Mathématiques

Exercices d'Analyse

(première édition)

Tibye Saumtally

Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat
rue Maurice Audin
69518 Vaulx-en-Velin Cedex

Avant-propos

Ce recueil d'exercices s'adresse aux étudiants de première année de l'ENTPE et de l'ENTM. Il suit la progression du cours d'Analyse de Claude-Henri Lamarque qu'il complète en reprenant partiellement et en augmentant le corpus d'exercices déjà présents dans ce cours.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé à réaliser ce document, pour leurs conseils ou leur relecture de tout ou partie du tapuscrit : Claude-Henri Lamarque, Francis Nézondet et Patrick Royis à l'ENTPE ; Jean-Luc Léone, Patrice Pédron et Jérôme Stéphan à l'ESCOM.

Toute remarque concernant l'amélioration de ce polycopié sera la bienvenue à l'adresse suivante : saumtally@entpe.fr.

Tibye Saumtally
Vaulx-en-Velin, mardi 6 juin 2006

Table des matières

Première partie
Mesure, intégration et applications

La théorie de l'intégration de Riemann multiplie les conditions restrictives. Par la suite, plusieurs mathématiciens proposèrent d'autres théories. Henri Lebesgue obtint la plus performante en introduisant les ensembles et les fonctions mesurables et en étendant la notion de *longueur* à celle de *mesure*. Le théorème de convergence dominée est l'outil mathématique particulièrement efficace qui s'en dégage.
Voici quelques exercices sur les tribus et les mesures avant d'attaquer ce qui fait l'essence de cette partie : l'utilisation des théorèmes de convergence monotone, de Fatou et de convergence dominée. Viennent ensuite quelques calculs d'intégrales utilisant le théorème de Fubini. Enfin, on termine par la transformée de Fourier qui est un domaine d'application privilégié de l'intégrale de Lebesgue.

Exercice 1

Soit X un ensemble et Y un sous-ensemble de X.
1/ Pour toute famille $\mathcal{B}$ de parties de X, on note $\mathcal{B}_Y = \{Y \cap T; T \in \mathcal{B}\}$.
1a/ Prouver que si $\mathcal{B}$ est une tribu sur X, alors $\mathcal{B}_Y$ est une tribu sur Y.
1b/ Si $Y \in \mathcal{B}$, expliciter $\mathcal{B}_Y$.
2/ Pour toute famille $\mathcal{A}$ de parties de Y, on note $\mathcal{A}^Y = \{T \subset X \,/\, T \cap Y \in \mathcal{A}\}$.
2a/ Prouver que si $\mathcal{A}$ est une tribu sur Y, alors $\mathcal{A}^Y$ est une tribu sur X.
2b/ Dans cette question, $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^-$ et $\mathcal{A}$ est la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^-$.
Expliciter $\mathcal{A}^Y$.

Exercice 2

1/ Prouver que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est une réunion dénombrable de rectangles ouverts $]a, b[\times]c, d[$.
2/ En déduire que la tribu engendrée par les rectangles ouverts de $\mathbb{R}^2$ est la tribu Borélienne de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

Soit X un ensemble non vide. On considère l'espace mesurable $(X, \mathcal{P}(X))$.
$i)$ On définit l'application $\mu_1 : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0; +\infty]$ par :

$\mu_1(A) = \text{Card}(A)$ si A est fini ;
$\mu_1(A) = +\infty$ sinon.

$ii)$ On fixe a dans X. On définit l'application $\mu_2 : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0; +\infty]$ par :

$\mu_2(A) = 1$ si $a \in A$;
$\mu_2(A) = 0$ si $a \notin A$.

Prouver que μ_1 et μ_2 sont des mesures positives.

Exercice 4

On considère $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ où μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ (voir μ_1 de l'exercice 3).
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ converge vers un réel M.
Pour $x > 0$ fixé, on définit $A_x = \{k \in \mathbb{N}/a_k > x\}$.
1/ Prouver que $\mu(A_x) \leqslant \dfrac{M}{x}$.
2/ Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mu(A_x) = 0$.

Exercice 5

Une application monotone $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est-elle toujours mesurable pour la tribu de Borel sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $g : X \longrightarrow [\,0\,;\,+\infty\,]$ une fonction mesurable.

Soit $E \in \mathcal{M}$ tel que $\displaystyle\int_E g d\mu = 0$.

Prouver que $g = 0$ p.p. sur E.

Indication : considérer les ensembles $A_n = \{x \in E/\, g(x) > \frac{1}{n}\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7 ***Inégalité de Bienaymé-Chebychev.***

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable.

On suppose qu'il existe $p > 0$ tel que $\int_X |f|^p d\mu < +\infty$.

Prouver que $\forall a > 0$, $\mu(\{x/|f(x)| \geqslant a\}) \leqslant \dfrac{1}{a^p} \displaystyle\int_X |f|^p d\mu$.

(Dans la pratique, p sera le plus souvent égal à 1 ou à 2.)

Exercice 8 ***Lemme de Borel-Cantelli.***

Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une famille dénombrable de sous-ensembles d'un ensemble F, on note :

$$\overline{\lim} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geqslant n} E_k$$

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$.

0/ Vérifier que $\overline{\lim} A_i \in \mathcal{M}$.

1/ Prouver que $\Big(\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) < +\infty\Big) \Longrightarrow \big(\mu(\overline{\lim} A_i) = 0\big)$.

2/ On suppose ici que $\mu(X) = 1$ et que les A_i sont indépendants, c'est-à-dire :
$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall \{i_1, i_2, \dots i_k\} \subset \mathbb{N}^k$, $\mu(A'_{i_1} \cap A'_{i_2} \cap \dots \cap A'_{i_k}) = \mu(A'_{i_1}) \times \mu(A'_{i_2}) \times \dots \times \mu(A'_{i_k})$ où A'_j représente soit A_j soit A_j^c.

Prouver que $\Big(\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) = +\infty\Big) \Longrightarrow \big(\mu(\overline{\lim} A_i) = 1\big)$.

Exercice 9 ***Convergence en mesure.***

Soit μ une mesure positive sur X.

Définition : dire qu'une suite de fonctions complexes et mesurables $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur X *converge en mesure* vers la fonction mesurable f signifie :

$$\forall a > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mu(\{\, x/\, |f_n(x) - f(x)| \ >\ a\,\}) = 0.$$

(*Remarque* : si $\mu(X) = 1$, la définition précédente est celle de la *convergence en probabilité*.)

