Ajabboune Ralid
Lefevre Vincent
Armada Anatole

mini projet de Méthodes de Recherches Opérationnelles

1A-groupe7

<u>Partie I</u> : <u>transformation de beckman et applications</u>

Question 1)

Comme l'utilisateur utilise l'itinéraire le moins cher (ce qui est naturel), ont en déduit donc l'uniformité du prix sur tout les itinéraires et donc ce prix est inférieur ou égal aux prix des autres itinéraires. On a donc les hypothèses suivantes :

$$(W1): \quad \begin{aligned} &C_p(f)= s_w \text{ si } f_p>0 \\ &C_p(f)\geq s_w \text{ si } f_p=0 \end{aligned}$$

Question 2)

Calculons la dérivée partielle du critère de (B) relativement à f_p :

$$\frac{d}{dfp} \sum \int_0^F Ca(\Phi)\, d\Phi = \sum \frac{d}{dfp} \left(\int_0^F Ca(\Phi)\, d\Phi \right) = \sum(C_a(F_a) - C_a(0))$$

$$= \sum C_a(F_a)= C_p(f)$$

et si on note U le critère de (B) alors U représente le coût global : $\frac{\partial}{\partial fp} U$

Et en considérant 2 itinéraires p et p' une partie du débit d'un itinéraire est déplacée sur l'autre. D'où :

$$\mathrm{Min}(U)= 0 = \frac{\partial}{\partial fp} U$$

Or $dU= \frac{\partial}{\partial fp} U\, df_p + \frac{\partial}{\partial fp} U \quad df_{p'} \quad =C_p(f)df_p+ C_{p'}(f)*(-df_p)$

D'où $C_p(f)= C_{p'}(f)= s_w$

On en déduit donc que les itinéraires utilisés ont effectivement le même tarif s_w . On peut donc en conclure que toute solution de (B) satisfait à (W1) et on a un équilibre de Wardrop.

Partie II: cas de coûts c_a indépendants de la demande

Question3)

On veut interpréter la contrainte $G^i_w=\sum_a F_{a,w}- \sum_b F_{b,w}$
En posant bien sûr F_a tous les gens passant par l'itineraire a et $F_{a,w}$ tous les gens qui passent par a pour se rendre sur l'itinéraire w.
La contrainte G^i_w représente le débit du point de passage i pour tout les couples OD dont les itinéraires passent par i. Elles sont comptées positivement lorsque les arcs entrent et négativement lorsqu'ils sortent.

On peut dés à présent décomposer le problème (BA) en problèmes indépendants (BA_w) dont chacun est relatif à un seul couple Od_w. Et les contraintes restent vraies quelque soit w. On a donc :

$$\text{Min}_f \sum_a C_a(F_a)*F_a$$

$$\left|\begin{array}{l} G^i_w =\sum_a F_{a,w}- \sum_b F_{b,w} \qquad \forall i\in X \\ F_{a,w} \geq 0 \qquad \forall a \in A \\ \text{Avec } G^i_w=D_w \text{ si I= D(w)} \\ G^i_w=-D_w \text{ si i=O(w)} \\ G^i_w=0 \text{ sinon} \end{array}\right.$$

Question 4)

On pose x le vecteur colonne des $F_{a,w}$: c'est un vecteur positif. X est de taille égale au nombre d'arcs évidemment.
On pose une matrice aA nulle presque partout sauf en certains coefficients où on aura soit des 1 soit des –1 La taille de cette matrice est
n= nombre de nœud *nombre d'arcs
Pour chaque arcs correspondant à chaque colonnes on trouvera un 1 correspondant au départ et un –1 correspondant au départ.
On constate que A est de rang r-1 avec r le nombre de nœuds puisque l'on vient de voir que sur chaque colonne on trouvera forcément un 1 et un –1 et des 0 partout.
On note b le vecteur nul presque partout sauf sur l'origine et l'arrivée où on trouve D_w et $-D_w$. Evidemment il est de la taille du nombre de nœuds.

En conclusion on a le problème (Baw) qui est équivalentau problème (PL_w) :

$$\text{Max } c^*x \quad \left|\begin{array}{l} Ax=b \\ x\geq 0 \end{array}\right.$$

Question5)

Il nous faut une base B du système (PL_w) est constituées de n-1 vecteurs colonnes de A, linéairement indépendants et tels que les vecteurs hors base s'expriment tous en fonction des vecteurs de la base.

Les arcs associés à la base B contiennent un cycle

$\Rightarrow$la somme des vecteurs de la base est nulle

Or cette somme est nulle voudrait dire qu'ils ne peuvent pas former une base car ils ne sont pas linéairement indépendants. Ce qui n'est pas possible.

