

# Résolution d'un problème avec coefficient discontinu

## Comparaison des méthodes numériques LPDEM et EFG

Amandine BROSSE  
Blandine CHAUVIN  
Emilie MORDACQUE

ENTPE  
Calcul scientifique  
11 mai 2005

# PROBLEME POSE

$$\begin{cases} -(b(x)u')' = 1 & \text{si } 0 < x < 1 \quad (E) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{avec } b(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \\ 100 & \text{si } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

# RESOLUTION ANALYTIQUE

# RESOLUTION ANALYTIQUE

- Résolution sur  $I_1 = ]0; 1/2[$

$$\exists (a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall x \in I_1, u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + a_0x + b_0$$

- Résolution sur  $I_2 = ]1/2; 1[$

$$\exists (a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall x \in I_2, u(x) = -\frac{1}{200}x^2 + a_1x + b_1$$

# DETERMINATION DES CONSTANTES

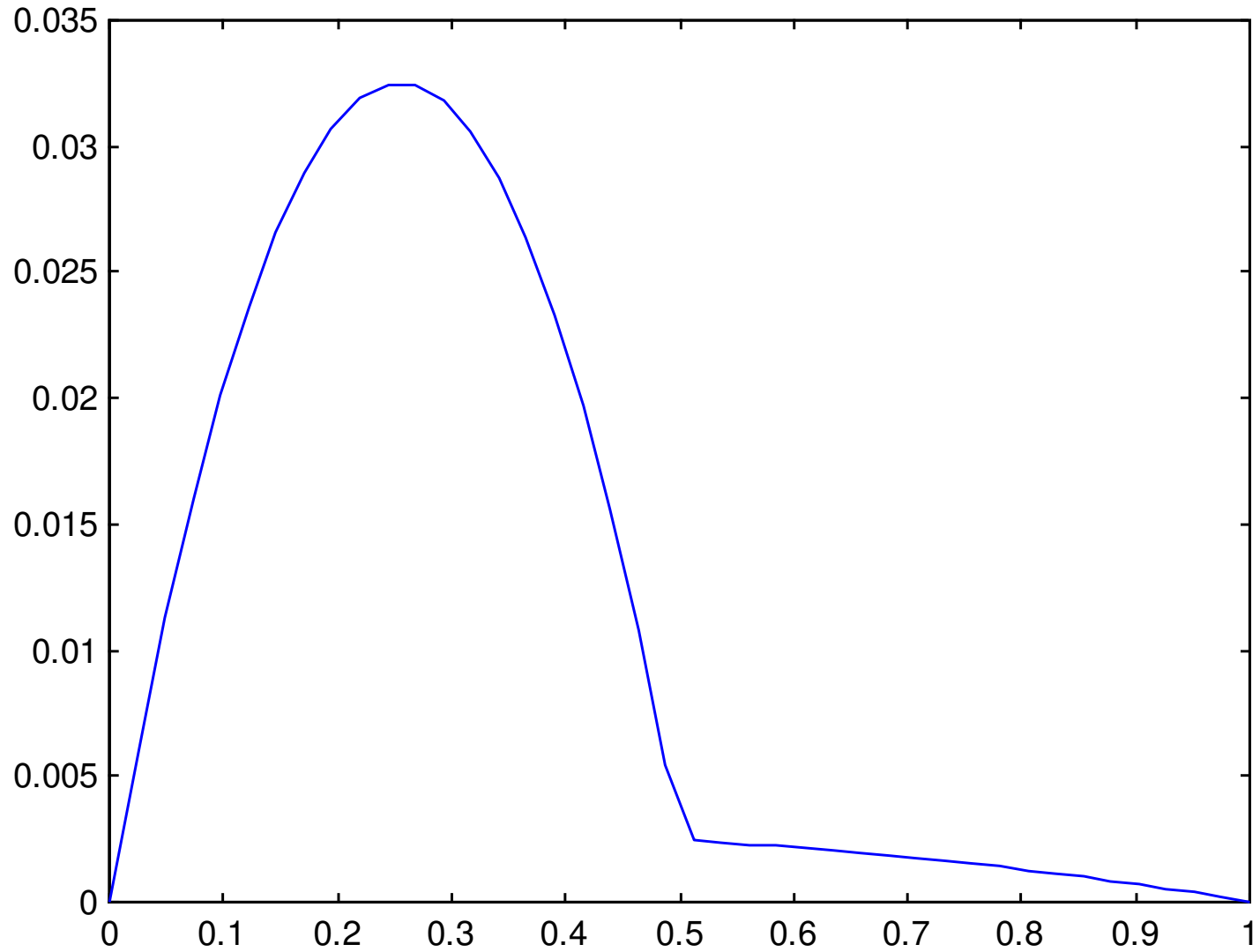
$$\begin{cases} -(b(x)u')' = 1 & \text{si } 0 < x < 1 & (E) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