1/ Prouver que si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f_n \in L^1(X, \mu)$ et si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_1 = 0$, alors (f_n) converge vers f en mesure.

2/ Dans cette question, on suppose que $\mu(X) < \infty$ et qu'il existe $c \in [0, +\infty[$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, p.p.$x \in X$, $|f_n - f|(x) \leqslant c$.

Prouver que si (f_n) converge vers f en mesure, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_1 = 0$.

Exercice 10

1/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}dx$.

2/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx$.

Exercice 11

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[0;1]$ et à valeurs dans $[0;1]$.
On suppose de plus que $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=0$ p.p.$x\in[0;1]$.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$.

Exercice 12

Soit$f$ une fonction Lebesgue-intégrable sur $[0;1]$.

Calculer $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_0^1 f(x)\left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|^{\varepsilon}dx$ en fonction de l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice 13

La fonction *logarithme népérien* est notée log.

1/ Trouver la plus petite constante c telle que : $\forall t\geqslant0$, $\log(1+e^t)\leqslant c+t$.

2/ Soit $f:[\,0\,;\,1\,]\longrightarrow[\,0\,;\,\infty\,[$ telle que $f\in L^1([0,1])$.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_0^1\log\left(1+e^{nf(x)}\right)dx$.

Exercice 14

Soit $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré.

Définition : dire que μ est σ-finie signifie qu'il existe une famille dénombrable $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles mesurables de X tels que $X=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\omega_n$ et $\mu(\omega_n)<\infty$ pour tout n.

Prouver que μ est σ-finie si et seulement s'il existe une fonction intégrable f sur X telle que $\forall x\in X,\ f(x)>0$.

Exercice 15

Soit $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré. Soit $f\in L^1(\mu)$.

1/ *Notation* : $\{|f|\geqslant n\}$ désigne l'ensemble $\{x\in X/\,|f(x)|\geqslant n\}$.

Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_X|f|\chi_{\{|f|\geqslant n\}}d\mu=0$.

2/ En déduire que $\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0\,/\,\forall\,E\in\mathcal{M},\,\big(\mu(E)\leqslant\delta\Longrightarrow\int_E|f|d\mu\leqslant\varepsilon\big)$.

Exercice 16

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$.
Prouver que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 17

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur X à valeurs dans $[0; +\infty]$.
On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction f.
Soit $c \in]0; +\infty[$ une constante fixée.
On considère les quatre propriétés suivantes :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_X f_n d\mu \leqslant c$
(ii) la fonction f est μ-intégrable et $\int_X f d\mu \leqslant c$
(iii) la suite $\left(\int_X f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$
(iv) la suite $\left(\int_X f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_X f d\mu$

Les implications suivantes sont-elles vraies ?
1/ $(i) \Longrightarrow (ii)$
2/ $(i) \Longrightarrow (iv)$
3/ $((i)$ et $(iii)) \Longrightarrow (iv)$

Exercice 18

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L^p(\mu)$ telle que :

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_p = 0$
(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = g(x)$ p.p.x

Quelle relation existe-t-il entre f et g ?

Exercice 19

Soient f et g deux fonctions mesurables positives sur X telles que $fg \geqslant 1$. On suppose de plus que $\mu(X) = 1$. Prouver que $\int_X f d\mu . \int_X g d\mu \geqslant 1$.
Indication : appliquer Cauchy-Schwarz à $\sqrt{fg}$.

Exercice 20

Prouver que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1}\, dx = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Exercice 21

1/ Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{2n}(1-x)dx$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2$.

2/ En calculant de deux façons $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{2n}(1-x)dx$, obtenir $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)}$.

Exercice 22

On considère une fonction Lebesgue-mesurable $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0;+\infty[$.

1/ Prouver que $\displaystyle\int_0^1 \big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)\big)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$.

2/ En déduire que si f est Lebesgue-intégrable, alors la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge pour presque tout x relativement à la mesure de Lebesgue.

Exercice 23

1/ Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}\chi_{[-n,n]}$ prolongée par continuité en zéro est intégrable sur $\mathbb{R}$ au sens de Lebesgue et que $\displaystyle\left(\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2/ Prouver que la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ prolongée par continuité en 0 et définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ au sens de Lebesgue.

Exercice 24

Pour tout $x > 0$ on note $F(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-t}}{t}dt$.

0/ Prouver que $F(x)$ est bien défini pour tout $x > 0$.

1/ Prouver que $F \in \mathcal{C}^1(]0,+\infty[)$.

2/ Donner l'expression de $F'(x)$.

3/ En déduire l'expression de $F(x)$.

4/ Soient a et b deux réels strictement positifs. Calculer $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}dt$.

Exercice 25 ***Fonction Gamma d'Euler.***

Pour $x > 0$ on note $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

0/ Prouver que $\Gamma(x)$ est bien défini.

1/ Prouver que $\Gamma \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}_+^*)$.

2/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \Gamma(x)$.

3a/ Prouver que pour tout $x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3b/ Déduire de 3a/ que pour tout entier naturel n, on a $\Gamma(n+1) = n!$.

3c/ Déduire de 3a/ un équivalent de $\Gamma(x)$ en 0.

4a/ Prouver que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$.

4b/ En déduire que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

Exercice 26 ***Transformation de Laplace.***

1/ Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-xt}dt$ converge. Prouver que $\forall y > x$, $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-yt}dt$ converge.

2/ On suppose dans cette question que $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. ($\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions à valeurs réelles continues et bornées sur $\mathbb{R}^+$.)

2a/ Prouver que l'on peut définir l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} L_f : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-xt}dt \end{array}$$

2b/ Prouver que $L_f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

2c/ Prouver que $\forall n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} L_f^{(n)}(x) = 0$.

3/ On suppose dans cette question que $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et que $\int_0^{\infty} f(t)dt$ converge.

3a/ Démontrer que l'on peut définir l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} L_f : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-xt}dt \end{array}$$

3b/ Prouver que L_f est continue en 0.

4/ *Application* : prouver que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 27

En utilisant le théorème de Fubini, calculer $I = \int_0^{+\infty} \exp(-x^2)dx$.
Indication : considérer I^2.

