babasse).

A partir de ces valeurs trouvées de v et de w on peut calculer les composantes non nulles de E, Sigma et tracer les différentes courbes associées. (cf en annexe fonction babasse et courbes). En ce qui concerne le déplacement radial, on l'a d'abord exprimé en fonction de w et v avant de calculer ses composantes :

$$\begin{aligned}
&u(R,t) = x(R,t) - X(R,t) \\
&= f(R,t) - R \\
&= R(h(R) - 1) \\
&= \frac{R_0}{x}(w(x) - 1) \\
&= \frac{R_0}{R_1 + ih}(w(x) - 1)
\end{aligned}$$

On obtient par la suite les courbes tracées en annexe.

Interprétation des courbes : le déplacement ur augmente constamment. En ce qui concerne la contrainte radiale on observe qu'elle augmente fortement en compression sur les bords extérieurs du cylindre. Cela semble cohérent puisque la paroi extérieure du cylindre est fixe. On s'attendait bien à obtenir des contraintes en compression (signe négatif). Pour les contraintes en θ et en z on s'attendait plutôt à obtenir des contraintes en compression pour les abscisses inférieures à 10,8.

Pour la courbe du tenseur des déformation d'Almansi-Euler, selon r la partie extérieure du cylindre étant soumise à compression, il est logique que la matière se comprime. En revanche on remarque que les déformations selon θ sont quasiment nulles.