- Continuité de  $u$  en 0
- Continuité de  $u$  en 1
- Continuité de  $u$  en  $\frac{1}{2}$
- Continuité de  $bu'$  en  $\frac{1}{2}$

# SOLUTION EXACTE

$$u : \left[ \begin{array}{l} [0;1] \rightarrow \mathfrak{R} \\ x \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{103}{404}x \quad \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{200}x^2 + \frac{103}{40400}x + \frac{99}{40400} \quad \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

# GRAPHE DE $u$



Graphe

# SCHEMAS NUMERIQUES



# ETABLISSEMENT DU SCHEMA LPDEM

$$(2) \begin{cases} \forall x \in I : -(a(x)u')' = f'(x) \\ + \text{conditions aux limites} \end{cases}$$

Introduction de la fonction  $\varphi$  :

$$\varphi : x \rightarrow a(x) * u'(x) + f(x)$$

# SCHEMA LPDEM

$$\left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{a(t)} dt \right) \times u_{i-1} - \left( \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{1}{a(t)} dt \right) \times u_i + \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{a(t)} dt \right) \times u_{i+1} =$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{a(t)} dt \times \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f(t)}{a(t)} dt - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{a(t)} dt \times \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{f(t)}{a(t)} dt$$

# SCHEMA EFG

$$-\left(\frac{1}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{a(t)} dt}\right) \times u_{i-1} + \left(\frac{1}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{a(t)} dt} + \frac{1}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{a(t)} dt}\right) \times u_i - \left(\frac{1}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{a(t)} dt}\right) \times u_{i+1} =$$

$$\frac{1}{h} \times \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t) dt - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt \right)$$

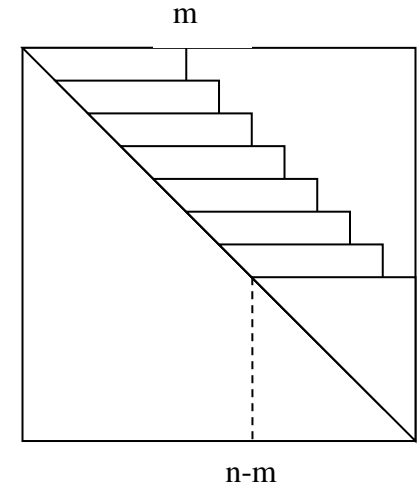
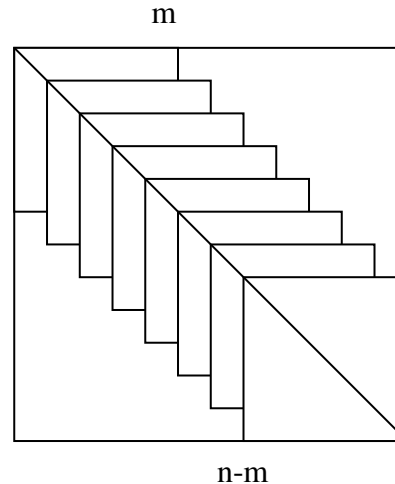
# RESOLUTION NUMERIQUE

# RESOLUTION NUMERIQUE

- Obtention d'un système linéaire  $Ax=B$   
A matrice tridiagonale
- Résolution
  - Méthode de Gauss
  - Méthode S.O.R.
- Erreur en norme infinie discrète

# METHODE DE GAUSS

- Pivot maximum
- Matrice bande



- Nombre d'opérations

	Fonction Gauss	Fonction GaussBand
Nombre de divisions	$n(n+1)/2$	$(m+1)(2n-m)/2$
Nombre d'additions et de multiplications	$n(n+1)(2n+5)/6$	$(n-m)m(m+2) + m(m-1)(2m+5)/6$

# METHODE S.O.R.

Pour les matrices tridiagonales :

$$\omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(\mathbf{L}_1)}} \quad \text{si } \rho(\mathbf{L}_1) \leq 1$$

# RESULTATS

- Comparaison des deux schémas numériques (avec la méthode de Gauss)

	<b>EFG</b>	<b>LPDEM</b>
<b><math>h = 1/5</math></b>	<b>3.92e-003</b>	<b>1.73e-017</b>
<b><math>h = 1/21</math></b>	<b>2.64e-004</b>	<b>6.94e-018</b>
<b><math>h = 1/41</math></b>	<b>7.11e-005</b>	<b>3.47e-017</b>
<b><math>h = 1/81</math></b>	<b>1.84e-005</b>	<b>3.47e-017</b>
<b><math>h = 1/101</math></b>	<b>1.194e-005</b>	<b>5.55e-017</b>
<b><math>h = 1/151</math></b>	<b>5.34e-006</b>	<b>2.50e-016</b>



