

Château Carine  
Robin Olivia  
Zazzaron Chloé

Avril 2007

## **PROJET DE CALCUL SCIENTIFIQUE**

# **ETUDE DE L' ECOULEMENT DE L'AIR EN TUNNEL**

Promo A  
1AG4

## **SOMMAIRE**

## INTRODUCTION

I) POSITIONNEMENT DU PROBLEME ET HYPOTHESES:

II) APPROCHE SIMPLIFIEE / DETERMINATION D'UNE SOLUTION DANS UN CAS IDEAL:

- 1) **Hypothèse 1: le débit linéique est nul**
- 2) **Hypothèse 2 : On injecte un débit linéique  $q \neq 0$**
- 3) **Détermination de  $u_0$  sous l'hypothèse  $K=0$**

III) REPOSE A DES PERTURBATIONS EXTERIEURES :

- 1) **Modification des conditions météorologiques extérieures :**
- 2) **Evènements particuliers du type incendie**

## ANNEXES

## INTRODUCTION:

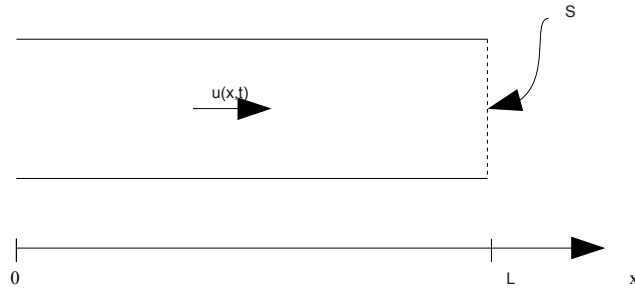
L'objectif de cette étude est d'étudier de façon simplifiée l'écoulement d'air dans un tunnel. En se plaçant dans des configurations simplifiées, nous allons essayer de mobiliser nos connaissances de calcul scientifique pour résoudre de façon approchée les équations de la

mécanique des fluide.

I) POSITIONNEMENT DU PROBLEME ET HYPOTHESES:

Le tunnel dans lequel on veut étudier l'écoulement de l'air est un tunnel de section S de longueur L

On note  $u(x,t)$  la vitesse de l'air dans le tunnel.



Hypothèses:

- u dépend uniquement de la variable d'espace x ( unidirectionnelle) et du temps t
- l'air est incompressible:  $\rho_{air} = \text{constante}$

On obtient sous ces hypothèses les équations simplifiées:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = S_m$$

$$\rho * \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + 2 * \rho u(x, t) * \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{-\partial P}{\partial x} + S_{mvt}$$

$S_m$  : sources de masse dans le tunnel

$S_{mvt}$  : sources de quantité de mouvement

P: pression dans le tunnel

- sources de masse uniquement dues à l'injection d'un débit linéique d'air q:  $S_m = \frac{q}{S}$
- gradient de pression composé uniquement de deux termes:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\Delta Pa}{L} + \frac{\rho}{2 * L} * (\xi_e + \xi_s) * u(x, t) * |u(x, t)|$$

- sources de quantité de mouvement uniquement dues au frottement de l'air sur les parois

$$S_{mvt} = \frac{-\lambda \rho}{2 * D_h} * u(x, t) * |u(x, t)|$$

On obtient alors le système suivant:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{q}{S}$$

$$\rho * \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + 2 * \rho * u(x, t) * \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{-\Delta Pa}{L} - \frac{\rho}{2} * \left( \frac{\xi_e + \xi_s}{L} + \frac{\lambda}{D_h} \right) * u(x, t) * |u(x, t)|$$

## II) APPROCHE SIMPLIFIEE / DETERMINATION D'UNE SOLUTION DANS UN CAS IDEAL:

### **1) Hypothèse 1: le débit linéique est nul**

Dans cette première question, on suppose que q et ΔPa sont nuls  
Le système (S) devient:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -\left(\frac{1}{2}\right) * \left(\frac{\xi_e + \xi_s}{L} + \frac{\lambda}{D_h}\right) * u(x, t) * |u(x, t)| = K * u(x, t) * |u(x, t)|$$

Pour tracer la solution u(x,t) de (S) en fonction de t, on utilise un schéma de type Runge-Kutta de rang 1, c'est à dire un schéma d'Euler explicite.

