FIASTRE Anaïs **1AG1**
LOUNI Ali

Mini-Projet de MRO : Autour des problèmes d'affectation du trafic

Partie I : transformation de Beckman et applications

Question 1 :

Selon le principe de Wardrop, comme chaque utilisateur utilise forcément l'itinéraire le moins cher, et pas un autre, tous les itinéraires utilisés ont donc le même prix et ce prix et inférieur aux prix des itinéraires non utilisés. Cela peut s'écrire sous la forme :

$$(W1) \qquad \begin{aligned} C_p(f) &= s_w \text{ si } f_p > 0 \ (\mathrm{p} \in \mathrm{P_w}) \\ C_p(f) &\geq s_w \text{ si } f_p = 0 \ (\mathrm{p} \in \mathrm{P_w}) \end{aligned}$$

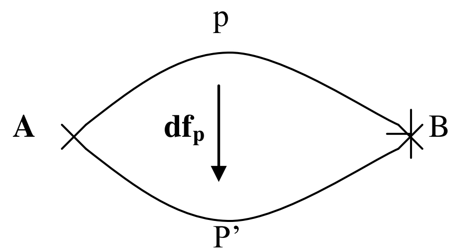
Question 2 :

Montrons d'abord que la dérivée partielle du critère de (B) relativement à f_p est égale à $C_p(f)$:

$$\frac{d}{df_p}\left(\sum_{a\in \mathrm{A}}\int_0^{F_a} C_a(\Phi)d\Phi\right) = \sum_{a\in A}\frac{d}{df_p}\left(\int_0^{F_a} C_a(\Phi)d\Phi\right) = \sum_{a\in A}(C_a(F_a) - C_a(0)) = \sum_{a\in A} C_a(F_a) = C_p(f)$$

Notons U le critère de (B) : $\dfrac{dU}{df_p} = C_p(f)$. U représente le coût global.

Si pour une origine A et une destination B, on considère maintenant deux itinéraires p et p' :



On considère qu'une infime partie du débit de l'itinéraire p est déplacée sur l'itinéraire p'.

$$MinU \Leftrightarrow \frac{dU}{df_p} = 0$$

$$\text{Or dU} = \frac{\partial U}{\partial f_p}df_p + \frac{\partial U}{\partial f_{p'}}df_{p'} = C_p(f).df_p + C_{p'}(f).(-df_p)$$

$$\text{D'où } C_p(f) = C_{p'}(f) = s_w.$$

Ainsi, on comprend que les itinéraires utilisés ont effectivement tous le même coût s_w.

D'où : <u>TOUTE SOLUTION DE (B) SATISFAIT A W1 ET CONSTITUE UN EQUILIBRE DE WARDROP</u>.

Partie II : cas de coûts c_a indépendants de la demande

Question 3 :

Interprétons la contrainte : $G_w^i = \sum_{a \in \Gamma^-(i)} F_{a,w} - \sum_{b \in \Gamma^+(i)} F_{b,w}$

F_a représente tous les gens qui passent par l'arc (a) alors que $F_{a,w}$ représente tous les gens qui passent par l'arc (a) **parce qu'ils suivent l'itinéraire w**.

Prenons l'exemple d'une ville découpée en plusieurs quartiers. Le graphe associé est constitué de rues (les arcs) et de carrefours (les sommets). Pour évaluer le trafic, chaque quartier a un seul « point de ralliement » comme origine ou destination. Cela signifie que tous les sommets du graphe ne sont pas origine ou destination d'un itinéraire. Pour qu'une personne puisse aller d'un endroit A à un endroit B, on considérera qu'elle va en réalité du point de ralliement le plus proche de A, jusqu'au point de ralliement le plus proche de B.

Ainsi, la contrainte G_w^i représente le débit qui passe par i, pour tous les couples OD dont des itinéraires passent par i. Il y a un signe + pour tous les arcs entrants et un signe – pour tous les arcs sortants.

On peut à présent décomposer le problème (BA) en problèmes indépendants (BA_w) dont chacun est relatif à un seul couple OD w.
Les contraintes vraies pour tout w restent vraies pour un w particulier : elles ne changent donc pas.

$$\underset{F}{Min} \sum_{a \in A} c_a(F_a).F_a$$

$$\left| \begin{array}{l} G_w^i = \sum_{a \in \Gamma^-(i)} F_{a,w} - \sum_{b \in \Gamma^+(i)} F_{b,w} \quad \forall i \in X \\ \mathrm{F_{a,w}} \geq 0 \quad \forall \mathrm{a} \in \mathrm{A} \\ \text{avec } \mathrm{G_w^i} = D_w \text{ si i} = \mathrm{D(w)} \\ \qquad \mathrm{G_w^i} = -D_w \text{ si i} = \mathrm{O(w)} \\ \qquad \mathrm{G_w^i} = 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

Question 4 :

Notons x le vecteur colonne des $F_{a,w}$. C'est un vecteur positif. Il y a autant de $F_{a,w}$ que d'arcs donc x est de taille « nombre d'arcs ».
Notons c le vecteur ligne des coûts de chaque arc. Il est de taille « nombre d'arcs ».