# EXEMPLE $h=1/5$

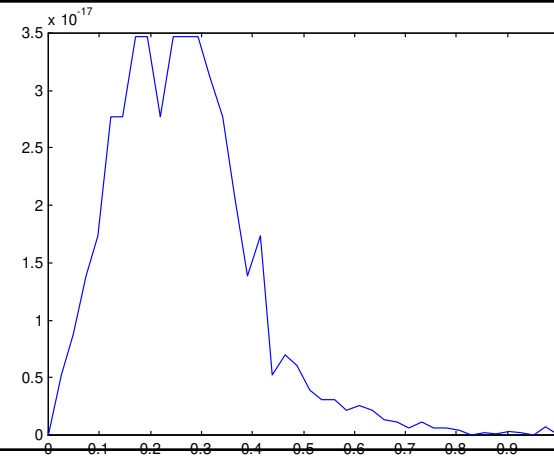
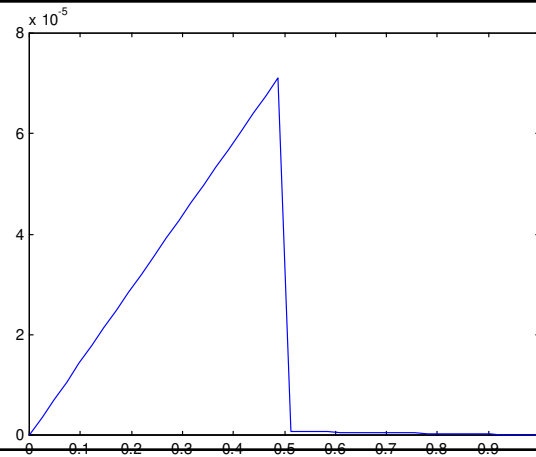
	Méthode	EFG	LPDEM
	Gauss	3.92e-003	1.73e-017
$s=0,01$	SOR ( $w=0,1$ )	3.84e-003	3.10e-002
	k_SOR	131	0
	SOR2 ( $w_0$ )	3.87e-003	3.10e-002
	k_SOR2	4	0
$s=10^{-14}$	SOR ( $w=0,1$ )	3.92e-003	1.12e-013
	k_SOR	1045	804
	SOR2 ( $w_0$ )	3.92e-003	8.58e-015
	k_SOR2	21	18

# TRACE D'ERREURS POUR $h=1/41$

EFG

LPDEM

Gauss



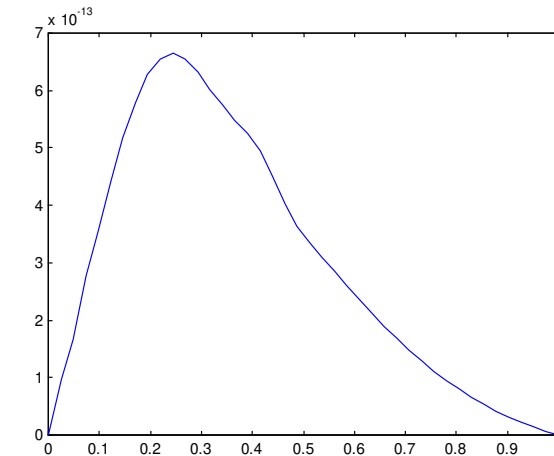
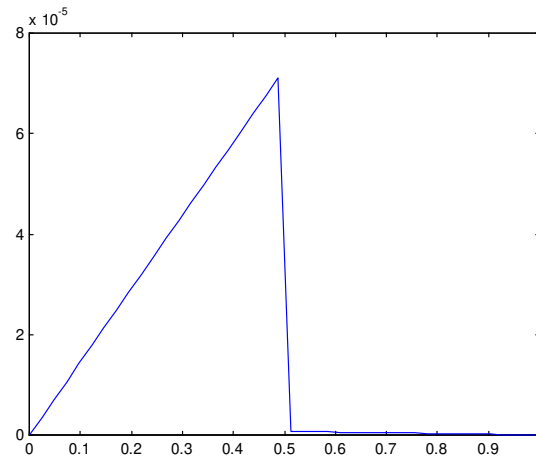
max

x(20h)

x(7h)

SOR2

$w_0$   
 $s=10^{-14}$



max

x(20h)

x(10h)

# CONCLUSION

- **Le schéma LPDEM est beaucoup plus performant que le schéma EFG.**
- Performance Gauss / S.O.R.  
Critère d'arrêt...