Exercice 28

Soient $f_1(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ et $f_2(x,y) = \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$.
Calculer (si cela est possible) pour $i = 1$ et pour $i = 2$ les intégrales suivantes :
$I_i = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f_i(x,y)dx\right)dy$; $J_i = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f_i(x,y)dy\right)dx$; $K_i = \displaystyle\iint_{[0;1]^2} f_i(x,y)dxdy.$

Exercice 29

En utilisant la fonction

$$\begin{array}{rccc} g: & [0;1]\times[0;1]\times[0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,t) & \longmapsto & \dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)} \end{array}$$

démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt = \pi \log 2.$
Indication : on utilisera que p.p. en $(x,y) \in [0,1]^2$, on a

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)} = \frac{1}{x^2-y^2}\left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{y^2}{1+y^2t^2}\right)$$

Exercice 30

On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$. (Pour faire ce calcul, on peut décomposer $\dfrac{1}{1+y^4}$ en éléments simples et intégrer.)
1/ Soit $f : (x,y) \longmapsto \exp(-xy^2)\sin x$. Soit $a > 0$ fixé quelconque.
Prouver que f est intégrable sur $[0;a]\times[0;+\infty[$.
2/ En déduire que lorsque a tend vers $+\infty$, $\displaystyle\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^4} + o(1).$
3/ Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(u^2)du.$

Exercice 31

Soit f une fonction positive telle que $f \in L^1(\mathbb{R})$.
Prouver que pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $|\mathcal{F}(f)|(y) \leqslant \mathcal{F}(f)(0)$.

Exercice 32

Prouver que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(f) \equiv 0$, alors $f \equiv 0$.

Exercice 33

Soit $a > 0$ fixé. On note $F(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi tx - at^2} dt$.
0/ Vérifier que $F(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.
1/ Prouver que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \dfrac{-2\pi^2}{a} xF(x)$.
2/ En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2 x^2}{a}}$.
Indication : on utilisera le résultat suivant : $\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} dt = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$.

Exercice 34

Soit $\lambda > 0$. On note H la fonction définie par $H(t) = e^{-2\pi\lambda|t|}$ sur $\mathbb{R}$.
1/ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\mathcal{F}(H)(x)$.
2/ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(2\pi ux)}{\lambda^2 + u^2} du$.
3/ Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(\lambda^2 + x^2)^2} dx$.

Exercice 35

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Résoudre $f * f = f$.

Exercice 36

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note g_n la fonction caractéristique de l'intervalle $[-n; n]$ (ou encore, $g_n = \chi_{[-n;n]}$).
1a/ Pour tout x réel, donner l'expression de $g_n * g_1(x)$.
1b/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout x réel, donner l'expression de $\mathcal{F}(g_n)(x)$.
2a/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin(2\pi x)\sin(2\pi n x)}{\pi^2 x^2} \end{array}$$

où f_n est prolongée par continuité en 0.
Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in L^1(\mathbb{R})$.
2b/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver que $g_n * g_1$ est la transformée de Fourier de la fonction f_n.

Exercice 37

Soit λ une constante strictement positive.
1a/ Prouver que la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\sin \lambda t}{t}$ n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R})$.
1b/ Peut-on définir la transformée de Fourier de f ?
2a/ Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} \frac{\sin \lambda t}{t} e^{-i2\pi t x} dt$.
On utilisera le résultat suivant : $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$.
2b/ Le résultat trouvé en 2a/ est-il contradictoire avec la réponse du 1b/ ?

Exercice 38

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |t\mathcal{F}(f)(t)| dt < +\infty$.
Prouver que f coïncide presque partout avec une fonction différentiable dont la dérivée est $x \longmapsto i2\pi \displaystyle\int_{\mathbb{R}} t\mathcal{F}(f)(t) e^{i2\pi x t} dt$.

Exercice 39

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que f admette presque partout une dérivée que l'on note f'.
Si on suppose que $f' \in L^1(\mathbb{R})$, peut-on en déduire que la transformée de Fourier de f' est $t \longmapsto i2\pi t \mathcal{F}(f)(t)$?

Exercice 40

On définit $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions à décroissance rapide :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) / \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \exists A_{m,n}(f) \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, |x^n f^{(m)}(x)| \leqslant A_{m,n}(f)\}.$$

1/ Donner des exemples de fonctions appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
2/ Prouver que la transformée de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 41

Résoudre dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'équation différentielle $(E) : y'' - y = \left(x^2 - \dfrac{3}{4}\right)\exp(-x^2)$.

Exercice 42

Soit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \exp(-x^2 + xy - y^2) \end{array}$$

1/ Prouver que $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$.
2/ Calculer $\mathcal{F}(f)(\xi_1, \xi_2)$.

Exercice 43

Si $x \in \mathbb{R}^n$, on note $||x||^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$.
Soit $a > 0$. On note H la fonction définie par

$$H : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(-a||x||^2) \end{array}$$

Calculer $\mathcal{F}(H)(\xi)$.

Exercice 44 ***Equation de la chaleur sur un intervalle non borné.***

On veut résoudre le problème suivant, où $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ où $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions à valeurs réelles continues et bornées sur $\mathbb{R}$ et où u désigne une fonction $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & \forall (x,t) \in \mathbb{R}\times]0;+\infty[\\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Sous les hypothéses précédentes, on cherche la (les ?) fonction(s) u telles que :

$$\begin{aligned} &(i) \quad \exists g \in L^1(\mathbb{R}) \,/\, \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \Big|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Big| \leqslant g(x) \\ &(ii) \quad \forall k \in \{0,1,2\},\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ x \longmapsto \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t) \in L^1(\mathbb{R}) \\ &(iii) \ \forall k \in \{0,1\},\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \lim_{|x|\to+\infty} \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t) = 0 \end{aligned}$$

(*Remarque* : d'après l'exercice 16, (iii) est une conséquence directe de (ii).)

1/ Soit u une solution du problème posé. Pour tout couple $(\xi,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ on note :

$$F_t(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t) e^{-i2\pi x\xi} dx.$$

1a/ Prouver que $\dfrac{\partial F_t}{\partial t}(\xi) = -4\pi^2\xi^2 F_t(\xi)$.

1b/ En déduire que $F_t(\xi) = \mathcal{F}(u_0)(\xi) e^{-4\pi^2\xi^2 t}$.

1c/ Prouver que $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}} dx$.

2/ Réciproquement, prouver que la fonction u ainsi définie est bien solution du problème posé.

Deuxième partie
Espaces de Hilbert, opérateurs et applications

L'analyse moderne s'est développée dans le cadre des espaces de Banach. On commence donc par quelques exercices d'ordre général sur ces espaces. Les espaces de Banach possédant la propriété de Baire, on en donne quelques applications. On s'intéresse ensuite aux espaces de Hilbert qui sont des espaces de Banach particuliers et dont les séries de Fourier constituent une application fondamentale. On termine par deux exercices sur les opérateurs.