$$u(t_{n+1}) - u(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} K * u(s) * |u(s)| * ds$$

On approxime l'aire sous la courbe par l'aire d'un rectangle  
de longueur  $h_n = t_{n+1} - t_n$   
de hauteur  $u(t_n)$

On obtient le schéma d'intégration suivant:

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + h_n * K * u_n * |u_n|}$$

On suppose que le pas est constant:  $h = 1/4$

### Application numérique:

$$K = -1,793 \cdot 10^{-3}$$

Les premiers termes calculés à la main donnent:

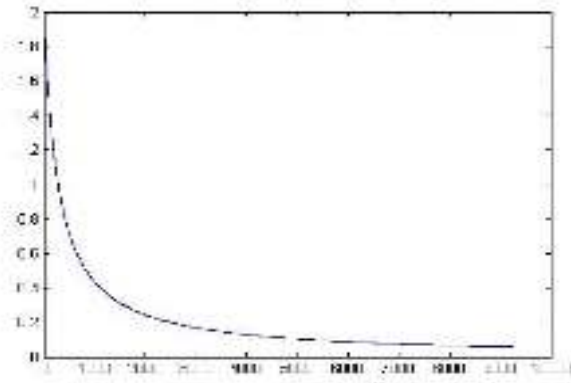
$$u_0 = 2$$

$$u_1 = 1,998$$

$$u_2 = 1,996$$

$$u_3 = 1,994$$

$$u_4 = 1,992 \dots$$



Représentation graphique de  
 $u(x,t)$

$h=1/4$  ;  $t_{\max}=10000s$  ;  $u_0=2m/s$

On remarque que la solution de la vitesse tend vers la valeur 0 mais sans l'atteindre.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x,t) = 0$$

## 2) Hypothèse 2 : On injecte un débit linéique $q \neq 0$

On a  $q=0,034m^3 \cdot s^{-1}/m$ . Ce débit est constant dans le temps.

La solution  $u(x,t)$  peut se mettre sous la forme :  $u(x,t) = g(x) + f(t)$ .

En effet  $f$  est solution d'une équation différentielle et  $g$  a pour expression:

$$g(x) = \frac{q}{S} x + g(0)$$

L'équation différentielle satisfaite par  $f$  est :

$$\rho f'(t) + 2\rho \left( \frac{q}{S} x + g(0) + f(t) \right) \frac{q}{S} = \frac{-\Delta Pa}{L} - \frac{\rho}{2} \left( \frac{\xi_e + \xi_s}{L} + \frac{\lambda}{D_h} \right) \left[ f(t) + \frac{q}{S} x + g(0) \right] \left| f(t) + \frac{q}{S} x + g(0) \right|$$

## 3) Détermination de $u_0$ sous l'hypothèse $K=0$

Rappelons que, pour simplifier l'écriture et la résolution, nous avons introduit la constante

$$K \text{ telle que : } K = \frac{-1}{2} \left( \frac{\xi_e + \xi_s}{L} + \frac{\lambda}{D_h} \right)$$

Ici, on suppose que le courant d'air initial dans le tunnel est uniquement dû à la différence de pression entre les têtes du tunnel  $\Delta Pa$ . On considère donc que la constante  $K$  est nulle.  **$K=0$**

L'équation vérifiée par  $f$  a donc la forme :

$$\rho f'(t) + 2\rho \left( \frac{q}{S} x + g(0) + f(t) \right) \frac{q}{S} = \frac{-\Delta Pa}{L}$$

$$\text{c'est à dire : } f'(t) = -2 \left( \frac{q}{S} x + g(0) + f(t) \right) \frac{q}{S} - \frac{\Delta Pa}{\rho L}$$

Cependant, on recherche la solution pour  $x=0$  d'où :

$$f'(t) = -2 \frac{q}{S} f(t) - 2 \frac{q}{S} g(0) - \frac{\Delta Pa}{\rho L}$$

On en déduit donc l'expression de  $f(t)$  à  $x=0$  :

$$f(t) = A e^{-2 \frac{q}{S} t} - g(0) - \frac{\Delta Pa S}{2 \rho q L}$$

Il reste à déterminer le coefficient A en fonction de  $u_0$ .

$$\text{À } t=0, \quad f(0)+g(0)=u_0=A-\frac{\Delta Pa S}{2 \rho q L}$$

d'où :

$$A=u_0+\frac{\Delta Pa S}{2 \rho q L}$$

$$\text{et } f(t)=[u_0+\frac{\Delta Pa S}{2 \rho q L}]e^{-\frac{q}{S}t}-g(0)-\frac{\Delta Pa S}{2 \rho q L}$$

Cette expression n'est valable que pour  $x=0$  !!