CCl : les arcs associés à la base B ne peuvent pas contenir de cycles.

<u>Partie III</u> : <u>étude d'un problème simple avec coût de congestion.</u>

Question 7)

Dans cette question on va montrer que l'équilibre de Wardrop constitue un point fixe de (Sm) :

- Si $f_p > 0$, $C_p(f)=s_w$

  si $f_q = 0$ alors $f_p = -\sum_q f_p(C_p(f)-C_q(f)) = -\sum_q f_p(s_w-C_q(f))$ avec $C_q(f)>s_w$

  Donc $(s_w-C_q(f)) \leq 0$ et donc $s_w-C_q(f) = 0$

  D'où $f_p = 0$

  si $f_q > 0$ alors $C_q(f)=s_w$ et on a $f_p=0$

- Si $f_p = 0$, $C_p(f) \geq s_w$

  Si $f_q= 0$ alors $f_p= 0$

  Si $f_q > 0$ alors $C_q(f) = s_w$ d'où $f_p=\sum_q f_q^*(C_q(f)-C_p(f))=\sum_q f_q^*(s_w-C_p(f))$

Avec s_w-$C_p(f) \leq 0$ donc s_w-$C_p(f) = 0$ d'où f_p=0

On en déduit donc que l'équilibre de Wardrop est un point fixe de (Sm).

Il faut maintenant montrer que f satisfait à tout instant les contraintes (C) sachant qu'elle les vérifie à l'instant initial :

$$(C) \quad \left| \begin{array}{l} D_w = \sum f_p \quad \forall w \in W \\ \\ f_p \geq 0 \quad \forall p \in P_w \end{array} \right.$$

Pour chaque itinéraire, la somme des débits reste la même. La première condition de (C) est donc vérifiée à tout instant. Il reste donc à montrer que pour tout instant $fp \geq 0$:
Si à l'instant t, $f_p>0$, alors à l'instant t+1 aussi (on n'enlève qu'une partie infinitésimale).
Si à l'instant t, $f_p=0$, alors $C_p(f) \geq s_w$ donc $f_p=\sum f_q(C_p-C_q) \geq 0$, donc f_p ne peut pas décroître donc il reste >0.

Ainsi f satisfait à tout instant les conditions (C).

Montrons maintenant que la solution de (Sm) tend vers un équilibre de Wardrop.
Si $C_p \geq$tous les autres C_q, alors $f_p \leq 0$ donc f_p décroît.
Si $C_q \leq$tous les autres C_p, alors $f_p \geq 0$ donc f_p croît.
Ainsi, C_p converge vers la même valeur, notée s_w, pour tous les p où $f_p > 0$.

Comme (C) est vérifié à chaque instant on obtient que la solution de (Sm) tends vers l'équilibre de Wardrop.

Question 8)

Le coût total des utilisateurs qui vont de O à D est représenté par $\sum f_p C_p(f)$ et le nombre total d'utilisateurs qui vont de O à D est $\sum f_p$. Ainsi on en déduit que ς_w représente le coût moyen par usager.

Montrons que l'équilibre de Wardrop constitue un point fixe de (J).

- Si $f_p = 0$ on a $f_p = 0$.
- Si $f_p > 0$, alors $C_p(f) = s_w$. Par ailleurs on sait que $s_w = \varsigma_w$ car il représente tout deux le coût moyen. Ainsi $f_p = 0$

Donc l'équilibre de Wardrop constitue un point fixe de (J).

De même qu'à la question 7 on a :
Pour chaque itinéraire, la somme des débits reste la même. La première condition de (C) est donc vérifiée à tout instant. Il reste donc à montrer que pour tout instant $fp \geq 0$:
Si à l'instant t, $f_p>0$, alors à l'instant t+1 aussi (on n'enlève qu'une partie infinitésimale).
Si à l'instant t, $f_p=0$, alors $f_p = 0$ donc f_p ne peut pas décroître donc il reste >0.

Ainsi f satisfait à tout instant les conditions (C).

Montrons maintenant que la solution de (Sm) tend vers un équilibre de Wardrop.
Si $C_p \geq \varsigma_w$, alors $f_p \leq 0$ donc f_p décroît.
Si $C_q \leq \varsigma_w$, alors $f_p \geq 0$ donc f_p croît.
Ainsi, C_p converge vers la même valeur, notée s_w, pour tous les p où $f_p > 0$.

Donc la solution (J) tends vers l'équilibre de Wardrop.