On constate alors que, puisqu'il n 'y a pas congestion :

$$Max \text{ c.x} = \underset{\mathrm{F}}{\mathrm{Min}} \sum_{a \in A} \int_0^{F_a} c_a(\Phi) d\Phi$$

Notons A la matrice constituée de 0 partout sauf en des points précis où l'on trouvera des 1 et des -1. Cette matrice A est de taille (« nombre de nœuds » × « nombre d'arcs »), et pour chaque arc, i.e chaque colonne, on trouve un +1 au nœud « arrivée » de cet arc et un -1 au nœud « départ » de cet arc ; partout ailleurs on trouve des O puisque l'arc n'a pas de lien avec les autres nœuds mais seulement avec deux.
On constate que A EST DE RANG n-1 (si n=nombre de nœuds) puisque l'on vient de voir que sur chaque colonne on trouvera forcément un +1, un -1 et des O partout ailleurs. On en déduit que la dernière ligne de A se déduit des autres (exemple : si pour une colonne, il y a des 0 partout et un +1, la dernière ligne sera -1).
Notons b le vecteur colonne constitué de 0 partout sauf à l'origine et à la destination où on trouve respectivement $-D_w$ et D_w. Il est de taille « nombre de nœuds ».

Le problème (BA_w) est alors équivalent au problème (PL_w) :

$$\mathit{Max}\ \mathrm{c.x} \quad \left|\begin{array}{l} \mathrm{A.x} = \mathrm{b} \\ \mathrm{x} \geq 0 \end{array}\right.$$

Question 5 :

Une base B du système (PL_w) est constituée de n-1 vecteurs colonnes de la matrice A, linéairement indépendants et tels que les vecteurs hors base s'expriment tous en fonction des vecteurs de la bas.
Dire que les arcs associés à la base B contiennent un cycle revient à dire que la somme des vecteurs de la base est égale au vecteur nul, vue la définition de A. Or si cette somme est nulle, cela signifie que ces vecteurs ne sont pas linéairement indépendants, donc ne peuvent pas former une base. Donc c'est impossible.
Conclusion : LES ARCS ASSOCIES A LA BASE B NE PEUVENT PAS CONTENIR DE CYCLE.

Partie III : étude d'un problème simple avec coût de congestion

Question 7 :

Montrons que l'équilibre de Wardrop constitue un point fixe de (Sm) :

- Si $f_p>0$, $C_p(f)=s_w$.

-Si $f_q=0$, alors $\dot{f}_p = -\sum_{q \in P_w} f_p (C_p(f) - C_q(f))_+ = -\sum_{q \in P_w} f_p (s_w - C_q(f))_+$ avec $C_q(f) \geq s_w$.
Donc $s_w - C_q(f) \leq 0$, donc $(s_w - C_q(f))_+ = 0$.
D'où $\dot{f}_p = 0$.
-Si $f_q>0$, alors $C_q(f)=s_w$ et on a aussi $\dot{f}_p = 0$.

- Si $f_p=0$, $C_p(f) \geq s_w$

-Si $f_q=0$ aussi, alors $\dot{f}_p = 0$.
-Si $f_q>0$, on a $C_q(f)=s_w$. Donc $\dot{f}_p = \sum_{q \in P_w} f_q (C_q(f) - C_p(f))_+ = \sum_{q \in P_w} f_q (s_w - C_p(f))_+$

avec $s_w - C_p(f) \leq 0$ donc $(s_w - C_p(f))_+ = 0$
D'où $\dot{f}_p = 0$.

Conclusion : L'EQUILIBRE DE WARDROP CONSTITUE UN POINT FIXE DE (Sm).

À présent, considérons que f satisfait aux contraintes (C) à l'instant initial. Montrons que f satisfait aux contraintes (C) à tout temps.

$$(C)\quad \left|\begin{array}{l} D_w = \sum_{p \in P_w} f_p \ \forall w \in W \\ f_p \geq 0 \ \forall p \in P_w \end{array}\right.$$

À la suite d'un échange incrémental de flot entre les différents itinéraires du réseau, la somme des débits de chaque itinéraire reste la même. Donc la première contrainte de (C) est vérifiée à tout temps.
Il faut maintenant montrer que $f_p \geq 0$ à tout temps.
Si à l'instant t, $f_p > 0$, alors à l'instant t+1 aussi (on n'enlève qu'une partie infinitésimale).
Si à l'instant t, $f_p = 0$, alors $C_p(f) \geq s_w$ donc $\dot{f}_p = \sum_{q \in P_w} f_q (C_p - C_q) \geq 0$, donc f_p ne peut pas décroître donc il reste >0.

Conclusion : SI f SATISFAIT AUX CONTRAINTES (C) A L'INSTANT INITIAL, ALORS f SATISFAIT AUX CONTRAINTES A TOUT TEMPS.