Exercice 45

On note c_0 l'espace vectoriel des suites réelles qui convergent vers 0.
Si $u \in c_0$, on note $||u||_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
Prouver que $(c_0, ||.||_\infty)$ est un espace de Banach.

Exercice 46

On note $\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$.
Si $f \in \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$, on note $||f||_\infty = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$.
($||.||_\infty$ s'appelle la norme de la convergence uniforme.)
Prouver que $(\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R}), ||.||_\infty)$ est un espace de Banach.

Exercice 47

Soit c_0 l'espace des suites réelles qui convergent vers 0. On le munit de la norme :

$$||(u_n)||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

On définit la fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & c_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} \end{array}$$

Prouver que φ est continue, calculer sa norme et prouver que cette dernière n'est pas atteinte.

Exercice 48

On munit $\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ de la norme $||.||_\infty$ de la convergence uniforme.
On définit la fonction

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt \end{array}$$

Prouver que ψ est continue, calculer sa norme et prouver que cette dernière n'est pas atteinte.

<u>Exercice 49</u> ***Théorème de Riesz.***

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.
$||.||$ désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$.
$B'(0,1)$ est la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$: $B'(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, ||x|| \leqslant 1)$.
Pour $\varepsilon \in]0,1[$ donné, $N(\varepsilon)$ désigne le nombre minimal de boules (ouvertes par exemple) de rayon ε nécessaires pour recouvrir $B'(0,1)$.

1/ Prouver que $1 \leqslant \varepsilon^n N(\varepsilon)$.

2/ Soit $\{x_i\}_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille d'éléments de $B'(0,1)$ telle que $(i \neq j) \Longrightarrow ||x_i - x_j|| > \varepsilon$.

2a/ Prouver que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} B'\big(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\big) \subset B'\big(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}\big)$.

2b/ Prouver que $p \leqslant \left(1 + \dfrac{2}{\varepsilon}\right)^n$.

2c/ Soit $M = \max\{p \in \mathbb{N} \,/\, \exists\, (x_1, ..., x_p) \in B'(0,1)^p \ :\ (i \neq j) \Longrightarrow ||x_i - x_j|| > \varepsilon\,\}$.
Prouver que M est bien un maximum (c'est-à-dire que $M < +\infty$), puis que $M \geqslant N(\varepsilon)$.

3/ Soit E un espace vectoriel réel (qu'on ne suppose pas de dimension finie !).
On note $B'_E(0,1)$ sa boule unité fermée, que l'on suppose compacte : si on fixe ε dans $]0,1[$, on peut donc écrire que $B'_E(0,1) \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} B'(x_i, \varepsilon)$.
Soit F un sous-espace vectoriel quelconque de dimension finie de E.
On note $G = \text{vect}\{F; x_1; ...; x_{N(\varepsilon)}\}$ le sous-espace vectoriel de E engendré par F et la famille $\{x_i\}_{1\leqslant i\leqslant N(\varepsilon)}$.

3a/ Prouver que $\dim G \leqslant \dfrac{\log N(\varepsilon)}{-\log \varepsilon}$

3b/ Conclure que E est de dimension finie.

Exercice 50 ***Fonctions continues partout et dérivables nulle-part.***

Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ muni de la norme $||.||_\infty$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $F_n = \{f \in E \,/\, \exists t \in [0;1] : \forall s \in [0;1], |f(s) - f(t)| \leqslant n|s-t|\}$.
1/ Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est fermé dans E.
2/ Soit $f \in E$ telle que f soit dérivable en $t_0 \in [0;1]$. Prouver qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f \in F_n$.
3/ Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Int}(F_n) = \emptyset$ dans E.
4/ En déduire qu'il existe des fonctions continues sur $[0;1]$ qui ne sont nulle part dérivables sur $[0;1]$.

Exercice 51

Soient E, F et G trois espaces de Banach. Soit $\varphi : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire telle que :

(i) $\forall x \in E, y \longmapsto \varphi(x,y)$ est continue sur F
(ii) $\forall y \in F, x \longmapsto \varphi(x,y)$ est continue sur E

En utilisant le théorème de Banach-Steinhaus, prouver que φ est continue.

Exercice 52

Soit

$$T : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R}), ||.||_\infty & \longrightarrow & \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R}), ||.||_\infty \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

1/ Prouver que T est linéaire mais pas continu.
2/ Prouver que $G(T)$ le graphe de T est fermé.
3/ En utilisant le théorème du graphe fermé, prouver que $(\mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R}), ||.||_\infty)$ n'est pas un espace de Banach.

Exercice 53

Soit $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$. On munit $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ de la norme $||f||_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$, ce qui en fait un espace de Banach.
(*Certains résultats admis dans cet exercice ont été démontré dans l'exercice* 32.)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin(2\pi x)\sin(2\pi n x)}{\pi^2 x^2} \end{array}$$

1/ On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in L^1(\mathbb{R})$. Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n||_1 = +\infty$.
2/ On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction h_n telle que :

(i) $h_n \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$
(ii) $||h_n||_\infty = 1$
(iii) $h_n = \mathcal{F}(f_n)$

En utilisant le théorème de l'application ouverte, prouver que $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ est un sous-espace propre de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Exercice 54

Soit H un espace de Hilbert réel et $\varphi : H \longrightarrow H$ une application telle que :

$$\forall (x,y) \in H^2,\ \langle \varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle.$$

Prouver que φ est linéaire continue.

Exercice 55

Calculer $\displaystyle\min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} |x^3 - ax^2 - bx - c|^2 dx.$

Exercice 56

Soit H un espace de Hilbert réel.
1/ Soit K un sous-espace vectoriel fermé de H. On note P_K le projecteur orthogonal de H sur K.

Prouver que (i) $P_K^2 = P_K$
(ii) $\forall (x,y) \in H^2, \langle P_K(x), y\rangle = \langle x, P_K(y)\rangle$

2/ Réciproquement, on considère une application $R : H \longrightarrow H$ telle que

(i) $R^2 = R$
(ii) $\forall (x,y) \in H^2, \langle R(x), y\rangle = \langle x, R(y)\rangle$

2a/ Prouver que R est linéaire.
2b/ Prouver que tout point de H admet une projection sur $\mathrm{Im}R$.
2c/ Prouver que R est le projecteur orthogonal de H sur $\mathrm{Im}R$.