On cherche l'expression de la solution  $u_p$  qui correspond à la solution  $u$  en régime permanent.  $U_p$  ne dépend donc pas de  $t$ , d'où  $\frac{\partial u_p}{\partial t}(x, t)=0$

donc

$$2 \rho u_p(x) \frac{\partial u_p(x)}{\partial x} = \frac{-\Delta Pa}{L}$$

autrement dit

$$2 \rho u_p(x) \frac{q}{S} = \frac{-\Delta Pa}{L}$$

On a donc :

$$u_p(x=0)=u_0=\frac{-\Delta Pa S}{2 \rho Q L}$$

Ceci est cohérent avec l'expression de  $f$  trouvé précédemment pour  $x=0$ . On avait en effet :

$$f(t)=[u_0+\frac{\Delta Pa S}{2 \rho q L}]e^{-\frac{q}{S}t}-g(0)-\frac{\Delta Pa S}{2 \rho q L} .$$

Or, en régime permanent, le premier terme doit s'annuler ce qui correspond à :

$$A=u_0+\frac{\Delta Pa S}{2 \rho q L}=0 \quad \text{ce qui redonne la même expression pour } u_0 !$$

$U_0$  dépend donc de la valeur de la différence de pression  $\Delta Pa$ .

Pour des valeurs de  $\Delta Pa$  appartenant à l'intervalle  $[-200, +200]$ , on répertorie les valeurs de  $u_0$  par pas de 50 Pa dans le tableau suivant.

$\Delta Pa$	-200	-150	-100	-50	0	50	100	150	200
$U_0$	54,2	40,65	27,1	13,55	0	-13,55	-27,1	-40,65	-54,2

On s'aperçoit que  $u_0$  est de signe négatif par rapport à  $\Delta Pa$ . Ceci est physiquement cohérent : une variation négative de pression à l'entrée du tunnel, c'est-à-dire une dépression, correspond à une vitesse d'air négative.

### III) REPONSE A DES PERTURBATIONS EXTERIEURES :

#### 1) **Modification des conditions météorologiques extérieures :**

On se propose d'étudier la réponse de la vitesse dans le tunnel lors d'une brusque variation de pression. En effet, on passe d'une variation de pression  $\Delta P_{a,ini} = -100$  Pa pour  $t < 0$  à une variation de pression  $\Delta P_a = 600$  Pa pour  $t = 0$ .

Pour se faire, on intègre l'équation en  $f$  trouvée dans le II-2 :

$$\rho f'(t) + 2\rho \left( \frac{q}{S}x + g(0) + f(t) \right) \frac{q}{S} = \frac{-\Delta Pa}{L} - \frac{\rho}{2} \left( \frac{\xi_e + \xi_s}{L} + \frac{\lambda}{D_h} \right) \left[ f(t) + \frac{q}{S}x + g(0) \right] \left[ f(t) + \frac{q}{S}x + g(0) \right]$$

en posant :  $K = \frac{-1}{2} \left( \frac{\xi_e + \xi_s}{L} + \frac{\lambda}{D_h} \right)$

On a :  $f'(t) = f(t) \left[ \frac{-2q}{S} + K \left| f(t) + g_0 + \frac{q}{S}x \right| \right] - \frac{2q}{S} \left( g_0 - \frac{q}{S}x \right) - \frac{\Delta Pa}{\rho L} + K \left( g_0 + \frac{q}{S}x \right) \left| f(t) + g_0 + \frac{q}{S}x \right|$

On souhaite intégrer cette équation différentielle selon un schéma de Runge-Kutta. On considère donc lors de l'intégration que seule la variable  $t$  varie. Ainsi,  $g_0 + \frac{q}{S}x = g(x) = \text{constante}$ .