Montrons maintenant que la solution de (Sm) tend vers un équilibre de Wardrop.
Si $C_p \geq$ tous les autres C_q, alors $\dot{f}_p \leq 0$ donc f_p décroît.
Si $C_q \leq$ tous les autres C_p, alors $\dot{f}_p \geq 0$ donc f_p croît.
Ainsi, C_p converge vers la même valeur, notée s_w, pour tous les p où $f_p > 0$.
De plus, comme (C) est vérifiée à tout temps si elle est vraie initialement, on a que :

LA SOLUTION DE (Sm) TEND VERS L'EQUILIBRE DE WARDROP.

Question 8 :

Étant donné que $\sum_{p \in P_w} f_p . C_p(f)$ représente le coût total des utilisateurs qui vont de O à D et que $\sum_{p \in P_w} f_p$ représente le nombre total d'utilisateurs qui vont de O à D, on en déduit que :

ς_w REPRESENTE LE COUT MOYEN PAR USAGER.

Montrons que l'équilibre de Wardrop constitue un point fixe de (J).

- Si $f_p = 0$, on a $\dot{f}_p = 0$.
- Si $f_p > 0$, alors $C_p(f) = s_w$. Or il est évident que $s_w = \varsigma_w$ puisqu'ils représentent tous deux le coût moyen. Donc $\dot{f}_p = 0$.

Conclusion : L'EQUILIBRE DE WARDROP CONSTITUE UN POINT FIXE DE (J).

De la même manière que pour la question 7 :
À la suite d'un échange incrémental de flot entre les différents itinéraires du réseau, la somme des débits de chaque itinéraire reste la même. Donc la première contrainte de (C) est vérifiée à tout temps.
Il faut maintenant montrer que $f_p \geq 0$ à tout temps.
Si à l'instant t, $f_p > 0$, alors à l'instant t+1 aussi (on n'enlève qu'une partie infinitésimale).
Si à l'instant t, $f_p = 0$, alors $\dot{f}_p = 0$, donc f_p ne peut pas décroître donc il reste >0.

Conclusion : si F SATISFAIT AUX CONTRAINTES (C) A L'INSTANT INITIAL, ALORS F SATISFAIT AUX CONTRAINTES (C) A TOUT TEMPS.

De même encore :
Si $C_p \geq \varsigma_w$, alors $\dot{f}_p \leq 0$ donc f_p décroît.
Si $C_p \leq \varsigma_w$, alors $\dot{f}_p \geq 0$ donc f_p croît.
Ainsi, C_p converge vers une même valeur s_w.
De plus comme (C) est vérifiée à tout temps, on a que :

LA SOLUTION DE (J) TEND VERS L'EQUILIBRE DE WARDROP.

Question 9 :

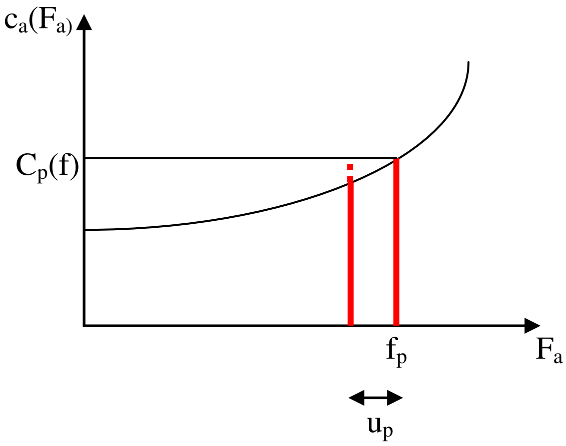
Il s'agit en fait de montrer que

$$Max \ - \sum_{p \in P} \mathrm{u_p} C_p(f)$$
$$\left| \begin{array}{l} \sum_{p \in P_w} \mathrm{u_p} = 0 \quad \forall \mathrm{w} \in \mathrm{W} \\ \mathrm{u_p} \geq 0 \quad \forall \mathrm{p} \in \mathrm{P/f_p} = 0 \end{array} \right.$$

est approximativement équivalent à (B).

Si $u_p = \dot{f}_p$, alors :

- Si $\sum_{p \in p_w} f_p = D_w$, alors $\sum_{p \in P_w} \dot{f}_p = \sum_{p \in P_w} u_p = 0$
- Si $f_p = 0$, alors l'échange incrémental de flot entre les différents itinéraires du réseau ne peut qu'être positif, i.e $\dot{f}_p = u_p \geq 0$.
- Pour le critère :



L'aire de la zone sous la courbe vaut $\int_0^F c_a(\Phi)d\Phi$, alors que l'aire du rectangle rouge épais est $u_p.C_p(f)$.

Ainsi, grâce à une méthode d'approximation de l'intégrale par des rectangles (somme de Riemann), on a :

$$\sum_{a\in A}\int_0^F c_a(\Phi)d\Phi \approx \sum_{p\in P} u_p C_p(f)$$

Et comme un Min se transforme en –Max, on a bien que :

LA SOLUTION $U(f)=(u_p)_{p\in P}$ DU PROGRAMME LINEAIRE CONSTITUE UNE APPROXIMATION DU GRADIENT PROJETE.