Exercice 57

On considère l'espace vectoriel réel $l^2(\mathbb{N}^*) = \{(a_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sum\limits_{n\geqslant 1} a_n^2 < \infty\}$.

On munit $l^2(\mathbb{N}^*)$ du produit scalaire $\langle a, b\rangle = \sum\limits_{n\geqslant 1} a_n b_n$, ce qui en fait un espace de Hilbert.

On note alors $||a||_2 = \sqrt{\langle a, a\rangle}$.

Soit l'espace vectoriel réel $M = \{(a_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sum\limits_{n\geqslant 1} n^2 a_n^2 < \infty\}$.

1/ Prouver que $M \subset l^2(\mathbb{N}^*)$.

2/ Prouver que $M \neq l^2(\mathbb{N}^*)$.

3/ Prouver que $\overline{M}^{||.||_2} = l^2(\mathbb{N}^*)$. M est-il complet pour $||.||_2$?

4/ On munit M du produit scalaire $\langle\langle a, b\rangle\rangle = \sum\limits_{n\geqslant 1} n^2 a_n b_n$ et on note $|||a||| = \sqrt{\langle\langle a, a\rangle\rangle}$.

Prouver que $(l^2(\mathbb{N}^*), \langle ., .\rangle)$ et $(M, \langle\langle ., .\rangle\rangle)$ sont isométriques.

5/ En déduire que $(M, \langle\langle ., .\rangle\rangle)$ est un Hilbert.

Exercice 58

Soit H un espace de Hilbert réel et $u \in \mathcal{L}(H)$.

Prouver que : $\exists! v \in \mathcal{L}(H) / \forall (x, y) \in H^2, \langle u(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle$.

Exercice 59

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application 2π-périodique telle que $f \in L^1([0, 2\pi])$. Déterminer les coefficients de Fourier de $g : x \longmapsto (\cos x)f(x)$.

Exercice 60

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$.

0/ Représenter f sur quelques périodes.

1/ Calculer les coefficients de Fourier de f.

2/ En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 61

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \max(0, \sin x)$.

0/ Représenter f sur quelques périodes.

1/ Calculer les coefficients de Fourier de f.

2/ En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

Exercice 62

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = e^{iax}$ sur $[-\pi, \pi[$.

1/ Développer f en série de Fourier.

2/ Prouver que $\displaystyle\frac{\pi}{\sin a\pi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{a-n}$.

3/ En utilisant le théorème de Dirichlet, prouver que $\displaystyle\pi \operatorname{cotan} \pi a = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2}$.

4/ Prouver que $\displaystyle\left(\frac{\pi}{\sin a\pi}\right)^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(a-n)^2}$.

Exercice 63

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$.

1/ Exprimer les coefficients de Fourier de f' en fonction de ceux de f.

2/ Prouver que $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$.

3/ Caractériser les cas d'égalité.

Exercice 64

On note $C^0_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont continues et 2π-périodiques. On munit $C^0_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ de la norme $||f||_\infty = \sup_{-\pi\leq t\leq\pi} |f(t)|$ ce qui en fait un espace de Banach.

Pour tout $f \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on note $c_p(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ipt}dt$ le $p^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier de f.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [-\pi;\pi]$, on note $S_n(f)(x) = \displaystyle\sum_{p=-n}^{n} c_p(f)e^{inx}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application

$$L_n : \begin{array}{ccc} C^0_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & S_n(f)(0) \end{array}$$

1/ Trouver D_n tel que $S_n(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi} f * D_n(x)$. D_n s'appelle le noyau de Dirichlet, on en donnera une représentation graphique.
2/ On rappelle que $||L_n|| = \sup_{||f||_\infty=1} |L_n(f)|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver que L_n est une forme linéaire continue.
3/ Prouver que $||L_n|| = ||D_n||_1$.
4/ Prouver que $\lim_{n\to+\infty} ||L_n|| = +\infty$.
5/ En utilisant le théorème de Banach-Steinhaus, que peut-on conclure ?

Exercice 65

Soit $K : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$K(x,y) = x(1-y) \text{ si } x \leqslant y$$
$$K(x,y) = y(1-x) \text{ si } y \leqslant x$$

Soit

$$\begin{array}{rccc} A : & \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R}), ||.||_\infty & \longrightarrow & \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R}), ||.||_\infty \\ & f & \longmapsto & Af \end{array}$$

où $\forall x \in [0,1],\ Af(y) = \displaystyle\int_0^1 K(x,y)f(x)dx$

0a/ Prouver que pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$, on a bien $Af \in \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$.
0b/ Prouver que A est linéaire.
1a/ Prouver que $\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $|K(x,y)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
1b/ En déduire que A est continu.
1c/ A possède-t-il des points fixes ? Si oui, qui sont-ils ?
2/ Donner l'ensemble des valeurs propres et des vecteurs propres de A.

Exercice 66

Soit $K \in L^2([0,1]^2,\mathbb{R})$.
Soit

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & L^2([0;1],\mathbb{R}), ||.||_2 & \longrightarrow & L^2([0;1],\mathbb{R}), ||.||_2 \\ & f & \longmapsto & \Phi f \end{array}$$

où $\forall x \in [0,1],\ \Phi f(x) = \displaystyle\int_0^1 K(x,y)f(y)dy$.

0/ Prouver que Φ est linéaire.
1/ Prouver que Φ est continu et calculer sa norme.
2/ Prouver que Φ est autoadjoint.
3/ Φ est-il positif ?
4/ Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, prouver que $\mathrm{Ker}(\Phi - \lambda Id)$ est de dimension finie.

Indication : considérer H un sous-espace de dimension n de $\mathrm{Ker}(\Phi-\lambda Id)$ et $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une base orthonormée de H. Fixer $x \in [0,1]$. Pour tout n-uplet de réels $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, on a $0 \leqslant \int_0^1 \big(K(x,y) - \displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(y)\big)^2 dy$. En choisissant jusdicieusement les α_i, prouver que $\lambda^2 \displaystyle\sum_{i=1}^n f_i(x)^2 \leqslant \int_0^1 K^2(x,y)dy$ pour tout $x \in [0,1]$ et conclure.