On a donc :  $f'(t) = f(t) \left[ \frac{-2q}{S} + K |f(t) + g(x)| \right] - \frac{2q}{S} g(x) - \frac{\Delta Pa}{\rho L} + K g(x) |f(t) + g(x)|$

On intègre maintenant selon le schéma de Runge-Kutta :

$$f(t_{i+1}) - f(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t) dt$$

Or :

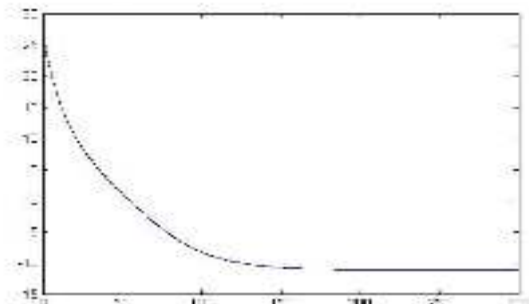
$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t) dt = h_i f(t_i) \left[ \frac{-2q}{S} + K |f(t_i) + g(x)| \right] - h_i \frac{2q}{S} g(x) + K g(x) h_i |f(t_i) + g(x)| - h_i \frac{\Delta Pa}{\rho L}$$

En approximant :  $f(t_{i+1}) = f_{i+1}$  et  $f(t_i) = f_i$

On a alors :  $f_{i+1} - f_i = h_i f_i \left[ \frac{-2q}{S} + K |f_i + g(x)| \right] - \left[ 2 \frac{q}{S} g(x) - \frac{\Delta Pa}{\rho L} \right] h_i + K g(x) h_i |f_i + g(x)|$

Or :  $f_{i+1} - f_i = (u_{i+1} - g(x)) - (u_i - g(x)) = u_{i+1} - u_i$  et  $f_i + g(x) = u_i$

D'où : 
$$u_{i+1} = u_i \left[ 1 - h_i \left( \frac{2q}{S} + K |u_i| \right) \right] - h_i \frac{\Delta Pa}{\rho L}$$



Représentation graphique de  $u(x,t)$

$h = 1/4$  ;  $t_{\max} = 300s$  ;  $u_0 = 27,10m/s$   
 $\Delta Pa = -100$  Pa pour  $t < 0$   
 $\Delta Pa = 600$  Pa pour  $t = 0$   
 $q = 0,034$  m<sup>3</sup>.s<sup>-1</sup>/m

On peut remarquer que la vitesse diminue de manière brutale au début, ce qui est cohérent physiquement ; en effet, la variation importante de la pression induit un mouvement brusque. Puis, la vitesse diminue de moins en moins vite pour se stabiliser autour de la valeur  $-12\text{m/s}$

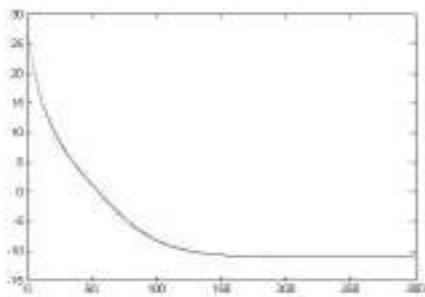
## 2) Evènements particuliers du type incendie

On cherche à déterminer la réponse de la vitesse dans le tunnel lorsque le débit varie en fonction du temps.

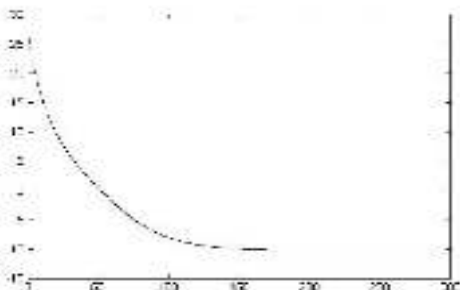
On voulait utiliser le programme de Matlab utilisé pour le graphique de la question 4 en définissant dans un autre programme la fonction  $q$  donnant le débit en fonction du temps tel qu'il est défini dans la question 5 mais un problème se pose dans notre programme.

Nous avons donc remédié de façon partielle à ce problème en faisant un graphique pour chaque débit. On n'aura donc pas le débit réellement en fonction de  $t$ .