Troisième partie
Introduction aux distributions et applications

L'idée de la théorie des distributions est d'étendre le calcul différentiel à un ensemble d'objets qui contient l'ensemble des applications différentiables et qu'on appelle *distributions* ou encore *fonctions généralisées*. Les physiciens utilisaient les distributions bien avant l'élaboration de leur théorie mathématique par Laurent Schwartz : une application particulièrement importante de cette théorie est l'utilisation des techniques de transformées de Fourier dans beaucoup de problèmes d'équations aux dérivées partielles qu'on rencontre naturellement en physique.

Exercice 67

Soit f une fonction sommable sur tout compact : cela signifie que pour tout sous-ensemble compact K de $\mathbb{R}$, on a $\int_K |f(x)|dx < +\infty$. On note aussi cela : $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.
Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on définit $\langle u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$.
Prouver que u est une distribution.
(On dit que u est la distribution associée à la fonction f.)

Exercice 68

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on définit $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$.
1/ Prouver que δ_a est une distribution.
2/ On note $\Upsilon = \sum_{\mathbb{Z}} \delta_n$. Prouver que Υ est une distribution.
(Υ est la distribution *peigne de Dirac*.)

Exercice 69

Prouver que la forme linéaire suivante v définit une distribution :
$\forall \varphi \in \mathcal{D}$, $\langle v, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)dx$.

Exercice 70

Prouver que la forme linéaire suivante w définit une distribution :
$\forall \varphi \in \mathcal{D}$, $\langle w, \varphi \rangle = \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn}(x)\varphi''(x)dx$.

Exercice 71

Existe-t-il $\varphi \in \mathcal{D}$ non nulle telle que : $\forall u \in \mathcal{D}', \langle u, \varphi \rangle = 0$?

Exercice 72

Existe-t-il $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ telle que : $\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle u_f, \varphi \rangle = \varphi(0)$? (u_f désigne la distribution associée à f.)

Exercice 73

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : x \longmapsto ne^{-n^2x^2}$.
1/ Déterminer la limite simple de (f_n).
2/ Déterminer la limite de (f_n) au sens des distributions.

Exercice 74 ***Valeur principale de $\frac{1}{x}$.***

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par :

$f_n(x) = \frac{1}{x}$ si $|x| \geqslant \frac{1}{n}$

$f_n(x) = 0$ si $|x| < \frac{1}{n}$

On définit l'objet u_n par : $\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle u_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)dx$.

0/ Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, u_n est une distribution. (u_n est la distribution associée à la fonction f_n.)

1/ Soit $R > 0$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ telle que $\text{supp}(\varphi) \subseteq [-R; R]$.

Vérifier qu'on a $\langle u_n, \varphi \rangle = \displaystyle\int_{\frac{1}{n} \leqslant |x| \leqslant R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx$.

2/ En déduire que (u_n) converge au sens des distributions vers la distribution v appelée *valeur principale de* $\frac{1}{x}$ définie par : $\langle \text{vp}\big(\frac{1}{x}\big), \varphi \rangle = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_{\frac{1}{n} \leqslant |x|} \frac{\varphi(x)}{x} dx$.

Exercice 75 ***Résolution d'une équation au sens des distributions.***

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et u une distribution.

On définit le produit noté $f.u$ par : $\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle f.u, \varphi \rangle = \langle u, f.\varphi \rangle$. Alors $f.u$ est une distribution.

1/ Prouver que $\forall a \in \mathbb{R}, f.\delta_a = f(a).\delta_a$. En déduire la valeur de $x.\delta_0$.

2/ On veut résoudre l'équation $x.u = 0$.

Supposons qu'il existe une distribution u solution de cette équation. Soit $\chi \in \mathcal{D}$ telle que $\chi(0) = 1$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}$.

2a/ Prouver qu'il existe une fonction ψ de $\mathcal{D}$ telle que $\forall x$, $\varphi(x) = \varphi(0)\chi(x) + x\psi(x)$.

2b/ En déduire qu'il existe une constante c qu'on exprimera en fonction de χ telle que $u = c.\delta_0$.

2c/ Résoudre l'équation $x.u = 0$.

3a/ Calculer $x.\text{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$.

3b/ Résoudre l'équation $x.u = 1$.

Exercice 76 ***Dérivée d'une distribution.***

Si u est une distribution, on définit l'objet u' par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle.$$

u' est une distribution. On dit que u' est la distribution dérivée de u.

$\mathcal{H}$ désigne *la fonction de Heavyside*. Elle est définie par :

$\mathcal{H}(x) = 1$ si $x > 0$

$\mathcal{H}(x) = 0$ si $x \leqslant 0$

1/ La fonction $\mathcal{H}$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

2/ Soit u la distribution associée à $\mathcal{H}$. Calculer la distribution dérivée de u (appelée *dérivée de $\mathcal{H}$ au sens des distributions*).

Exercice 77

Dériver la *fonction partie entière* au sens des distributions.

Exercice 78

Dériver f au sens des distributions dans les cas suivants :
1/ $f : x \longmapsto (\cos x)\mathcal{H}(x)$.
2/ $f : x \longmapsto (\sin x)\mathcal{H}(x)$.

Exercice 79

1/ Soit $\lambda < 0$.
Donner une expression plus simple pour la distribution u associée à la fonction

$$f = \left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)(x \longmapsto e^{\lambda x}\mathcal{H}(x)).$$

2/ Donner une expression plus simple pour la distribution v associée à la fonction

$$f = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}(x \longmapsto x^{n-1}\mathcal{H}(x)).$$

Exercice 80 ***Le dipôle.***

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = n^2\big(-\chi_{]-\frac{1}{n},0[}(x) + \chi_{]0,\frac{1}{n}[}(x)\big)$.
1/ Représenter graphiquement f_n et déterminer la limite simple de (f_n).
2/ Déterminer la limite de (f_n) au sens des distributions.

Exercice 81

1/ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distribution convergeant (au sens des distributions) vers u.
Prouver que (u_n') converge (au sens des distributions) vers u'.
2/ Prouver que toute série convergente de distributions est dérivable terme à terme.

Exercice 82

Soit u la distribution définie par : $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle u, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \log|x|\varphi(x)dx$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par :

$f_n(x) = \log|x|$ si $|x| \geqslant \frac{1}{n}$

$f_n(x) = \log(\frac{1}{n})$ sinon

On note u_n la distribution associée à f_n.
1/ Déterminer u_n'.
2/ Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \big|f_n(x) - \log|x|\big|\varphi(x)dx = 0$.
3/ En déduire la limite de (u_n) puis u'.

Exercice 83 ***Partie finie de*** $\frac{1}{x^2}$**.**

On note $\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\left(\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right)'$ la dérivée de *moins la valeur principale de* $\frac{1}{x}$, et on l'appelle *partie finie de* $\frac{1}{x^2}$.

1/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par :

$f_n(x) = \frac{1}{x^2}$ si $|x| \geqslant \frac{1}{n}$
$f_n(x) = 0$ si $|x| < \frac{1}{n}$

et on note u_n la distribution associée à f_n.
Prouver que $\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - 2n\delta_0)$.
2/ Prouver que $x^2.\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1$ puis résoudre l'équation $v.\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1$, d'inconnue $v \in \mathcal{D}$.

Exercice 84

On veut résoudre l'équation (E) : $x^2.u = 0$ où u est l'inconnue.
0/ Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$. Prouver qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 g(x)$.

Soit $\theta \in \mathcal{D}$ telle que :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant \theta(x) \leqslant 1$
(ii) si $x \in [-1;1]$, alors $\theta(x) = 1$
(iii) si $|x| \geqslant 2$, alors $\theta(x) = 0$

(l'existence d'une telle fonction est non triviale et est l'objet d'un théorème du cours).
Soit $\varphi \in \mathcal{D}$. On note $\psi : x \longmapsto \varphi(x) - \theta(x)(\varphi(0) + x\varphi'(x))$.
1/ Prouver que $\psi \in \mathcal{D}$ et que $\psi(0) = \psi'(0) = 0$.
2/ Soit u une solution de (E), prouver qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que $u = a\delta_0 + b\delta_0'$. (On utilisera que v est solution de l'équation $x.V = 0$ si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $v = c\delta_0$, résultat démontré dans l'exercice 73.)
3/ Réciproquement, si a et b sont deux constantes réelles, prouver que la distribution $a\delta_0 + b\delta_0'$ est solution de (E).
4/ Résoudre l'équation $x^2.u = 1$.

Exercice 85

Rappel : Soit v une distribution. On a $v' = 0$ si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $v = c$.
1/ Prouver que $x.\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.
2/ Résoudre $x.u' = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 86

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\delta_a * \delta_b$.

Exercice 87

$T_{\mathcal{H}}$ désigne la distribution associée à la fonction de Heavyside.
1a/ Calculer $1 * \delta_0'$.
1b/ Calculer $(1 * \delta_0') * T_{\mathcal{H}}$.
2a/ Calculer $\delta_0' * T_{\mathcal{H}}$.
2b/ Calculer $1 * (\delta_0' * T_{\mathcal{H}})$.
3/ Conclure.

Exercice 88

Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer $\mathcal{F}(\delta_a)$ puis calculer $\mathcal{F}(\delta_a^{(n)})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 89

Calculer la transformée de Fourier de la distribution $u = 1$.

Exercice 90

Définition : dire qu'une distribution tempérée u est *impaire* signifie que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ \langle u, \varphi(-x)\rangle = -\langle u, \varphi(x)\rangle.$$

1/ Prouver que la transformée de Fourier d'une distribution tempérée impaire est impaire.
2/ On admet que $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$ est une distribution tempérée. Prouver qu'elle est impaire.
3/ En utilisant que $x.\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big) = 1$ et que $\mathcal{F}(1) = \delta_0$, prouver que $\Big(\mathcal{F}\big(\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)\big)\Big)' = -2i\pi\delta_0$.
4/ Prouver qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\mathcal{F}\big(\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)\big) + 2i\pi T_{\mathcal{H}} = c$.
5/ Déterminer c pour que la distribution $-2i\pi T_{\mathcal{H}} + c$ soit impaire.
6/ En déduire $\mathcal{F}\big(\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)\big)$.

Exercice 91

On va calculer la transformée de Fourier de la distribution associée à la fonction de Heavyside.
On note sgn la *fonction signe* :
si $x > 0$, $\mathrm{sgn}(x) = 1$
si $x < 0$, $\mathrm{sgn}(x) = -1$
$\mathrm{sgn}(0) = 0$
On note S la distribution associée à sgn.
1a/ Prouver que $S' = 2\delta_0$.
1b/ Prouver que $i\pi x.\mathcal{F}(S) = 1$.
1c/ Prouver que $x.\big(i\pi\mathcal{F}(S) - \mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)\big) = 0$.
2/ En utilisant l'équivalence : $(x.u = 0) \Longleftrightarrow (\exists c \in \mathbb{R}\,/ u = c\delta_0)$, et le fait que S est une distribution impaire, prouver que $\mathcal{F}(S) = \dfrac{1}{i\pi}\ \mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$.
3/ Exprimer la fonction $\mathcal{H}$ en utilisant la fonction sgn et en déduire $\mathcal{F}(T_{\mathcal{H}})$.

EXERCICE 92

Résoudre l'équation différentielle $(E) : -u'' + u = \delta_0$ au sens des distributions. (On utilisera une transformée de Fourier.)

Quatrième partie
Equations aux dérivées partielles

Concernant les cas particuliers d'équations aux dérivées partielles qu'on étudiera dans cette partie, certaines techniques à connaître permettent de trouver rapidement une solution (au moins).
En général, la résolution d'une équation aux dérivées partielles est un problème mathématique très délicat. Lorsque cette équation est accompagnée de conditions initiales, c'est l'occasion de programmer des méthodes numériques de résolution à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique comme Maple et de pouvoir visualiser ainsi la solution (ce qui n'est déjà pas si mal).

Exercice 93

Intégrer l'E.D.P. (E) : $2\dfrac{\partial f}{\partial x}+3\dfrac{\partial f}{\partial y}-5\dfrac{\partial f}{\partial z}=0.$

Exercice 94

1/ Intégrer l'E.D.P. (E) : $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=0.$

2/ Intégrer l'E.D.P. (F) : $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=(x^2+y^2)f.$

Indication : passer en coordonnées polaires.