Pour le débit  $q=q_1=0,034\text{ m}^3.\text{s}^{-1}/\text{m}$ , on trouve le même graphique que dans le cas de la question 4

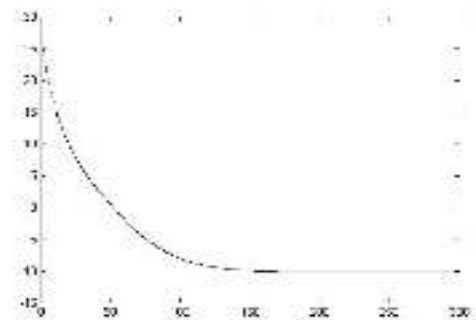


Pour le débit  $q=q_2=0,114\text{ m}^3.\text{s}^{-1}/\text{m}$ , on trouve :



On peut remarquer que pour le débit différent mais en prenant les mêmes valeurs pour  $t_{\text{max}}$ ,  $h$  et  $u_0$ , les résultats sont sensiblement égaux.

Pour le débit  $q=q_3=0,057\text{ m}^3.\text{s}^{-1}/\text{m}$ , on trouve :



De même, les résultats pour le débit  $q_3$  ne sont pas très différents.



## CONCLUSION :

L'étude de l'écoulement de l'air dans un tunnel a été ici simplifiée par l'hypothèse d'incompressibilité ainsi que les hypothèses portant sur les expressions des sources de quantité de mouvement et sources de masse.

Les représentations graphiques de la vitesse de l'air dans le tunnel, de façon générale, pour des cas particuliers ou en réponse à une brusque variation, semblent physiquement cohérentes.

D'autres méthodes de résolution des équations incompressibles de Navier-Stokes sont disponibles dans la littérature, notamment par la méthode NSIKE. Ce solveur, développé en 1999 par Medic Gorazd et Bijan Mohammadi, s'utilise pour des écoulements turbulents en se basant sur la méthode de projection de Chorin, en utilisant une discrétisation par éléments finis et un calcul de la vitesse de façon explicite.

# ANNEXES

### **Question 1 :**

```
function euler(h,tmax,u0)

t=zeros(1,1);
u=zeros(1,1);
u(1,1)=u0;
i=1;
while t(1,i)<=tmax
    f=-1/2*(1.5/2343+0.02/6.79)*u(1,i)*abs(u(1,i));
    u(1,i+1)=u(1,i)+h*f;
    t(1,i+1)=t(1,i)+h;
    plot(t(1,i),u(1,i))
    hold on
    i=i+1;

end
end
```

### **Question 4:**

```
function euler1(h,tmax,u0)

t=zeros(1,1);
u=zeros(1,1);
u(1,1)=u0;
i=1;
while t(1,i)<=tmax
    f=u(1,i)*((-2*0.034/46.2)-1/2*(1.5/2343+0.02/6.79)*abs(u(1,i)));
    u(1,i+1)=u(1,i)+h*f-h*600/(1.07*2343);
    t(1,i+1)=t(1,i)+h;
    plot(t(1,i),u(1,i))
    hold on
    i=i+1;

end
end
```

### **Question 5 :**

**Définition du débit q(t) :**

```

function q(t,t1,t2,t3,q1,q2,q3)

if t<t1
    q=q1
else
    if t<t2
        q=(q2-q1)*t/(t2-t1)+(q1*t2-q2*t1)/(t2-t1)
    else
        if t<t3
            q=q2
        else
            q=q3
        end
    end
end
end

```

### **Schéma de Runge-Kutta :**

```

function euler5(h,tmax,u0,t1,t2,t3,q1,q2,q3)

t=zeros(1,1);
u=zeros(1,1);
u(1,1)=u0;
i=1;
while t(1,i)<=tmax
    f=u(1,i)*(-2*q(t(1,i),t1,t2,t3,q1,q2,q3)/46.2-1/2*(1.5/2343+0.02/6.79)*abs(u(1,i)))
    u(1,i+1)=u(1,i)+h*f-h*600/(1.07*2343);
    t(1,i+1)=t(1,i)+h
    plot(t(1,i),u(1,i))
    hold on
    i=i+1;
end
end

```

**Problème :** Matlab n'accepte pas l'utilisation de la fonction q dans la fonction euler5, il renvoie comme message d'erreur :

« ??? Error using ==> q  
Too many output arguments.

Error in ==> euler5 at 8

$f=u(1,i)*(-2*q(t(1,i),t1,t2,t3,q1,q2,q3)/46.2-1/2*(1.5/2343+0.02/6.79)*abs(u(1,i)))$  »