Exercice 95

Intégrer l'E.D.P. (E) : $\cos x\cos y\dfrac{\partial u}{\partial x}-\sin x\sin y\dfrac{\partial u}{\partial y}+\sin x\cos y\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

Exercice 96

Déterminer une solution du problème :

$$(P) : \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+e^x\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \quad (E) \\ u(x,0)=x \end{cases}$$

Exercice 97

Intégrer l'E.D.P. (E) : $yz\dfrac{\partial u}{\partial x}+zx\dfrac{\partial u}{\partial y}+xy\dfrac{\partial u}{\partial z}+xyz=0.$

Exercice 98

Soient c et λ deux constantes réelles et f une fonction dérivable donnée.
Déterminer une solution du problème :

$$(P) : \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} + \lambda u = 0 \quad (E) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Exercice 99

1/ Intégrer l'E.D.P. (E) : $(-14x+8y)\dfrac{\partial f}{\partial x} + (-15x+8y)\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial t} = 0.$

2/ En déduire une solution de (F) : $(-14x+8y)\dfrac{\partial f}{\partial x} + (-15x+8y)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0.$

Exercice 100

Intégrer l'E.D.P. (E) : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 3\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$

Exercice 101 ***Une autre technique.***

On veut déterminer une solution de l'E.D.P. (E) : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f.$

On recherche une solution f de (E) telle que $f(x,y) = g(xy)$ où $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

1/ Etablir l'équation différentielle (Γ) vérifiée par g.

2/ Déterminer une série entière solution de (Γ).

3/ En déduire une solution de (E).

Exercice 102

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction impaire 2π-périodique définie par $\varphi(x) = x(\pi - x)$ pour tout $x \in [0, \pi]$. La série de Fourier de φ est : $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{8}{\pi(2k+1)^3} \sin((2k+1)x)$.

On souhaite résoudre le problème (P) suivant :

$$(P) : \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 & \forall (x;y) \in]0,\pi[\times]0,+\infty[\quad (E) \\ u \in \mathcal{C}^0([0,\pi]\times[0,+\infty[,\mathbb{R}) & (C) \\ u(0,y) = 0 & \forall y > 0 \quad (1) \\ u(\pi,y) = 0 & \forall y > 0 \quad (2) \\ \lim\limits_{y\to+\infty} u(x,y) = 0 & \forall x \in [0,\pi] \quad (3) \\ u(x,0) = \varphi(x) & \forall x \in [0,\pi] \quad (4) \end{cases}$$

On commence par chercher une solution v de (E) dite *à variables séparées* :

$$v(x,y) = f(x)g(y).$$

1/ Prouver que f est solution d'une équation différentielle du type $z'' + \lambda z = 0$ et que seul $\lambda > 0$ permet de tenir compte de (1) et (2).

2/ Rechercher ensuite g en tenant compte de (3) mais sans tenir compte de (4).

3/ Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne une suite quelconque de réels, déduire de 1/ et 2/ que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n : (x,y) \longmapsto A_n e^{-ny}\sin(nx)$ est une solution de (E) vérifiant (1), (2) et (3).

4/ v_n vérifie-t-elle (4) ?

5/ On note $u : (x,y) \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,y)$. Déterminer les coefficients A_n de manière à tenir compte de (4).

6/ Prouver que la série u obtenue est une solution du problème (P).

Exercice 103

On veut résoudre le problème (P) suivant :

$$(P) : \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) & \forall (t,x) \in]0;+\infty[\times]0;+\infty[\quad (E) \\ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) & (C) \\ f(t,0) = 0 & \forall t \in]0;+\infty[\quad (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,\dfrac{\pi}{2}) = 0 & \forall t \in]0;+\infty[\quad (2) \\ f(0,\dfrac{\pi}{2}) = 1 & (3) \end{cases}$$

On cherche une solution f de (E) dite *à variables séparées* : $f(t,x) = \varphi(t)\psi(x)$.

1/ Prouver que ψ est solution d'une équation différentielle du type $z'' + \mu z = 0$ et que seul $\mu > 0$ permet de tenir compte de (1) et (2).

2/ Rechercher ensuite φ en tenant compte de (3) et expliciter la suite des fonctions f ainsi déterminées.

3/ Prouver que chaque élément de cette suite est bien une solution de (P).

<u>Exercice 104</u> ***La propriété de la moyenne.***

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On définit le *laplacien* de f par $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
Dire que f est *harmonique* signifie que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et que $\Delta f = 0$.
Pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[$ on note $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
1/ Calculer Δf en coordonnées polaires.
2/ On suppose f harmonique.
2a/ Prouver que $\phi : r \longmapsto \int_0^{2\pi} F(r,\theta)d\theta$ est constante sur $\mathbb{R}^+$.
2b/ En déduire la valeur de $\int_0^{2\pi} f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)d\theta$ pour toute valeur strictement positive de r et où (a, b) est un couple de réels quelconques.
2c/ Si $R > 0$, on note $\overline{D}((a,b)\,;\,R)$ le disque fermé de centre $A(a,b)$ et de rayon R.
Calculer $\displaystyle\iint_{\overline{D}((a,b)\,;\,R)} f(x,y)dxdy$.

<u>Exercice 105</u> ***Le principe du maximum.***

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit le laplacien de f par $\Delta f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.
On note D la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$ et $\overline{D}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.
1/ Si $\Delta f(x) > 0$ pour tout $x \in D$, prouver que pour tout $x \in D$, $f(x) < \displaystyle\max_{||y||=1} f(y)$.
2/ Si $\Delta f(x) = 0$ pour tout $x \in D$, prouver que pour tout $x \in D$, on a :

$$\min_{||y||=1} f(y) \leqslant f(x) \leqslant \max_{||y||=1} f(y).$$

Exercice 106 ***Equation de Burger.***

Soit $T > 0$.
Soit $u_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction donnée.
On considère le problème différentiel suivant :

$$(P) : \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + u(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 & \forall (x;t) \in \mathbb{R}\times]0,T[\quad (1) \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \quad (2) \end{cases}$$

1/ Soit u une solution $\mathcal{C}^1$ de (P).
On note $t \longmapsto x(t)$ la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = u(x(t),t) & \forall t \in]0,T[\\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Prouver que pour tout $t \in]0,T[$ on a $u(x(t),t) = u_0(x_0)$.

2/ Dans cette question, $T = 1$ et u_0 est définie par :

$$\begin{array}{ll} u_0(x) = 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ u_0(x) = 1 - x & \text{si } 0 < x < 1 \\ u_0(x) = 0 & \text{si } 1 \leqslant x \end{array}$$

2a/ Utiliser l'étude faite en 1/ pour tenter de déterminer une solution de (P).

2b/ Prouver que la fonction trouvée vérifie bien (1) pour presque tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,1[$.

2c/ Prouver que la fonction trouvée vérifie bien (2).

3/ La fonction $x \longmapsto \lim\limits_{t \to 1^-} u(x,t)$ est-elle continue ?